Scheduling und Lineare Programmierung

Nach

J. K. Lenstra, D. B. Shmoys und É. Tardos

Janick Martinez Esturo

jmartine@techfak.uni-bielefeld.de

Technische Fakultät
Universität Bielefeld

09.09.2007

Sommerakademie Görlitz

Arbeitsgruppe 5

Gliederung

Gliederung

Gliederung

Lineare und Integer Programmierung
Definition

Definition (Lineares und Integer Programm)

- Ein lineares Programm LP ist ein Optimierungsproblem der Form: Gegeben $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, finde $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ damit

$$\min_{\vec{x} \in \mathbb{R}^n} \left\{ \vec{c}^T \vec{x} : \mathbf{A}\vec{x} \leq \vec{b}, \vec{x} \geq 0 \right\}$$

- Ein integer Programm IP ist ein Optimierungsproblem der Form: Gegeben $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, finde $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ damit

$$\min_{\vec{x} \in \mathbb{R}^n} \left\{ \vec{c}^T \vec{x} : \mathbf{A}\vec{x} \leq \vec{b}, \vec{x} \geq 0, \forall j \in J\, x_j \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

  - Das IP heißt pur, falls $J = \{1, 2, \ldots, n\}$, sonst gemischt
  - Falls $x_j \in \{0, 1\}$, ist das IP binär

Lineare und Integer Programmierung
Definition

Definition (Lineares und Integer Programm)

- Ein lineares Programm LP ist ein Optimierungsproblem der Form: Gegeben $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, finde $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ damit

$$\min_{\vec{x} \in \mathbb{R}^n} \left\{ \vec{c}^T \vec{x} : \mathbf{A}\vec{x} \leq \vec{b}, \vec{x} \geq 0 \right\}$$

- Ein integer Programm IP ist ein Optimierungsproblem der Form: Gegeben $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, finde $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ damit

$$\min_{\vec{x} \in \mathbb{R}^n} \left\{ \vec{c}^T \vec{x} : \mathbf{A}\vec{x} \leq \vec{b}, \vec{x} \geq 0, \forall j \in J\, x_j \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

  - Das IP heißt pur, falls $J = \{1, 2, \ldots, n\}$, sonst gemischt
  - Falls $x_j \in \{0, 1\}$, ist das IP binär

Lineare und Integer Programmierung
Definition

Definition (Lineares und Integer Programm)

- Ein lineares Programm LP ist ein Optimierungsproblem der Form: Gegeben $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, finde $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ damit

$$\min_{\vec{x} \in \mathbb{R}^n} \left\{ \vec{c}^T \vec{x} : \mathbf{A}\vec{x} \leq \vec{b}, \vec{x} \geq 0 \right\}$$

- Ein integer Programm IP ist ein Optimierungsproblem der Form: Gegeben $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, finde $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ damit

$$\min_{\vec{x} \in \mathbb{R}^n} \left\{ \vec{c}^T \vec{x} : \mathbf{A}\vec{x} \leq \vec{b}, \vec{x} \geq 0, \forall j \in J\, x_j \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

  - Das IP heißt pur, falls $J = \{1, 2, \ldots, n\}$, sonst gemischt
  - Falls $x_j \in \{0, 1\}$, ist das IP binär

Lineare und Integer Programmierung
Definition

Definition (Lineares und Integer Programm)

- Ein lineares Programm LP ist ein Optimierungsproblem der Form: Gegeben $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, finde $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ damit

$$\min_{\vec{x} \in \mathbb{R}^n} \left\{ \vec{c}^T \vec{x} : \mathbf{A}\vec{x} \leq \vec{b}, \vec{x} \geq 0 \right\}$$

- Ein integer Programm IP ist ein Optimierungsproblem der Form: Gegeben $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, finde $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ damit

$$\min_{\vec{x} \in \mathbb{R}^n} \left\{ \vec{c}^T \vec{x} : \mathbf{A}\vec{x} \leq \vec{b}, \vec{x} \geq 0, \forall j \in J\, x_j \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

  - Das IP heißt pur, falls $J = \{1, 2, \ldots, n\}$, sonst gemischt
  - Falls $x_j \in \{0, 1\}$, ist das IP binär

Relaxation eines Integer Programmierung
Definition

Definition (Relaxation eines Integer Programmierung)

- Die Relaxation eines IPs (IPR)

$$\min_{\vec{x}\in\mathbb{R}^n} \left\{ \vec{c}^T\vec{x} : \mathbf{A}\vec{x} \leq \vec{b}, \vec{x} \geq 0, \forall j \in J\, x_j \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

ist das Optimierungsproblem

$$\min_{\vec{x}\in\mathbb{R}^n} \left\{ \vec{c}^T\vec{x} : \mathbf{A}\vec{x} \leq \vec{b}, \vec{x} \geq 0 \right\}$$

- Beschränkung auf ganzzahlige Variablen x_j fallengelassen
- Erlaubt u.U. effiziente Bestimmung einer „guten“ Lösung, die noch gerundet werden muss
- Integralitätslücke (integrality gap) eines Problems Π ist gegeben durch $sup_{I\in\Pi} \frac{\mathrm{OPT}_{IP}(I)}{\mathrm{OPT}_{IPR}(I)}$

Relaxation eines Integer Programmierung
Definition

Definition (Relaxation eines Integer Programmierung)

- Die Relaxation eines IPs (IPR)

$$\min_{\vec{x}\in\mathbb{R}^n} \left\{ \vec{c}^T\vec{x} : \mathbf{A}\vec{x} \leq \vec{b}, \vec{x} \geq 0, \forall j \in J\, x_j \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

ist das Optimierungsproblem

$$\min_{\vec{x}\in\mathbb{R}^n} \left\{ \vec{c}^T\vec{x} : \mathbf{A}\vec{x} \leq \vec{b}, \vec{x} \geq 0 \right\}$$

  - Beschränkung auf ganzzahlige Variablen x_j fallengelassen
  - Erlaubt u.U. effiziente Bestimmung einer „guten“ Lösung, die noch gerundet werden muss
  - Integralitätslücke (integrality gap) eines Problems Π ist gegeben durch $sup_{I\in\Pi} \frac{\mathrm{OPT}_{IP}(I)}{\mathrm{OPT}_{IPR}(I)}$

Relaxation eines Integer Programmierung
Definition

Definition (Relaxation eines Integer Programmierung)

- Die Relaxation eines IPs (IPR)

$$\min_{\vec{x}\in\mathbb{R}^n} \left\{ \vec{c}^T\vec{x} : \mathbf{A}\vec{x} \leq \vec{b}, \vec{x} \geq 0, \forall j \in J\, x_j \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

  ist das Optimierungsproblem

$$\min_{\vec{x}\in\mathbb{R}^n} \left\{ \vec{c}^T\vec{x} : \mathbf{A}\vec{x} \leq \vec{b}, \vec{x} \geq 0 \right\}$$

  - Beschränkung auf ganzzahlige Variablen x_j fallengelassen
  - Erlaubt u.U. effiziente Bestimmung einer „guten“ Lösung, die noch gerundet werden muss
  - Integralitätslücke (integrality gap) eines Problems Π ist gegeben durch $sup_{I\in\Pi} \frac{\mathrm{OPT}_{IP}(I)}{\mathrm{OPT}_{IPR}(I)}$

Relaxation eines Integer Programmierung
Definition

Definition (Relaxation eines Integer Programmierung)

- Die Relaxation eines IPs (IPR)

$$\min_{\vec{x}\in\mathbb{R}^n} \left\{ \vec{c}^T\vec{x} : \mathbf{A}\vec{x} \leq \vec{b}, \vec{x} \geq 0, \forall j \in J\, x_j \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

ist das Optimierungsproblem

$$\min_{\vec{x}\in\mathbb{R}^n} \left\{ \vec{c}^T\vec{x} : \mathbf{A}\vec{x} \leq \vec{b}, \vec{x} \geq 0 \right\}$$

  - Beschränkung auf ganzzahlige Variablen x_j fallengelassen
  - Erlaubt u.U. effiziente Bestimmung einer „guten“ Lösung, die noch gerundet werden muss
  - Integralitätslücke (integrality gap) eines Problems Π ist gegeben durch $sup_{I\in\Pi} \frac{\mathrm{OPT}_{IP}(I)}{\mathrm{OPT}_{IPR}(I)}$

