Lineare Programmierung und Dualität, bei der Gewinnung und Analyse von Approximationsalgorithmen

Bernd Klaus

Sommerakademie der Studienstiftung des dt. Volkes, Görlitz 2007

Gliederung

1. Einführung in Lineare Programme und Dualität
   - Lineare Programme
   - Dualität
2. Grundlegende Sätze und Definitionen
   - Starke und schwache Dualität
   - Komplementärer Schlupf
3. LP und Approximationsalgorithmen am Bsp. des SetCover
   - Relaxierung eines ganzzahligen linearen Programms
   - Anwendung der Dualität auf den Entwurf von SetCover-Alg.
   - Anwendung der Dualität auf die Analyse von SetCover-Alg.

Einführung

- LP: Optimierungsproblem (hier immer Minimum gesucht) mit lin. Zielfunktion . . .
- . . . unter Menge von linearen Ungleichungsbeschränkungen (Konvexes Polyeder)
- . . . polynomialer Zeit lösbar
- Duales Programm: Leicht aus Ausgangsprogramm (Primalprogramm) gewinnbares Programm . . .
- . . . mit einigen nützlichen Eigenschaften

Einführung

- LP: Optimierungsproblem (hier immer Minimum gesucht) mit lin. Zielfunktion ...
- ... unter Menge von linearen Ungleichungsbeschränkungen (Konvexes Polyeder)
- ... polynomialer Zeit lösbar
- Duales Programm: Leicht aus Ausgangsprogramm (Primalprogramm) gewinnbares Programm ...
- ... mit einigen nützlichen Eigenschaften

Einführung

- LP: Optimierungsproblem (hier immer Minimum gesucht) mit lin. Zielfunktion . . .
- . . . unter Menge von linearen Ungleichungsbeschränkungen (Konvexes Polyeder)
- . . . polynomialer Zeit lösbar
- Duales Programm: Leicht aus Ausgangsprogramm (Primalprogramm) gewinnbares Programm . . .
- . . . mit einigen nützlichen Eigenschaften

Einführung

- LP: Optimierungsproblem (hier immer Minimum gesucht) mit lin. Zielfunktion ...
- ... unter Menge von linearen Ungleichungsbeschränkungen (Konvexes Polyeder)
- ... polynomialer Zeit lösbar
- Duales Programm: Leicht aus Ausgangsprogramm (Primalprogramm) gewinnbares Programm ...
- ... mit einigen nützlichen Eigenschaften

Einführung

- LP: Optimierungsproblem (hier immer Minimum gesucht) mit lin. Zielfunktion ...
- ... unter Menge von linearen Ungleichungsbeschränkungen (Konvexes Polyeder)
- ... polynomialer Zeit lösbar
- Duales Programm: Leicht aus Ausgangsprogramm (Primalprogramm) gewinnbares Programm ...
- ... mit einigen nützlichen Eigenschaften

Gliederung

1. Einführung in Lineare Programme und Dualität
   - Lineare Programme
   - Dualität
2. Grundlegende Sätze und Definitionen
   - Starke und schwache Dualität
   - Komplementärer Schlupf
3. LP und Approximationsalgorithmen am Bsp. des SetCover
   - Relaxierung eines ganzzahligen linearen Programms
   - Anwendung der Dualität auf den Entwurf von SetCover-Alg.
   - Anwendung der Dualität auf die Analyse von SetCover-Alg.

Definition: Lineares Programm

Zielfunktion, zulässiger Bereich

Definition (Lineares Programm)

Ein Lineares Programm is folgendes Optmierungsproblem:

$$c^T x \rightarrow \text{min!} \qquad \text{(Zielfunktion)}$$

$$\textit{subject to } Ax \geq b \qquad \text{(Zul. Bereich bzw.Nebenbedingungen)}$$

$$x \geq 0, \quad x, c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{m,n}, m, n \in \mathbb{N}^n$$

- Natürlich sind leicht abgewandelte Formen möglich, (z.B. Gleichungsbeschränkungen, Max. statt Min.)
- Aber alle Formen sind äquivalent ineinander umformbar
- Ein Vektor x, der die Nebenbedingungen erfüllt heißt zulässig