Gliederung

Scheduling auf unverbundenen parallelen Maschinen
Definitionen und Problem

Definition (Schedule)

- Gegeben sind Menge J von n Aufgaben und Menge M von m Maschinen
- Ein Schedule ist eine Zuteilung jeder Aufgabe auf einen (oder mehrere) Zeitintervalle von einer (oder mehrerer) Maschinen

Problem (Scheduling auf unverbundenen parallelen Maschinen)

- *Für alle Aufgaben $j \in J$ und Maschinen $i \in M$ ist $p_{ij} \in \mathbb{Z}^+$ die benötigte Zeit, um j auf i zu bearbeiten*
- *Ziel: Plane die Aufgaben auf den Maschinen so, dass die gesamte Bearbeitungszeit (Makespan) minimiert wird, d.h. minimiere die maximale Bearbeitungszeit jeder Maschine*

Scheduling auf unverbundenen parallelen Maschinen

Definitionen und Problem

Definition (Schedule)

- Gegeben sind Menge J von n Aufgaben und Menge M von m Maschinen
- Ein Schedule ist eine Zuteilung jeder Aufgabe auf einen (oder mehrere) Zeitintervalle von einer (oder mehrerer) Maschinen

Problem (Scheduling auf unverbundenen parallelen Maschinen)

- *Für alle Aufgaben $j \in J$ und Maschinen $i \in M$ ist $p_{ij} \in \mathbb{Z}^+$ die benötigte Zeit, um j auf i zu bearbeiten*
- *Ziel: Plane die Aufgaben auf den Maschinen so, dass die gesamte Bearbeitungszeit (Makespan) minimiert wird, d.h. minimiere die maximale Bearbeitungszeit jeder Maschine*

Scheduling auf unverbundenen parallelen Maschinen
Definitionen und Problem

Definition (Schedule)

- Gegeben sind Menge J von n Aufgaben und Menge M von m Maschinen
- Ein Schedule ist eine Zuteilung jeder Aufgabe auf einen (oder mehrere) Zeitintervalle von einer (oder mehrerer) Maschinen

Problem (Scheduling auf unverbundenen parallelen Maschinen)

- *Für alle Aufgaben $j \in J$ und Maschinen $i \in M$ ist $p_{ij} \in \mathbb{Z}^+$ die benötigte Zeit, um j auf i zu bearbeiten*
- *Ziel: Plane die Aufgaben auf den Maschinen so, dass die gesamte Bearbeitungszeit (Makespan) minimiert wird, d.h. minimiere die maximale Bearbeitungszeit jeder Maschine*

Scheduling auf unverbundenen parallelen Maschinen
Definitionen und Problem

Definition (Schedule)

- Gegeben sind Menge J von n Aufgaben und Menge M von m Maschinen
- Ein Schedule ist eine Zuteilung jeder Aufgabe auf einen (oder mehrere) Zeitintervalle von einer (oder mehrerer) Maschinen

Problem (Scheduling auf unverbundenen parallelen Maschinen)

- *Für alle Aufgaben $j \in J$ und Maschinen $i \in M$ ist $p_{ij} \in \mathbb{Z}^+$ die benötigte Zeit, um j auf i zu bearbeiten*
- *Ziel: Plane die Aufgaben auf den Maschinen so, dass die gesamte Bearbeitungszeit (Makespan) minimiert wird, d.h. minimiere die maximale Bearbeitungszeit jeder Maschine*

Scheduling auf unverbundenen parallelen Maschinen
Variationen des Problems

Variationen des Problems

- Hier Maschinen „unverbunden“, da keine Relation der Bearbeitungszeiten einer Aufgabe zwischen ihnen angenommen wird
- Für identische Maschinen, d.h. Aufgabe j hat auf jeder Maschine Bearbeitungszeit p_j, kann PTAS angegeben werden
- PTAS ebenfalls für uniforme Maschinen i angebbar, die Geschwindigkeit s_i besitzen und Aufgabe j in Zeit p_j/s_i bearbeiten

Universität Bielefeld

Scheduling auf unverbundenen parallelen Maschinen
Variationen des Problems

Variationen des Problems

- Hier Maschinen „unverbunden“, da keine Relation der Bearbeitungszeiten einer Aufgabe zwischen ihnen angenommen wird
- Für identische Maschinen, d.h. Aufgabe j hat auf jeder Maschine Bearbeitungszeit p_j, kann PTAS angegeben werden
- PTAS ebenfalls für uniforme Maschinen i angebbar, die Geschwindigkeit s_i besitzen und Aufgabe j in Zeit p_j/s_i bearbeiten

Scheduling auf unverbundenen parallelen Maschinen
Variationen des Problems

Variationen des Problems

- Hier Maschinen „unverbunden“, da keine Relation der Bearbeitungszeiten einer Aufgabe zwischen ihnen angenommen wird
- Für identische Maschinen, d.h. Aufgabe j hat auf jeder Maschine Bearbeitungszeit p_j, kann PTAS angegeben werden
- PTAS ebenfalls für uniforme Maschinen i angebbar, die Geschwindigkeit s_i besitzen und Aufgabe j in Zeit p_j/s_i bearbeiten

Scheduling Beispiele

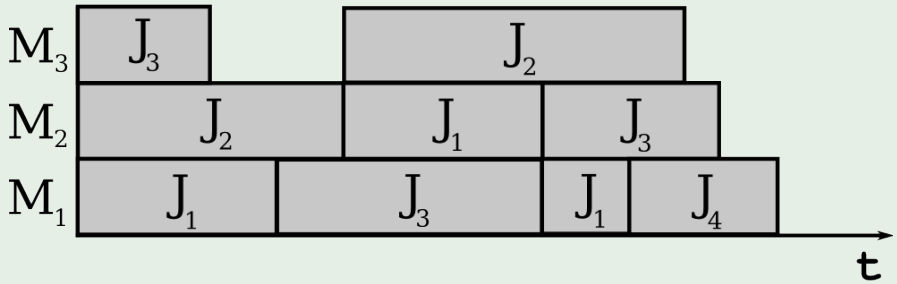
Beispiele (Scheduling)

- Gantt charts zur Visualisierung eines Schedules
- Maschinenorientiert:
- Aufgabenorientiert:

Scheduling Beispiele

Beispiele (Scheduling)

- Gantt charts zur Visualisierung eines Schedules
- Maschinenorientiert:

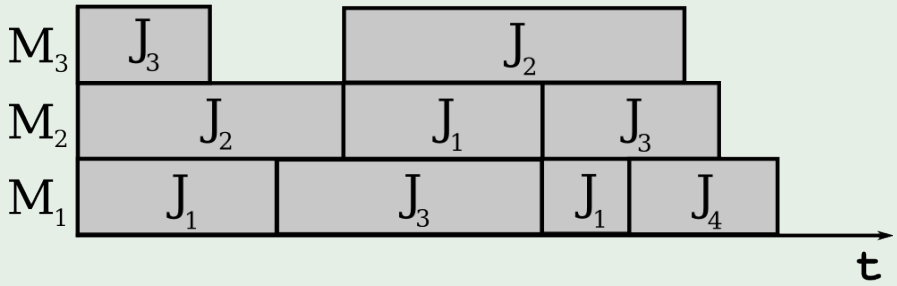


- Aufgabenorientiert:

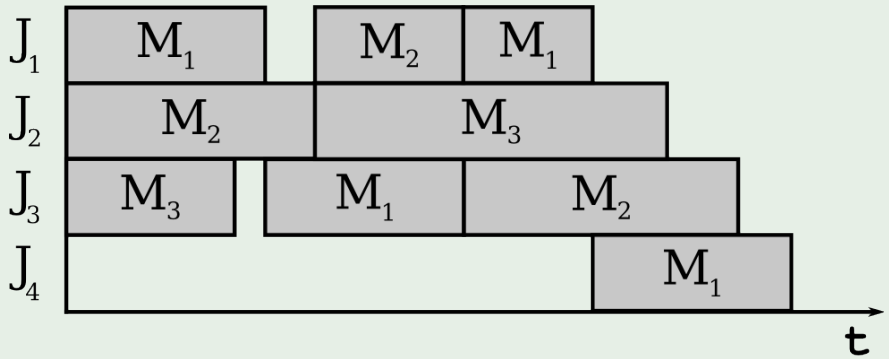
Scheduling Beispiele

Beispiele (Scheduling)

- Gantt charts zur Visualisierung eines Schedules
- Maschinenorientiert:



- Aufgabenorientiert:



Scheduling und lineare Programme

Integer Programm zu Lösung des Scheduling-Problems

Definition (Scheduling Integer Programm (SIP))

- x_{ij} sind nm Indikatorvariablen, ob Aufgabe j auf Maschine i läuft, t ist der *Makespan*

$$\begin{aligned} \text{minimiere} \quad & t \\ \text{unter} \quad & \sum_{i \in M} x_{ij} = 1 \quad j \in J \\ & \sum_{j \in J} x_{ij} p_{ij} \leq t \quad i \in M \\ & x_{ij} \in \{0,1\} \quad i \in M, j \in J \end{aligned}$$

Scheduling und lineare Programme

Integer Programm zu Lösung des Scheduling-Problems

Definition (Scheduling Integer Programm (SIP))

- x_{ij} sind nm Indikatorvariablen, ob Aufgabe j auf Maschine i läuft, t ist der *Makespan*

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimiere} & t & \\
\text{unter} & \sum_{i \in M} x_{ij} = 1 & j \in J \\
& \sum_{j \in J} x_{ij} p_{ij} \leq t & i \in M \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} & i \in M, j \in J
\end{array}
$$

IP Scheduling Beispiel

Beispiel (IP Scheduling mit nur einem Job)

- Gegeben sei nur eine Aufgabe mit Bearbeitungsdauer m auf jeder Maschine
- SIP $\Rightarrow$ *Makespan* $= m$
- SIP Relaxation $\Rightarrow x_i = \frac{1}{m} \Rightarrow$ *Makespan* $= 1$
- Beispiel hat Integralitätslücke von $\frac{m}{1} = m$, das Problem hat unbeschränkte Integralitätslücke

IP Scheduling Beispiel

Beispiel (IP Scheduling mit nur einem Job)

- Gegeben sei nur eine Aufgabe mit Bearbeitungsdauer m auf jeder Maschine
- SIP $\Rightarrow$ $Makespan = m$
- SIP Relaxation $\Rightarrow$ $x_i = \frac{1}{m} \Rightarrow Makespan = 1$
- Beispiel hat Integralitätslücke von $\frac{m}{1} = m$, das Problem hat unbeschränkte Integralitätslücke

IP Scheduling Beispiel

Beispiel (IP Scheduling mit nur einem Job)

- Gegeben sei nur eine Aufgabe mit Bearbeitungsdauer m auf jeder Maschine
- SIP $\Rightarrow$ $Makespan = m$
- SIP Relaxation $\Rightarrow$ $x_i = \frac{1}{m} \Rightarrow Makespan = 1$
- Beispiel hat Integralitätslücke von $\frac{m}{1} = m$, das Problem hat unbeschränkte Integralitätslücke

IP Scheduling Beispiel

Beispiel (IP Scheduling mit nur einem Job)

- Gegeben sei nur eine Aufgabe mit Bearbeitungsdauer m auf jeder Maschine
- SIP $\Rightarrow$ $Makespan = m$
- SIP Relaxation $\Rightarrow$ $x_i = \frac{1}{m} \Rightarrow Makespan = 1$
- Beispiel hat Integralitätslücke von $\frac{m}{1} = m$, das Problem hat unbeschränkte Integralitätslücke

Analyste IP Relaxation

Analyse IP Relaxation

- IP setzt $x_{ij} = 0$ wenn $p_{ij} > t$
- IPR findet günstigere Lösung, da gebrochene Werte für x_{ij} erlaubt
- Mögliche Lösung: zusätzliche Bedingung

$$\forall i \in M,\ j \in J\ : \text{wenn } p_{ij} > t \text{ dann } x_{ij} = 0$$

- Aber: keine lineare Bedingung $\Rightarrow$ Verwende Parametric Pruning

Analyste IP Relaxation

Analyse IP Relaxation

- IP setzt $x_{ij} = 0$ wenn $p_{ij} > t$
- IPR findet günstigere Lösung, da gebrochene Werte für x_{ij} erlaubt
- Mögliche Lösung: zusätzliche Bedingung

$$\forall i \in M,\ j \in J\ : \text{wenn } p_{ij} > t \text{ dann } x_{ij} = 0$$

- Aber: keine lineare Bedingung $\Rightarrow$ Verwende Parametric Pruning

Analyste IP Relaxation

Analyse IP Relaxation

- IP setzt $x_{ij} = 0$ wenn $p_{ij} > t$
- IPR findet günstigere Lösung, da gebrochene Werte für x_{ij} erlaubt
- Mögliche Lösung: zusätzliche Bedingung

$$\forall i \in M,\ j \in J\ : \text{wenn}\ p_{ij} > t\ \text{dann}\ x_{ij} = 0$$

- Aber: keine lineare Bedingung $\Rightarrow$ Verwende Parametric Pruning

Analyste IP Relaxation

Analyse IP Relaxation

- IP setzt $x_{ij} = 0$ wenn $p_{ij} > t$
- IPR findet günstigere Lösung, da gebrochene Werte für x_{ij} erlaubt
- Mögliche Lösung: zusätzliche Bedingung

$$\forall i \in M,\ j \in J\ : \text{wenn}\ p_{ij} > t\ \text{dann}\ x_{ij} = 0$$

- Aber: keine lineare Bedingung $\Rightarrow$ Verwende Parametric Pruning

Scheduling durch LP Parametric Pruning
Definition

Definition (Parametric Pruning Scheduling (PPS))

- Idee: Lasse Aufgaben-Maschinenpaare (i, j) mit $p_{ij} > T$ aus
- Parameter $T \in \mathbb{Z}^+$ ist Schätzung einer unteren Schranke des optimalen Makespans
- Definiere Menge guter Paare $S_T = \{(i, j) : p_{ij} \leq T\}$
- LP(T) ist Familie von LPs, die zulässige gebrochene Lösungen $\vec{x}$ mit *Makespan* $\leq T$ suchen:

$$\begin{aligned} &\text{existiert} && \vec{x}, \\ &\text{so dass} && \sum_{i:(i,j)\in S_T} x_{ij} = 1, && j \in J \\ & && \sum_{j:(i,j)\in S_T} x_{ij} p_{ij} \leq T, && i \in M \\ & && x_{ij} \geq 0, && (i,j) \in S_T ? \end{aligned}$$

Scheduling durch LP Parametric Pruning
Definition

Definition (Parametric Pruning Scheduling (PPS))

- Idee: Lasse Aufgaben-Maschinenpaare (i, j) mit $p_{ij} > T$ aus
- Parameter $T \in \mathbb{Z}^+$ ist Schätzung einer unteren Schranke des optimalen Makespans
- Definiere Menge guter Paare $S_T = \{(i, j) : p_{ij} \leq T\}$
- LP(T) ist Familie von LPs, die zulässige gebrochene Lösungen $\vec{x}$ mit *Makespan* $\leq T$ suchen:

$$\begin{aligned} &\text{existiert} && \vec{x}, \\ &\text{so dass} && \sum_{i:(i,j)\in S_T} x_{ij} = 1, && j \in J \\ & && \sum_{j:(i,j)\in S_T} x_{ij} p_{ij} \leq T, && i \in M \\ & && x_{ij} \geq 0, && (i,j) \in S_T ? \end{aligned}$$

Scheduling durch LP Parametric Pruning
Definition

Definition (Parametric Pruning Scheduling (PPS))