Definition: Lineares Programm

Zielfunktion, zulässiger Bereich

Definition (Lineares Programm)

Ein Lineares Programm is folgendes Optmierungsproblem:

$$c^T x \to \min! \qquad \text{(Zielfunktion)}$$

$$\textit{subject to } Ax \geq b \qquad \text{(Zul. Bereich bzw. Nebenbedingungen)}$$

$$x \geq 0, \quad x, c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{m,n}, m, n \in \mathbb{N}^n$$

- Natürlich sind leicht abgewandelte Formen möglich, (z.B. Gleichungsbeschränkungen, Max. statt Min.)
- Aber alle Formen sind äquivalent ineinander umformbar
- Ein Vektor x, der die Nebenbedingungen erfüllt heißt zulässig

Definition: Lineares Programm

Zielfunktion, zulässiger Bereich

Definition (Lineares Programm)

Ein Lineares Programm is folgendes Optmierungsproblem:

$$\begin{aligned} c^T x &\to \text{min!} && \text{(Zielfunktion)} \\ \textit{subject to } Ax &\geq b && \text{(Zul. Bereich bzw.Nebenbedingungen)} \\ x &\geq 0, && x, c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{m,n}, m, n \in \mathbb{N}^n \end{aligned}$$

- Natürlich sind leicht abgewandelte Formen möglich, (z.B. Gleichungsbeschränkungen, Max. statt Min.)
- Aber alle Formen sind äquivalent ineinander umformbar
- Ein Vektor x, der die Nebenbedingungen erfüllt heißt zulässig

Gliederung

1. Einführung in Lineare Programme und Dualität
   - Lineare Programme
   - Dualität
2. Grundlegende Sätze und Definitionen
   - Starke und schwache Dualität
   - Komplementärer Schlupf
3. LP und Approximationsalgorithmen am Bsp. des SetCover
   - Relaxierung eines ganzzahligen linearen Programms
   - Anwendung der Dualität auf den Entwurf von SetCover-Alg.
   - Anwendung der Dualität auf die Analyse von SetCover-Alg.

Einführendes Beispiel

Primalproblem

Beispiel (Primalproblem)

$$\begin{aligned} 7x_1 + x_2 + 5x_3 &\to \text{min!} \\ \text{s.t.}\quad x_1 - x_2 + 3x_3 &\geq 10 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 &\geq 6 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

- Wir multiplizieren die beiden Nebenbedingungen mit *positiven* y_1, y_2 und addieren
- Dabei wählen wir y_1 und y_2, so dass:

Beispiel

$$\begin{aligned} 7x_1 + x_2 + 5x_3 &\geq \\ (x_1 - x_2 + 3x_3)y_1 + (5x_1 + 2x_2 - x_3)y_2 &\geq \\ 10y_1 + 6y_2 & \end{aligned}$$

Einführendes Beispiel

Primalproblem

Beispiel (Primalproblem)

$$\begin{aligned} 7x_1 + x_2 + 5x_3 &\to \text{min!} \\ \text{s.t.} \quad x_1 - x_2 + 3x_3 &\geq 10 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 &\geq 6 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

- Wir multiplizieren die beiden Nebenbedingungen mit *positiven* y_1, y_2 und addieren
- Dabei wählen wir y_1 und y_2, so dass:

Beispiel

$$\begin{aligned} 7x_1 + x_2 + 5x_3 &\geq \\ (x_1 - x_2 + 3x_3)y_1 + (5x_1 + 2x_2 - x_3)y_2 &\geq \\ 10y_1 + 6y_2 & \end{aligned}$$

Einführendes Beispiel

Primalproblem

Beispiel (Primalproblem)

$$\begin{aligned} 7x_1 + x_2 + 5x_3 &\to \text{min!} \\ \text{s.t.}\ \ x_1 - x_2 + 3x_3 &\geq 10 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 &\geq 6 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

- Wir multiplizieren die beiden Nebenbedingungen mit *positiven* y_1, y_2 und addieren
- Dabei wählen wir y_1 und y_2, so dass:

Beispiel

$$\begin{aligned} 7x_1 + x_2 + 5x_3 &\geq \\ (x_1 - x_2 + 3x_3)y_1 + (5x_1 + 2x_2 - x_3)y_2 &\geq \\ 10y_1 + 6y_2 & \end{aligned}$$

Einführendes Beispiel

Dualproblem

Die Idee y_1 und y_2 maximal zu wählen führt auf:

Beispiel

$$\begin{aligned} 10y_1 + 6y_2 &\to \max! \\ \text{s.t.}\quad y_1 - 5y_2 &\leq 7 \\ 5y_1 + 2y_2 &\leq 1 \\ 3y_1 - y_2 &\leq 5 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Es gilt nun insbesondere:

Fakt

$$\max(10y_1 + 6y_2) \leq \min(7x_1 + x_2 + 5x_3)$$

Einführendes Beispiel

Dualproblem

Die Idee y_1 und y_2 maximal zu wählen führt auf:

Beispiel

$$\begin{aligned} 10y_1 + 6y_2 &\to \max! \\ \text{s.t.} \quad y_1 - 5y_2 &\leq 7 \\ 5y_1 + 2y_2 &\leq 1 \\ 3y_1 - y_2 &\leq 5 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Es gilt nun insbesondere:

Fakt

$$\max(10y_1 + 6y_2) \leq \min(7x_1 + x_2 + 5x_3)$$

Gliederung

1. Einführung in Lineare Programme und Dualität
   - Lineare Programme
   - Dualität
2. Grundlegende Sätze und Definitionen
   - Starke und schwache Dualität
   - Komplementärer Schlupf
3. LP und Approximationsalgorithmen am Bsp. des SetCover
   - Relaxierung eines ganzzahligen linearen Programms
   - Anwendung der Dualität auf den Entwurf von SetCover-Alg.
   - Anwendung der Dualität auf die Analyse von SetCover-Alg.

Allg. Zusammenhang zwischen Primal- und Dualprogramm

Dualität

Primalprogramm

$$
\begin{aligned}
z(x) = c^T x &\rightarrow \text{min!} \\
\text{s.t.}\quad Ax &\geq b \\
x &\geq 0
\end{aligned}
$$

Dualprogramm

$$
\begin{aligned}
\vartheta(y) = b^T y &\rightarrow \text{max!} \\
\text{s.t.}\quad A^T y &\leq c \\
y &\geq 0
\end{aligned}
$$

Dualitätssätze

Fakt

für zulässige x und y gilt:

$$b^T y \leq c^T x \qquad \text{(schwache Dualität)}$$

und im Optimum

$$\max b^T y \leq \min c^T x \qquad \text{(starke Dualität)}$$

Gliederung

1. Einführung in Lineare Programme und Dualität
   - Lineare Programme
   - Dualität
2. Grundlegende Sätze und Definitionen
   - Starke und schwache Dualität
   - Komplementärer Schlupf
3. LP und Approximationsalgorithmen am Bsp. des SetCover
   - Relaxierung eines ganzzahligen linearen Programms
   - Anwendung der Dualität auf den Entwurf von SetCover-Alg.
   - Anwendung der Dualität auf die Analyse von SetCover-Alg.

Die Gleichheit im Optimum bei Dual und Primal ergibt sich aus:

Fakt

$$\vartheta(y) = b^T y \underset{(a)}{\leq} (Ax)^T y = x^T A^T y \underset{(b)}{\leq} x^T c = z(x)$$

In Indexschreibweise bedeutet Gleichheit bei (a) und (b):

Definition

Komplemtärer Schlupf

$$y_j > 0 \Rightarrow \text{row}_j\, Ax = b_j \tag{a}$$

$$x_i > 0 \Rightarrow \text{row}_i\, A^T y = c_i \tag{b}$$

Definition (SetCover)

- Eine Probleminstanz von SetCover ist eine Menge $V = \{u_1, \dots, u_n\}$ von Objekten und eine Familie $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$ verschiedener endlicher Mengen aus diesen Objekten.
- Eine Teilfamilie $\mathcal{S}_{\text{cov}} = \{S_{i_1}, \dots, S_{i_n}\}$ dieser Familie heißt Überdeckung, falls $V(\mathcal{S}_{\text{cov}}) := S_{i_1} \cup \ldots \cup S_{i_n} = V$
- Ziel: finde minimale Überdeckung.