- Idee: Lasse Aufgaben-Maschinenpaare (i, j) mit $p_{ij} > T$ aus
- Parameter $T \in \mathbb{Z}^+$ ist Schätzung einer unteren Schranke des optimalen Makespans
- Definiere Menge guter Paare $S_T = \{(i, j) : p_{ij} \leq T\}$
- LP(T) ist Familie von LPs, die zulässige gebrochene Lösungen $\vec{x}$ mit *Makespan* $\leq T$ suchen:

$$\begin{aligned} &\text{existiert} && \vec{x}, \\ &\text{so dass} && \sum_{i:(i,j)\in S_T} x_{ij} = 1, && j \in J \\ & && \sum_{j:(i,j)\in S_T} x_{ij} p_{ij} \leq T, && i \in M \\ & && x_{ij} \geq 0, && (i,j) \in S_T ? \end{aligned}$$

Scheduling durch LP Parametric Pruning
Definition

Definition (Parametric Pruning Scheduling (PPS))

- Idee: Lasse Aufgaben-Maschinenpaare (i, j) mit $p_{ij} > T$ aus
- Parameter $T \in \mathbb{Z}^+$ ist Schätzung einer unteren Schranke des optimalen Makespans
- Definiere Menge guter Paare $S_T = \{(i, j) : p_{ij} \leq T\}$
- LP(T) ist Familie von LPs, die zulässige gebrochene Lösungen $\vec{x}$ mit *Makespan* $\leq T$ suchen:

$$
\begin{array}{lll}
\text{existiert} & \vec{x}, & \\
\text{so dass} & \sum_{i:(i,j)\in S_T} x_{ij} = 1, & j \in J \\
& \sum_{j:(i,j)\in S_T} x_{ij} p_{ij} \leq T, & i \in M \\
& x_{ij} \geq 0, & (i,j) \in S_T ?
\end{array}
$$

Gliederung

Extreme-Point-Lösungen
Verfahrensansatz

Verfahrensansatz

- Finde durch binäre Suche den kleinsten Wert von T, so dass LP(T) eine zulässige Lösung hat. Dieser Wert sei T^*
- T^* ist eine untere Schranke für OPT
- Algorithmus wird eine Extreme-Point-Lösung zu LP(T^*) runden, so dass $\mathit{Makespan} \leq 2T^*$
- Nützliche Eigenschaften von Extreme-Point-Lösungen werden dabei ausgenutzt

Extreme-Point-Lösungen
Verfahrensansatz

Verfahrensansatz

- Finde durch binäre Suche den kleinsten Wert von T, so dass LP(T) eine zulässige Lösung hat. Dieser Wert sei T^*
- T^* ist eine untere Schranke für OPT
- Algorithmus wird eine Extreme-Point-Lösung zu LP(T^*) runden, so dass $\mathit{Makespan} \leq 2T^*$
- Nützliche Eigenschaften von Extreme-Point-Lösungen werden dabei ausgenutzt

Extreme-Point-Lösungen
Verfahrensansatz

Verfahrensansatz

- Finde durch binäre Suche den kleinsten Wert von T, so dass LP(T) eine zulässige Lösung hat. Dieser Wert sei T^*
- T^* ist eine untere Schranke für OPT
- Algorithmus wird eine Extreme-Point-Lösung zu LP(T^*) runden, so dass *Makespan* $\leq 2T^*$
- Nützliche Eigenschaften von Extreme-Point-Lösungen werden dabei ausgenutzt

Extreme-Point-Lösungen
Verfahrensansatz

Verfahrensansatz

- Finde durch binäre Suche den kleinsten Wert von T, so dass LP(T) eine zulässige Lösung hat. Dieser Wert sei T^*
- T^* ist eine untere Schranke für OPT
- Algorithmus wird eine Extreme-Point-Lösung zu LP(T^*) runden, so dass $\textit{Makespan} \leq 2T^*$
- Nützliche Eigenschaften von Extreme-Point-Lösungen werden dabei ausgenutzt

Extreme-Point-Lösungen
Definition

Definition (Extreme-Point-Lösung (EPL))

- Eine Extreme-Point-Lösung ist eine zulässige Lösung auf einem Eckpunkt des alle zulässigen Lösungen beschreibenden Polyhedrons
- Eine EPL kann durch keine konvexe Kombination zweier unterschiedlicher zulässiger Lösungen ausgedrückt werden

Extreme-Point-Lösungen
Definition

Definition (Extreme-Point-Lösung (EPL))

- Eine Extreme-Point-Lösung ist eine zulässige Lösung auf einem Eckpunkt des alle zulässigen Lösungen beschreibenden Polyhedrons
- Eine EPL kann durch keine konvexe Kombination zweier unterschiedlicher zulässiger Lösungen ausgedrückt werden

Extreme-Point-Lösungen
Eigenschaften

Lemma (Beschränkung der Variablen einer EPL)

Jede EPL zu LP(T) hat höchstens $n + m$ Variablen ungleich Null

Beweis.

- Sei $r = |S_T|$ Anzahl Variablen durch die LP(T) definiert ist
- Satz: Eine zulässige Lösung zu LP(T) ist eine EPL, falls r (lin. unab.) Bedingungen von LP(T) auf Gleichheit gesetzt werden
- Von diesen r Bedingungen müssen mindestens $r - (n + m)$ aus der dritten Gruppe ($x_{ij} \geq 0$) sein. Setze diese Null
- $\Rightarrow$ Jede EPL zu LP(T) hat höchstens $n + m$ Variablen ungleich Null

Extreme-Point-Lösungen
Eigenschaften

Lemma (Beschränkung der Variablen einer EPL)

Jede EPL zu LP(T) hat höchstens $n + m$ Variablen ungleich Null

Beweis.

- Sei $r = |S_T|$ Anzahl Variablen durch die LP(T) definiert ist
- Satz: Eine zulässige Lösung zu LP(T) ist eine EPL, falls r (lin. unab.) Bedingungen von LP(T) auf Gleichheit gesetzt werden
- Von diesen r Bedingungen müssen mindestens $r - (n + m)$ aus der dritten Gruppe ($x_{ij} \geq 0$) sein. Setze diese Null
- $\Rightarrow$ Jede EPL zu LP(T) hat höchstens $n + m$ Variablen ungleich Null

□

Extreme-Point-Lösungen
Eigenschaften

Lemma (Beschränkung der Variablen einer EPL)

Jede EPL zu LP(T) hat höchstens $n + m$ Variablen ungleich Null

Beweis.

- Sei $r = |S_T|$ Anzahl Variablen durch die LP(T) definiert ist
- Satz: Eine zulässige Lösung zu LP(T) ist eine EPL, falls r (lin. unab.) Bedingungen von LP(T) auf Gleichheit gesetzt werden
- Von diesen r Bedingungen müssen mindestens $r - (n + m)$ aus der dritten Gruppe ($x_{ij} \geq 0$) sein. Setze diese Null
- $\Rightarrow$ Jede EPL zu LP(T) hat höchstens $n + m$ Variablen ungleich Null

□

Extreme-Point-Lösungen
Eigenschaften

Lemma (Beschränkung der Variablen einer EPL)

Jede EPL zu LP(T) hat höchstens $n + m$ Variablen ungleich Null

Beweis.

- Sei $r = |S_T|$ Anzahl Variablen durch die LP(T) definiert ist
- Satz: Eine zulässige Lösung zu LP(T) ist eine EPL, falls r (lin. unab.) Bedingungen von LP(T) auf Gleichheit gesetzt werden
- Von diesen r Bedingungen müssen mindestens $r - (n + m)$ aus der dritten Gruppe ($x_{ij} \geq 0$) sein. Setze diese Null
- $\Rightarrow$ Jede EPL zu LP(T) hat höchstens $n + m$ Variablen ungleich Null

Extreme-Point-Lösungen
Eigenschaften

Lemma (Beschränkung der Variablen einer EPL)

Jede EPL zu LP(T) hat höchstens $n + m$ Variablen ungleich Null

Beweis.