Definition (Kennzahlen)

Dabei bezeichne:

- $\deg(u)$ (Grad) die Anzahl der Mengen S_j in denen u vorkommt
- $G_{\mathcal{S}}$ die Mächtigkeit der größten Gruppe.
- $\delta_{\mathcal{S}}$ den maximalen Grad.

Definition (SetCover)

- Eine Probleminstanz von SetCover ist eine Menge $V = \{u_1, \ldots, u_n\}$ von Objekten und eine Familie $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ verschiedener endlicher Mengen aus diesen Objekten.
- Eine Teilfamilie $\mathcal{S}_{\text{cov}} = \{S_{i_1}, \ldots, S_{i_n}\}$ dieser Familie heißt Überdeckung, falls $V(\mathcal{S}_{\text{cov}}) := S_{i_1} \cup \ldots \cup S_{i_n} = V$
- Ziel: finde minimale Überdeckung.

Definition (Kennzahlen)

Dabei bezeichne:

- $\deg(u)$ (Grad) die Anzahl der Mengen S_j in denen u vorkommt
- $G_{\mathcal{S}}$ die Mächtigkeit der größten Gruppe.
- $\delta_{\mathcal{S}}$ den maximalen Grad.

Ein LP für SetCover

- für $u \in S_i \in \mathcal{S}$ setze $x_i = 1$ sonst 0
- Mimiere die Summe der x_i

X: SetCover LP (ganzzahlig)

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \to \min!$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i:u \in S_i} x_i \geq 1 \quad \forall u \in V$$

$$x_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in \{1,\ldots,m\}$$

Ein LP für SetCover

- für $u \in S_i \in \mathcal{S}$ setze $x_i = 1$ sonst 0
- Mimiere die Summe der x_i

X: SetCover LP (ganzzahlig)

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \to \min!$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i:u \in S_i} x_i \geq 1 \quad \forall u \in V$$

$$x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\}$$

Ein LP für SetCover

- für $u \in S_i \in \mathcal{S}$ setze $x_i = 1$ sonst 0
- Mimiere die Summe der x_i

X: SetCover LP (ganzzahlig)

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \to \min!$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i:u \in S_i} x_i \geq 1 \quad \forall u \in V$$

$$x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\}$$

Gliederung

1. Einführung in Lineare Programme und Dualität
   - Lineare Programme
   - Dualität
2. Grundlegende Sätze und Definitionen
   - Starke und schwache Dualität
   - Komplementärer Schlupf
3. LP und Approximationsalgorithmen am Bsp. des SetCover
   - Relaxierung eines ganzzahligen linearen Programms
   - Anwendung der Dualität auf den Entwurf von SetCover-Alg.
   - Anwendung der Dualität auf die Analyse von SetCover-Alg.

Relaxierung

- Wir wollen jetzt die Lineare Programmierung nutzen
- Gegeben: Probleminstanz I. Idee: entferne Ganzzahligkeitsbeschränkung
- Erhalte relaxiertes Problem X_{rel}
- Bestimme Lösung diese Problems und gewinne daraus ein Lösung $A(I)$ von X
- Details zum Gewinnen folgen (Idee: Runden)!
- Zeige, dass $A(I) \leq \rho OPT(X_{rel})$
- als gilt auch: $A(I) \leq \rho OPT(X)$