- Sei $r = |S_T|$ Anzahl Variablen durch die LP(T) definiert ist
- Satz: Eine zulässige Lösung zu LP(T) ist eine EPL, falls r (lin. unab.) Bedingungen von LP(T) auf Gleichheit gesetzt werden
- Von diesen r Bedingungen müssen mindestens $r - (n + m)$ aus der dritten Gruppe ($x_{ij} \geq 0$) sein. Setze diese Null
- $\Rightarrow$ Jede EPL zu LP(T) hat höchstens $n + m$ Variablen ungleich Null

Extreme-Point-Lösungen
Eigenschaften

Definition (Integrale und partielle Aufgaben)

Einen Aufgabe j heißt integral gesetzt, falls sie in einer Lösung $\vec{x}$ nur einer Maschine zugeordnet wird. Sonst heißt sie partiell gesetzt

Folgerung (Beschränkung der Aufgaben einer EPL)

- *Jede EPL zu LP(T) hat mindestens n − m Aufgaben integral gesetzt*
- *Jede EPL zu LP(T) hat höchstens m Aufgaben partiell gesetzt*

Universität Bielefeld

Extreme-Point-Lösungen
Eigenschaften

Definition (Integrale und partielle Aufgaben)

Einen Aufgabe *j* heißt integral gesetzt, falls sie in einer Lösung $\vec{x}$ nur einer Maschine zugeordnet wird. Sonst heißt sie partiell gesetzt

Folgerung (Beschränkung der Aufgaben einer EPL)

- *Jede EPL zu LP(T) hat mindestens $n - m$ Aufgaben integral gesetzt*
- *Jede EPL zu LP(T) hat höchstens m Aufgaben partiell gesetzt*

Extreme-Point-Lösungen
Eigenschaften

Definition (Integrale und partielle Aufgaben)

Einen Aufgabe j heißt integral gesetzt, falls sie in einer Lösung $\vec{x}$ nur einer Maschine zugeordnet wird. Sonst heißt sie partiell gesetzt

Folgerung (Beschränkung der Aufgaben einer EPL)

- *Jede EPL zu LP(T) hat mindestens $n - m$ Aufgaben integral gesetzt*
- *Jede EPL zu LP(T) hat höchstens m Aufgaben partiell gesetzt*

Extreme-Point-Lösungen
Eigenschaften

Beweis.

- Sei $\vec{x}$ eine EPL zu LP(T) und α und β die Anzahl der Aufgaben, die in $\vec{x}$ integral bzw. partiell gesetzt sind
- Jede partiell gesetzte Aufgabe wird auf mindestens zwei Maschinen ausgeführt und hat daher mindestens zwei Komponenten in $\vec{x}$ ungleich Null
- $\Rightarrow \alpha + \beta = n$ und $\alpha + 2\beta \leq n + m$
- $\Rightarrow \beta \leq m$ und $\alpha \geq n - m$

□

Extreme-Point-Lösungen
Eigenschaften

Beweis.

- Sei $\vec{x}$ eine EPL zu LP(T) und α und β die Anzahl der Aufgaben, die in $\vec{x}$ integral bzw. partiell gesetzt sind
- Jede partiell gesetzte Aufgabe wird auf mindestens zwei Maschinen ausgeführt und hat daher mindestens zwei Komponenten in $\vec{x}$ ungleich Null
- $\Rightarrow \alpha + \beta = n$ und $\alpha + 2\beta \leq n + m$
- $\Rightarrow \beta \leq m$ und $\alpha \geq n - m$

□

Extreme-Point-Lösungen
Eigenschaften

Beweis.

- Sei $\vec{x}$ eine EPL zu LP(T) und α und β die Anzahl der Aufgaben, die in $\vec{x}$ integral bzw. partiell gesetzt sind
- Jede partiell gesetzte Aufgabe wird auf mindestens zwei Maschinen ausgeführt und hat daher mindestens zwei Komponenten in $\vec{x}$ ungleich Null
- $\Rightarrow \alpha + \beta = n$ und $\alpha + 2\beta \leq n + m$
- $\Rightarrow \beta \leq m$ und $\alpha \geq n - m$

□

Universität Bielefeld

Extreme-Point-Lösungen
Eigenschaften

Beweis.

- Sei $\vec{x}$ eine EPL zu LP(T) und α und β die Anzahl der Aufgaben, die in $\vec{x}$ integral bzw. partiell gesetzt sind
- Jede partiell gesetzte Aufgabe wird auf mindestens zwei Maschinen ausgeführt und hat daher mindestens zwei Komponenten in $\vec{x}$ ungleich Null
- $\Rightarrow \alpha + \beta = n$ und $\alpha + 2\beta \leq n + m$
- $\Rightarrow \beta \leq m$ und $\alpha \geq n - m$

□

Graph einer Extreme-Point-Lösungen
Definition

Definition (Bipartiter Graph G einer EPL)

Gegeben einer EPL $\vec{x}$ zu LP(T), sei $G = (J, M, E)$ der bipartite Graph mit den Knoten $J \cup M$, so dass $(i, j) \in E$ wenn $x_{ij} \neq 0$

Definition (Untergraph H von G)

- $F \subset J$ sei die Menge der Aufgaben, die partiell in $\vec{x}$ gesetzt sind
- H sei der Untergraph von G über der Knotenmenge $F \cup M$
- (i, j) ist Kante in H, falls $0 < x_{ij} < 1$
- Ein Matching in H heißt perfektes Matching, falls jede Aufgabe $j \in F$ abgedeckt wird
- Algorithmus nutzt aus, dass H ein perfektes Matching besitzt

sität Bielefeld

Graph einer Extreme-Point-Lösungen
Definition

Definition (Bipartiter Graph G einer EPL)

Gegeben einer EPL $\vec{x}$ zu LP(T), sei $G = (J, M, E)$ der bipartite Graph mit den Knoten $J \cup M$, so dass $(i, j) \in E$ wenn $x_{ij} \neq 0$

Definition (Untergraph H von G)

- $F \subset J$ sei die Menge der Aufgaben, die partiell in $\vec{x}$ gesetzt sind
- H sei der Untergraph von G über der Knotenmenge $F \cup M$
- (i, j) ist Kante in H, falls $0 < x_{ij} < 1$
- Ein Matching in H heißt perfektes Matching, falls jede Aufgabe $j \in F$ abgedeckt wird
- Algorithmus nutzt aus, dass H ein perfektes Matching besitzt

sität Bielefeld

Graph einer Extreme-Point-Lösungen
Definition

Definition (Bipartiter Graph G einer EPL)

Gegeben einer EPL $\vec{x}$ zu LP(T), sei $G = (J, M, E)$ der bipartite Graph mit den Knoten $J \cup M$, so dass $(i, j) \in E$ wenn $x_{ij} \neq 0$

Definition (Untergraph H von G)

- $F \subset J$ sei die Menge der Aufgaben, die partiell in $\vec{x}$ gesetzt sind
- H sei der Untergraph von G über der Knotenmenge $F \cup M$
- (i, j) ist Kante in H, falls $0 < x_{ij} < 1$
- Ein Matching in H heißt perfektes Matching, falls jede Aufgabe $j \in F$ abgedeckt wird
- Algorithmus nutzt aus, dass H ein perfektes Matching besitzt

Graph einer Extreme-Point-Lösungen
Definition

Definition (Bipartiter Graph G einer EPL)

Gegeben einer EPL $\vec{x}$ zu LP(T), sei $G = (J, M, E)$ der bipartite Graph mit den Knoten $J \cup M$, so dass $(i, j) \in E$ wenn $x_{ij} \neq 0$

Definition (Untergraph H von G)

- $F \subset J$ sei die Menge der Aufgaben, die partiell in $\vec{x}$ gesetzt sind
- H sei der Untergraph von G über der Knotenmenge $F \cup M$
- (i, j) ist Kante in H, falls $0 < x_{ij} < 1$
- Ein Matching in H heißt perfektes Matching, falls jede Aufgabe $j \in F$ abgedeckt wird
- Algorithmus nutzt aus, dass H ein perfektes Matching besitzt

Graph einer Extreme-Point-Lösungen
Definition

Definition (Bipartiter Graph G einer EPL)

Gegeben einer EPL $\vec{x}$ zu LP(T), sei $G = (J, M, E)$ der bipartite Graph mit den Knoten $J \cup M$, so dass $(i, j) \in E$ wenn $x_{ij} \neq 0$

Definition (Untergraph H von G)