Relaxierung

- Wir wollen jetzt die Lineare Programmierung nutzen
- Gegeben: Probleminstanz I. Idee: entferne Ganzzahligkeitsbeschränkung
- Erhalte relaxiertes Problem X_{rel}
- Bestimme Lösung diese Problems und gewinne daraus ein Lösung $A(I)$ von X
- Details zum Gewinnen folgen (Idee: Runden)!
- Zeige, dass $A(I) \leq \rho OPT(X_{rel})$
- als gilt auch: $A(I) \leq \rho OPT(X)$

Relaxierung

- Wir wollen jetzt die Lineare Programmierung nutzen
- Gegeben: Probleminstanz I. Idee: entferne Ganzzahligkeitsbeschränkung
- Erhalte relaxiertes Problem X_{rel}
- Bestimme Lösung diese Problems und gewinne daraus ein Lösung $A(I)$ von X
- Details zum Gewinnen folgen (Idee: Runden)!
- Zeige, dass $A(I) \leq \rho OPT(X_{rel})$
- als gilt auch: $A(I) \leq \rho OPT(X)$

Relaxierung

- Wir wollen jetzt die Lineare Programmierung nutzen
- Gegeben: Probleminstanz I. Idee: entferne Ganzzahligkeitsbeschränkung
- Erhalte relaxiertes Problem X_{rel}
- Bestimme Lösung diese Problems und gewinne daraus ein Lösung $A(I)$ von X
- Details zum Gewinnen folgen (Idee: Runden)!
- Zeige, dass $A(I) \leq \rho OPT(X_{rel})$
- als gilt auch: $A(I) \leq \rho OPT(X)$

Relaxierung

- Wir wollen jetzt die Lineare Programmierung nutzen
- Gegeben: Probleminstanz I. Idee: entferne Ganzzahligkeitsbeschränkung
- Erhalte relaxiertes Problem X_{rel}
- Bestimme Lösung diese Problems und gewinne daraus ein Lösung $A(I)$ von X
- Details zum Gewinnen folgen (Idee: Runden)!
- Zeige, dass $A(I) \leq \rho OPT(X_{rel})$
- als gilt auch: $A(I) \leq \rho OPT(X)$

Relaxierung

- Wir wollen jetzt die Lineare Programmierung nutzen
- Gegeben: Probleminstanz I. Idee: entferne Ganzzahligkeitsbeschränkung
- Erhalte relaxiertes Problem X_{rel}
- Bestimme Lösung diese Problems und gewinne daraus ein Lösung $A(I)$ von X
- Details zum Gewinnen folgen (Idee: Runden)!
- Zeige, dass $A(I) \leq \rho OPT(X_{rel})$
- als gilt auch: $A(I) \leq \rho OPT(X)$

Das relaxierte LP für SetCover

X_{rel}: SetCover LP (reell)

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \to \text{min!}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i:u\in S_i} x_i \geq 1 \quad \forall u \in V$$

$$x_i \in [0,1] \quad \forall i \in \{1,\dots,m\}$$

Ganzahligkeitslücke

Definition (Ganzzahligkeitslücke)

Bezeichen $\mathcal{D}$ die Menge aller Instanzen eines gannzahlige Opmierungsproblems X. Sei X_{rel} das relaxierte Problem. Dann heißt

$$\gamma = \max \left\{ \frac{OPT(X)}{OPT(X_{\text{rel}})} | I \in \mathcal{D} \right\}$$

Ganzahligkeitslücke.

Fakt

Bei einem durch Relaxierung gewonnenen Algorithmus gilt:

$$\rho \geq \gamma$$

Also beschränkt die Ganzzahligkeitslücke die beweisbare relative Güte.

Ganzahligkeitslücke bei SetCover

Satz (Ganzzahligkeitslücke bei SetCover)

Für das SetCover-Problem gilt:

$$\gamma \geq \frac{1}{2} \log n$$

Beweis.

[Skizze, $\bigoplus$ = Exklusiv-Oder]

- Betrachte $V = \left\{ \bar{u} | \bar{u} \in \{0,1\}^k, u \neq 0^k \right\}$
- für alle $\bar{b} \neq 0^k$ als Überdeckungsfamilie: $S_{\bar{b}} = \{\bar{u} | \bigoplus u_i \wedge b_i\}$ über GF[2]

□

Ganzahligkeitslücke bei SetCover

Satz (Ganzzahligkeitslücke bei SetCover)

Für das SetCover-Problem gilt:

$$\gamma \geq \frac{1}{2} \log n$$

Beweis.