- $F \subset J$ sei die Menge der Aufgaben, die partiell in $\vec{x}$ gesetzt sind
- H sei der Untergraph von G über der Knotenmenge $F \cup M$
- (i, j) ist Kante in H, falls $0 < x_{ij} < 1$
- Ein Matching in H heißt perfektes Matching, falls jede Aufgabe $j \in F$ abgedeckt wird
- Algorithmus nutzt aus, dass H ein perfektes Matching besitzt

sität Bielefeld

Graph einer Extreme-Point-Lösungen
Definition

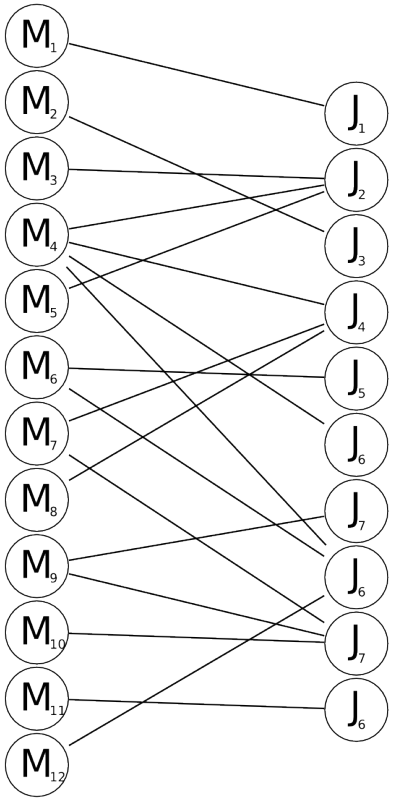
Definition (Bipartiter Graph G einer EPL)

Gegeben einer EPL $\vec{x}$ zu LP(T), sei $G = (J, M, E)$ der bipartite Graph mit den Knoten $J \cup M$, so dass $(i, j) \in E$ wenn $x_{ij} \neq 0$

Definition (Untergraph H von G)

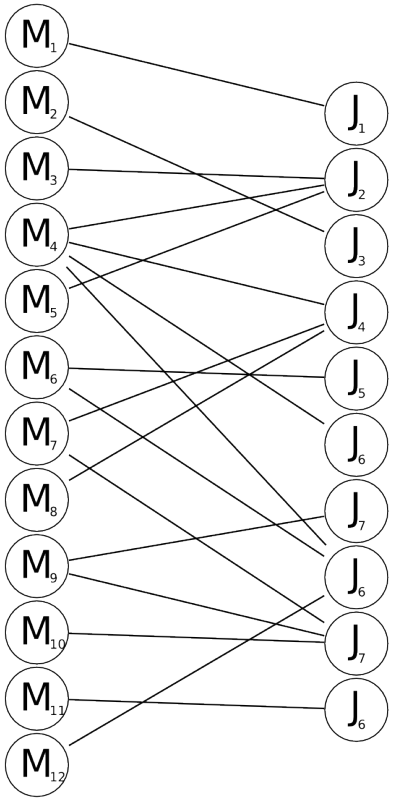
- $F \subset J$ sei die Menge der Aufgaben, die partiell in $\vec{x}$ gesetzt sind
- H sei der Untergraph von G über der Knotenmenge $F \cup M$
- (i, j) ist Kante in H, falls $0 < x_{ij} < 1$
- Ein Matching in H heißt perfektes Matching, falls jede Aufgabe $j \in F$ abgedeckt wird
- Algorithmus nutzt aus, dass H ein perfektes Matching besitzt

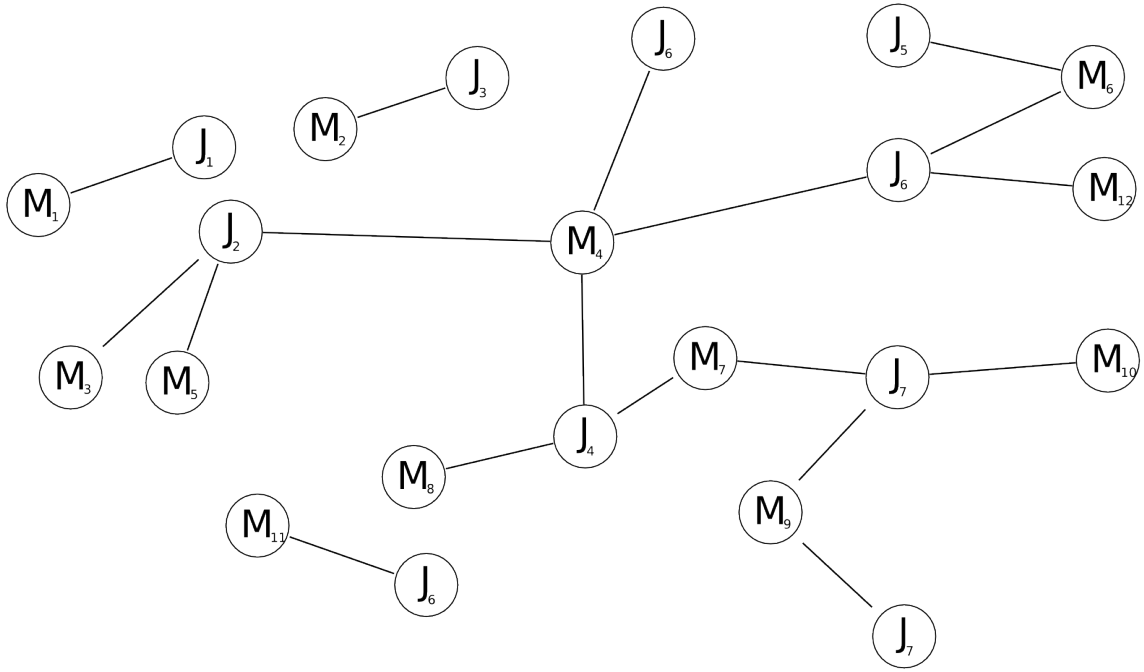
Beispiel Scheduling EPL Graphen



Bipartiter Graph *G*

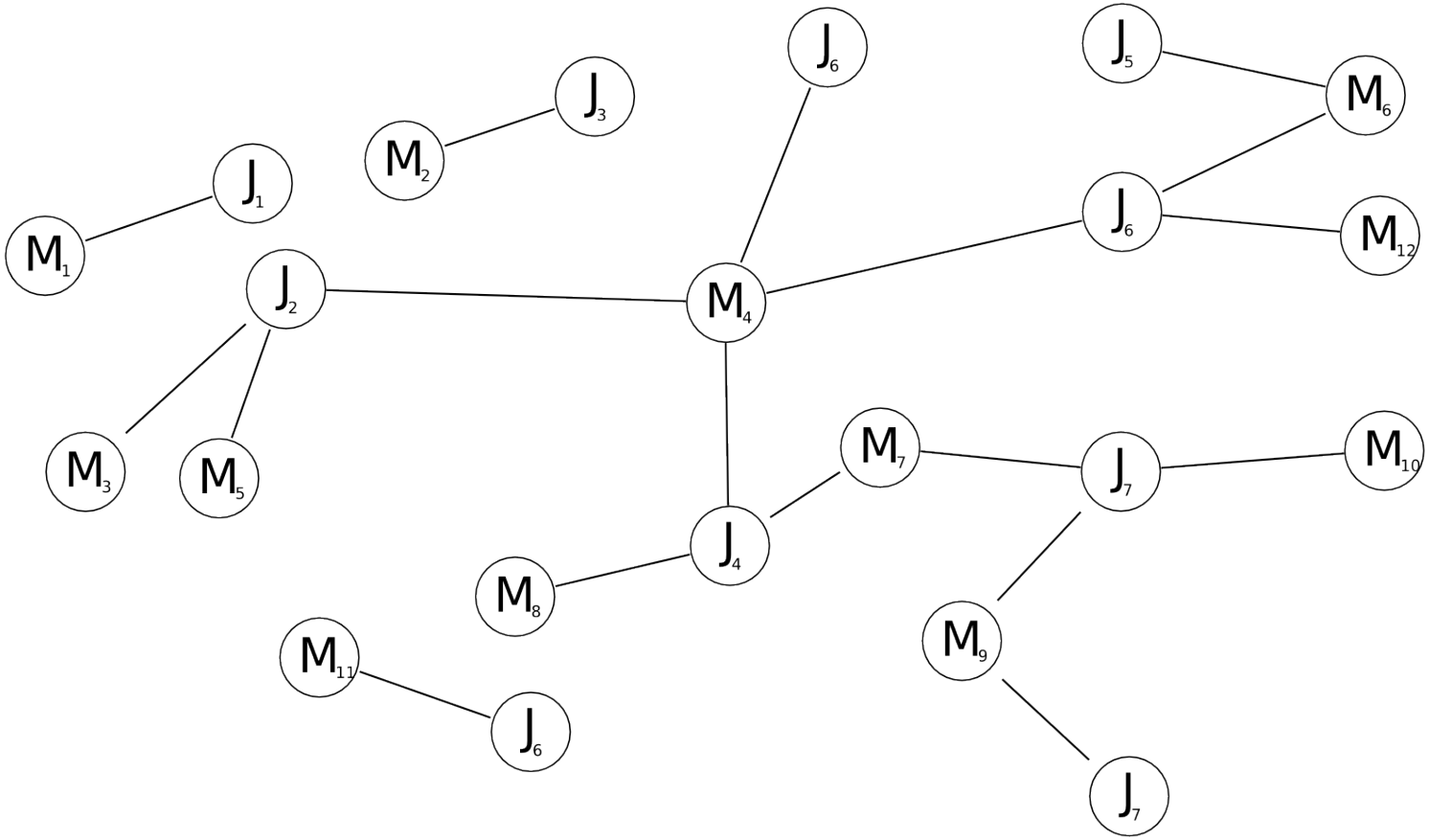
Beispiel Scheduling EPL Graphen





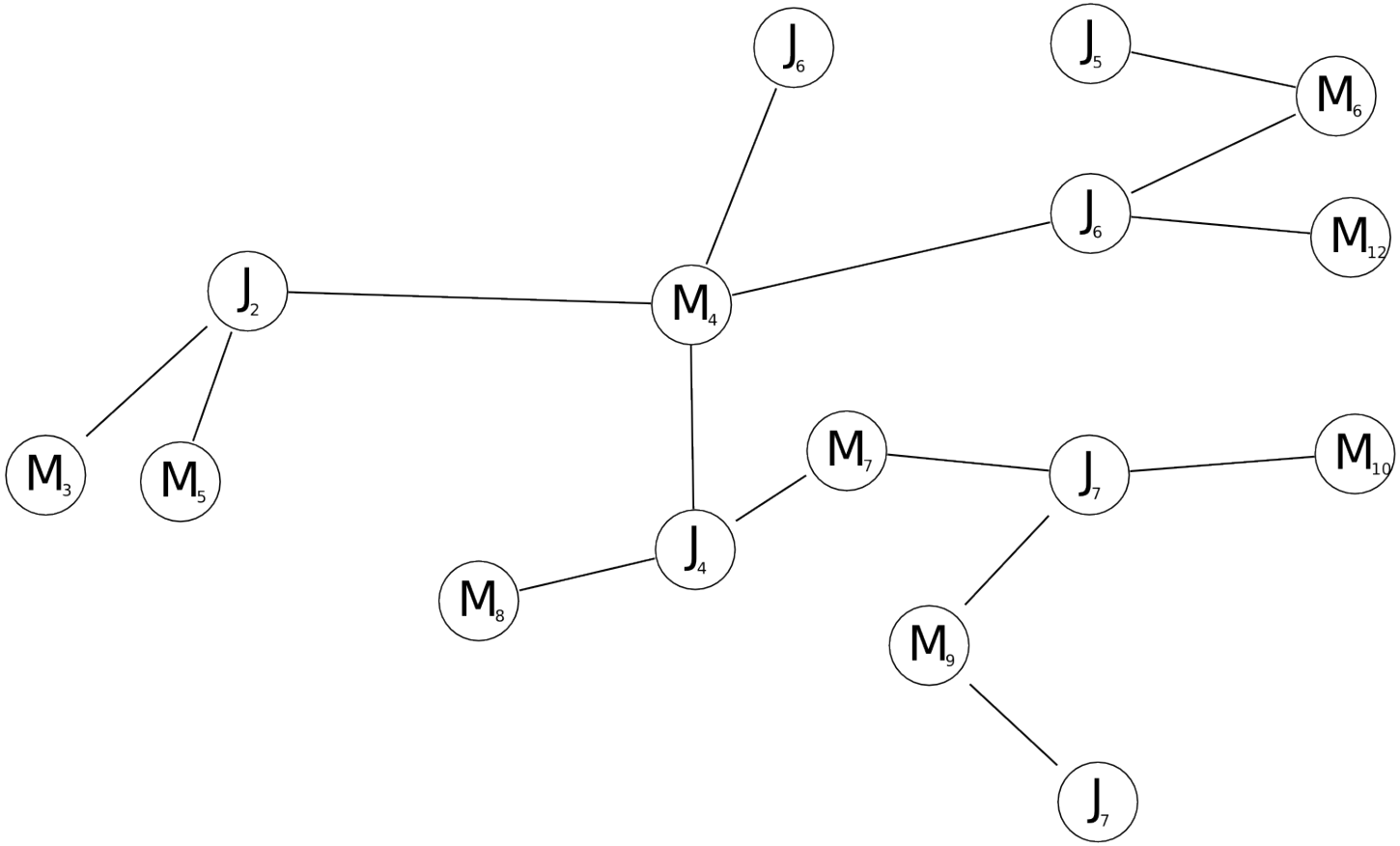
Bipartiter Graph *G*

Beispiel Scheduling EPL Graphen



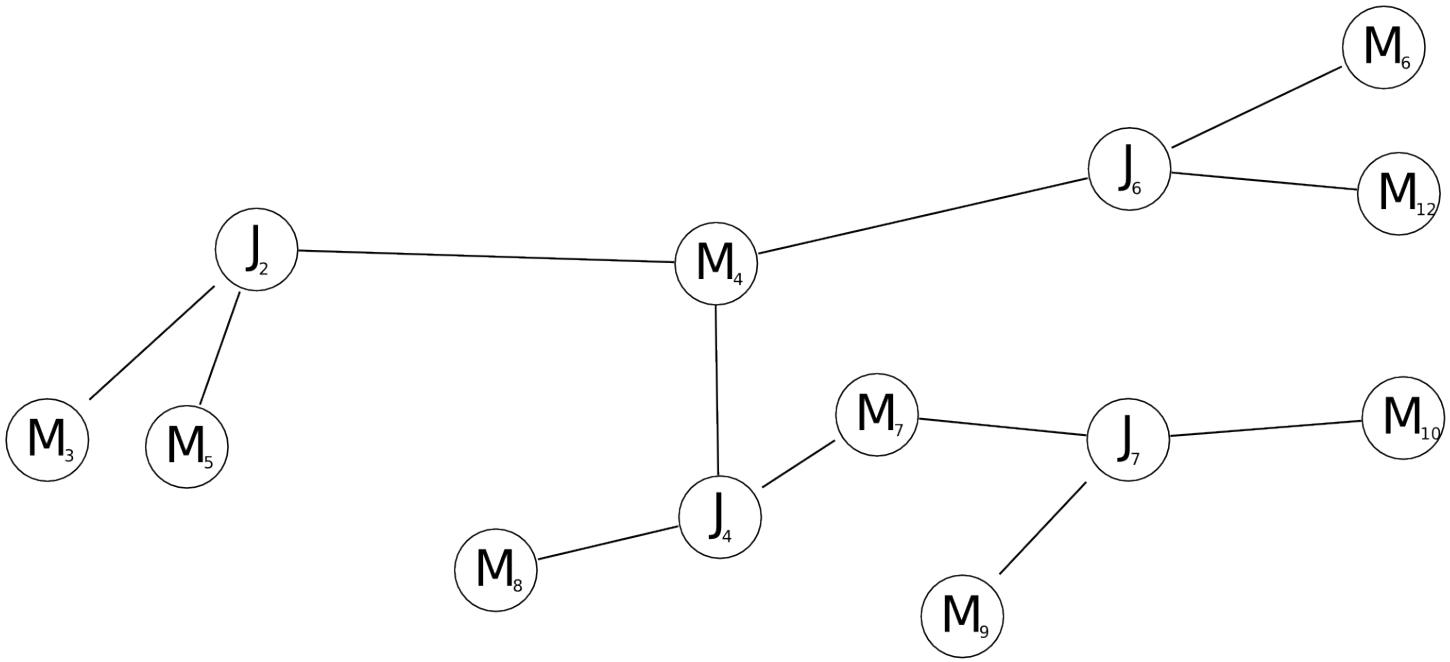
Bipartiter Graph *G*

Beispiel Scheduling EPL Graphen



Unabhängige Maschinen-Aufgabe Paare entfernt

Beispiel Scheduling EPL Graphen



Integrale Aufgaben entfernt $\Rightarrow$ Untergraph H

Pseudo-Bäume und Pseudo-Wälder
Definitionen

Definition (Pseudo-Baum)