[Skizze, $\bigoplus =$ Exklusiv-Oder]

- Betrachte $V = \left\{ \bar{u} | \bar{u} \in \{0,1\}^k, u \neq 0^k \right\}$
- für alle $\bar{b} \neq 0^k$ als Überdeckungsfamilie: $S_{\bar{b}} = \{\bar{u} | \bigoplus u_i \wedge b_i\}$ über GF[2]

□

Deterministischer Rundungsalgorithmus

DetRoundSC

Löse LP X_{rel}
$S_{\text{cov}} := \varnothing$
FOR $i := 1$ TO m DO
    IF $x_i \geq \delta_{\mathcal{S}}^{-1}$ THEN $S_{\text{cov}} := S_{\text{cov}} \cup \{S_i\}$

Satz

Es gilt:

$$DetRoundSC(\mathcal{S}_{\text{cov}}) \leq \delta_{\mathcal{S}} OPT(\mathcal{S}_{cov})$$

Deterministischer Rundungsalgorithmus

DetRoundSC

Löse LP X_{rel}

$S_{\text{cov}} := \varnothing$

FOR $i := 1$ TO m DO

IF $x_i \geq \delta_{\mathcal{S}}^{-1}$ THEN $S_{\text{cov}} := S_{\text{cov}} \cup \{S_i\}$

Satz

Es gilt:

$$DetRoundSC(\mathcal{S}_{\text{cov}}) \leq \delta_{\mathcal{S}} OPT(\mathcal{S}_{cov})$$

Zufälliges Runden

RanRoundSC[r]

Löse LP X_{rel}
$X := \emptyset$
FOR $i := 1$ TO m DO
    Mit Wahrscheinlichkeit $1 - e^{-rx_i}$: $X := X \cup \{S_i\}$

Satz

Es gilt:

$$Pr[X \text{ ist Überdeckung}] \geq 1 - ne^{-r} \quad \text{und}$$
$$E[\text{ZF-Wert}] \leq r\,OPT(\mathcal{S})$$

Wiederhole nun obigen Algorithmus so lange bis X tatsächlich eine Überdeckung ist. ($\exists$ obere Schranke)

Zufälliges Runden

RanRoundSC[r]

Löse LP X_{rel}
$X := \varnothing$
FOR $i := 1$ TO m DO
    Mit Wahrscheinlichkeit $1 - e^{-rx_i}$: $X := X \cup \{S_i\}$

Satz

Es gilt:

$$Pr[X \text{ ist Überdeckung}] \geq 1 - ne^{-r} \quad \text{und}$$
$$E[\text{ZF-Wert}] \leq r\,OPT(\mathcal{S})$$

Wiederhole nun obigen Algorithmus so lange bis X tatsächlich eine Überdeckung ist. ($\exists$ obere Schranke)

Gliederung

1. Einführung in Lineare Programme und Dualität
   - Lineare Programme
   - Dualität
2. Grundlegende Sätze und Definitionen
   - Starke und schwache Dualität
   - Komplementärer Schlupf
3. LP und Approximationsalgorithmen am Bsp. des SetCover
   - Relaxierung eines ganzzahligen linearen Programms
   - Anwendung der Dualität auf den Entwurf von SetCover-Alg.
   - Anwendung der Dualität auf die Analyse von SetCover-Alg.

Dual fitting

Grundidee

- Ausnutzen des komplementären Schlupfes (Teil (*b*))
- $x_i > 0 \Rightarrow row_i A^T y = c_i$
- Bestimme Lsg. y des Duals, die einige Nebenbedingungen scharf macht
- Nicht notwending optimal!
- Setzte die zugehörigen x_i auf 1$\Rightarrow$ $row_i A^T y = c_i x_i$
- Bestimme ZF-Wert

Dual fitting

Grundidee

- Ausnutzen des komplementären Schlupfes (Teil (*b*))
- $x_i > 0 \Rightarrow row_i A^T y = c_i$
- Bestimme Lsg. y des Duals, die einige Nebenbedingungen scharf macht
- Nicht notwending optimal!
- Setzte die zugehörigen x_i auf 1$\Rightarrow$ $row_i A^T y = c_i x_i$
- Bestimme ZF-Wert

Dual fitting

Grundidee

- Ausnutzen des komplementären Schlupfes (Teil (*b*))
- $x_i > 0 \Rightarrow row_i A^T y = c_i$
- Bestimme Lsg. y des Duals, die einige Nebenbedingungen scharf macht
- Nicht notwending optimal!
- Setzte die zugehörigen x_i auf 1$\Rightarrow row_i A^T y = c_i x_i$
- Bestimme ZF-Wert

Dual fitting

Grundidee

- Ausnutzen des komplementären Schlupfes (Teil (*b*))
- $x_i > 0 \Rightarrow row_i A^T y = c_i$
- Bestimme Lsg. y des Duals, die einige Nebenbedingungen scharf macht
- Nicht notwending optimal!
- Setzte die zugehörigen x_i auf 1$\Rightarrow row_i A^T y = c_i x_i$
- Bestimme ZF-Wert

Dual fitting

Grundidee

- Ausnutzen des komplementären Schlupfes (Teil (*b*))
- $x_i > 0 \Rightarrow row_i A^T y = c_i$
- Bestimme Lsg. y des Duals, die einige Nebenbedingungen scharf macht
- Nicht notwending optimal!
- Setzte die zugehörigen x_i auf 1$\Rightarrow row_i A^T y = c_i x_i$
- Bestimme ZF-Wert

Dual fitting

Grundidee

- Ausnutzen des komplementären Schlupfes (Teil (*b*))
- $x_i > 0 \Rightarrow row_i A^T y = c_i$
- Bestimme Lsg. y des Duals, die einige Nebenbedingungen scharf macht
- Nicht notwending optimal!
- Setzte die zugehörigen x_i auf 1$\Rightarrow$ $row_i A^T y = c_i x_i$
- Bestimme ZF-Wert

Erinnerung

Primal und Dual für SetCover

X: SetCover LP (ganzzahlig)

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \to \text{min!}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i:u_j \in S_i} x_i \geq 1 \quad \forall u_j \in V$$

$$x_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\}$$

Y_{rel}: relaxiertes Dual für SetCover LP

$$\sum_{j=1}^{n} y_i \to \text{max!}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j:u_j \in S_i} y_j \geq 1 \quad \forall S_i \in \mathcal{S}$$

$$y_i \in [0,1] \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

Dual fitting Algorithmus

DualPurSC

DualPurSC

Löse LP Y_{rel} Die Lösung sei y

$S_{\text{cov}} := \varnothing$

FOR $i := 1$ TO m DO

  IF i-te Nebenbedingung des Duals scharf

    THEN $x_i := 1$

    ELSE $x_i := 0$

Güte des Algorithmus

Satz

Es gilt:

$$DualPurSC(\mathcal{S}) \leq \delta_{\mathcal{S}} OPT(\mathcal{S})$$

Beweis.

[Skizze] Für alle $x_i = 1$ gilt $\sum_{j:u_j \in S_i} y_j = 1 = x_i$ Also gilt:

$$\text{DualPurSC}(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{i:x_i=1} x_i = \sum_{i:x_i=1} \sum_{j:u_j \in S_i} y_j \leq$$

$$\delta_{\mathcal{S}} \sum_{j=1}^{n} y_j = \delta_{\mathcal{S}} \text{OPT}(Y_{rel}) \leq \delta_{\mathcal{S}} \text{OPT}(\mathcal{S})$$

□

Gliederung

1. Einführung in Lineare Programme und Dualität
   - Lineare Programme
   - Dualität
2. Grundlegende Sätze und Definitionen
   - Starke und schwache Dualität
   - Komplementärer Schlupf
3. LP und Approximationsalgorithmen am Bsp. des SetCover
   - Relaxierung eines ganzzahligen linearen Programms
   - Anwendung der Dualität auf den Entwurf von SetCover-Alg.
   - Anwendung der Dualität auf die Analyse von SetCover-Alg.

Analyse von Algorithmen mit Hilfe der Dualität

Grundidee

- Berechne Lsg. des ganzahligen LPs und konstruiere daraus Lösung y von Y_{rel}
- leite Beziehung $c^T x = z(x) = f(y)$ her. (x sei eine vom Alg. ermittelte Lsg.)
- Gewinne Beziehung $f(y) \leq g\vartheta(y) = b^T y$
- Dann gilt: $z(x) \leq g\text{OPT}(I)$ (I ist eine Instanz des ganzahligen Optmierungsproblems)

Analyse von Algorithmen mit Hilfe der Dualität

Grundidee

- Berechne Lsg. des ganzahligen LPs und konstruiere daraus Lösung y von Y_{rel}
- leite Beziehung $c^T x = z(x) = f(y)$ her. (x sei eine vom Alg. ermittelte Lsg.)
- Gewinne Beziehung $f(y) \leq g\vartheta(y) = b^T y$
- Dann gilt: $z(x) \leq g\text{OPT}(I)$ (I ist eine Instanz des ganzahligen Optmierungsproblems)

Analyse von Algorithmen mit Hilfe der Dualität
Grundidee

- Berechne Lsg. des ganzahligen LPs und konstruiere daraus Lösung y von Y_{rel}
- leite Beziehung $c^T x = z(x) = f(y)$ her. (x sei eine vom Alg. ermittelte Lsg.)
- Gewinne Beziehung $f(y) \leq g\vartheta(y) = b^T y$
- Dann gilt: $z(x) \leq g\text{OPT}(I)$ (I ist eine Instanz des ganzahligen Optmierungsproblems)

Analyse von Algorithmen mit Hilfe der Dualität

Grundidee

- Berechne Lsg. des ganzahligen LPs und konstruiere daraus Lösung y von Y_{rel}
- leite Beziehung $c^T x = z(x) = f(y)$ her. (x sei eine vom Alg. ermittelte Lsg.)
- Gewinne Beziehung $f(y) \leq g\vartheta(y) = b^T y$
- Dann gilt: $z(x) \leq g\text{OPT}(I)$ (I ist eine Instanz des ganzahligen Optmierungsproblems)

Analysealgorithmus

PrimalDualSC

Sei $\mathcal{H}(n) := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$

DualPurSC

FOR $i := 1$ TO m DO $x_i := 0$
$C := 0$ (schon gespeicherte Objekte)
WHILE $C \neq V$ DO
    Bestimme einen Index i mit $|S_i \setminus C|$ maximal
    $x_i = 1$
    FOR alle $u_j \in S_i \setminus C$ DO
        preis(u_j):= $\frac{1}{|S_i \setminus C|}$
        $y_j := \frac{1}{\mathcal{H}(G_{\mathcal{S}})}$preis($u_j$)
    $C := C \cup S_i$

Satz

Es gilt: PrimalDualSC($\mathcal{S}$) $\leq \mathcal{H}(G_{\mathcal{S}})OPT(\mathcal{S})$

Beweis mit Hilfe der Dualität

Beweis.

[Skizze] Es gilt zunächst, dass die Lsg. y des Alg. tatsächlich eine Lsg. des Duals ist. (nicht offensichtlich) Also:

$$\mathrm{PrimalDualSC}(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{i:x_i=1} x_i = \sum_{i:x_i=1} \sum_{u_j \in S_i \setminus C} \mathrm{preis}(u_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \mathrm{preis}(u_j) = \mathcal{H}(G_{\mathcal{S}}) \sum_{j=1}^{n} y_j \leq \mathcal{H}(G_{\mathcal{S}}) \mathrm{OPT}(\mathcal{S})$$

□