- Ein zusammenhängender Graph V heißt Pseudo-Baum, wenn er maximal $|V|$ Kanten enthält
- Da V zusammenhängend ist, hat er mindestens $|V| - 1$ Kanten $\Rightarrow$ er ist entweder ein Baum oder ein Baum plus einer Kante
- Im Zweiten Fall hat er einen eindeutigen Zyklus

Definition (Pseudo-Wald)

Ein Graph V heißt Pseudo-Wald, wenn all seine zusammenhängenden Komponenten Pseudo-Bäume sind

Pseudo-Bäume und Pseudo-Wälder
Definitionen

Definition (Pseudo-Baum)

- Ein zusammenhängender Graph V heißt Pseudo-Baum, wenn er maximal $|V|$ Kanten enthält
- Da V zusammenhängend ist, hat er mindestens $|V| - 1$ Kanten $\Rightarrow$ er ist entweder ein Baum oder ein Baum plus einer Kante
- Im Zweiten Fall hat er einen eindeutigen Zyklus

Definition (Pseudo-Wald)

Ein Graph V heißt Pseudo-Wald, wenn all seine zusammenhängenden Komponenten Pseudo-Bäume sind

Pseudo-Bäume und Pseudo-Wälder

Definitionen

Definition (Pseudo-Baum)

- Ein zusammenhängender Graph V heißt Pseudo-Baum, wenn er maximal $|V|$ Kanten enthält
- Da V zusammenhängend ist, hat er mindestens $|V| - 1$ Kanten $\Rightarrow$ er ist entweder ein Baum oder ein Baum plus einer Kante
- Im Zweiten Fall hat er einen eindeutigen Zyklus

Definition (Pseudo-Wald)

Ein Graph V heißt Pseudo-Wald, wenn all seine zusammenhängenden Komponenten Pseudo-Bäume sind

Pseudo-Bäume und Pseudo-Wälder
Definitionen

Definition (Pseudo-Baum)

- Ein zusammenhängender Graph V heißt Pseudo-Baum, wenn er maximal $|V|$ Kanten enthält
- Da V zusammenhängend ist, hat er mindestens $|V| - 1$ Kanten $\Rightarrow$ er ist entweder ein Baum oder ein Baum plus einer Kante
- Im Zweiten Fall hat er einen eindeutigen Zyklus

Definition (Pseudo-Wald)

Ein Graph V heißt Pseudo-Wald, wenn all seine zusammenhängenden Komponenten Pseudo-Bäume sind

EPL Graphen
Eigenschaften

Lemma (Struktur von G)

Der zu einer EPL gehörende Graph G ist ein Pseudo-Wald

Beweis.

- Idee: Zeige, dass Anzahl an Kanten jeder zusammenhängender Komponente G_i von G nach oben durch Anzahl an Knoten beschränkt ist
  $\Rightarrow$ Jede zusammenhängende Komponente ist ein Pseudo-Baum
- Betrachte G_c. Beschränke LP(T) und die EPL $\vec{x}$ auf die in G_c enthaltenen Maschinen und Aufgaben zu LP$_c$(T) und $\vec{x_c}$
- $\vec{x_c}$ sei der Rest von $\vec{x}$. Beobachte, dass $\vec{x_c}$ eine EPL zu LP$_c$(T) sein muss
- B.d.W.: Wenn $\vec{x_c}$ keine EPL zu LP$_c$(T) ist, dann ist $\vec{x_c}$ konvexe Kombination zweier unterschiedlicher zulässiger Lösungen zu LP$_c$(T)
- Jede der beiden Lösungen sind zusammen mit $\vec{x}_{\bar{c}}$ eine zulässige Lösung zu LP(T)
- D.h.: $\vec{x}$ ist konvexe Kombination zweier unterschiedlicher zulässiger Lösungen zu LP(T) $\Rightarrow$ $\lightning$ Widerspruch
- Aus Anwendung des Lemmas „Beschränkung der Variablen einer EPL“ folgt, dass G_c ein Pseudo-Baum ist

EPL Graphen
Eigenschaften

Lemma (Struktur von G)

Der zu einer EPL gehörende Graph G ist ein Pseudo-Wald

Beweis.

- Idee: Zeige, dass Anzahl an Kanten jeder zusammenhängender Komponente G_i von G nach oben durch Anzahl an Knoten beschränkt ist
  $\Rightarrow$ Jede zusammenhängende Komponente ist ein Pseudo-Baum
- Betrachte G_c. Beschränke LP(T) und die EPL $\vec{x}$ auf die in G_c enthaltenen Maschinen und Aufgaben zu LP$_c$(T) und $\vec{x_c}$
- $\vec{\bar{x}_c}$ sei der Rest von $\vec{x}$. Beobachte, dass $\vec{x_c}$ eine EPL zu LP$_c$(T) sein muss
- B.d.W.: Wenn $\vec{x_c}$ keine EPL zu LP$_c$(T) ist, dann ist $\vec{x_c}$ konvexe Kombination zweier unterschiedlicher zulässiger Lösungen zu LP$_c$(T)
- Jede der beiden Lösungen sind zusammen mit $\vec{\bar{x}_c}$ eine zulässige Lösung zu LP(T)
- D.h.: $\vec{x}$ ist konvexe Kombination zweier unterschiedlicher zulässiger Lösungen zu LP(T) $\Rightarrow$ $\lightning$ Widerspruch
- Aus Anwendung des Lemmas „Beschränkung der Variablen einer EPL“ folgt, dass G_c ein Pseudo-Baum ist

□

EPL Graphen
Eigenschaften

Lemma (Struktur von G)

Der zu einer EPL gehörende Graph G ist ein Pseudo-Wald

Beweis.

- Idee: Zeige, dass Anzahl an Kanten jeder zusammenhängender Komponente G_i von G nach oben durch Anzahl an Knoten beschränkt ist
  $\Rightarrow$ Jede zusammenhängende Komponente ist ein Pseudo-Baum
- Betrachte G_c. Beschränke LP(T) und die EPL $\vec{x}$ auf die in G_c enthaltenen Maschinen und Aufgaben zu LP$_c$(T) und $\vec{x_c}$
- $\vec{\bar{x}_c}$ sei der Rest von $\vec{x}$. Beobachte, dass $\vec{x_c}$ eine EPL zu LP$_c$(T) sein muss
- B.d.W.: Wenn $\vec{x_c}$ keine EPL zu LP$_c$(T) ist, dann ist $\vec{x_c}$ konvexe Kombination zweier unterschiedlicher zulässiger Lösungen zu LP$_c$(T)
- Jede der beiden Lösungen sind zusammen mit $\vec{\bar{x}_c}$ eine zulässige Lösung zu LP(T)
- D.h.: $\vec{x}$ ist konvexe Kombination zweier unterschiedlicher zulässiger Lösungen zu LP(T) $\Rightarrow$ $\lightning$ Widerspruch
- Aus Anwendung des Lemmas „Beschränkung der Variablen einer EPL“ folgt, dass G_c ein Pseudo-Baum ist

□

EPL Graphen
Eigenschaften

Lemma (Struktur von G)

Der zu einer EPL gehörende Graph G ist ein Pseudo-Wald

Beweis.

- Idee: Zeige, dass Anzahl an Kanten jeder zusammenhängender Komponente G_i von G nach oben durch Anzahl an Knoten beschränkt ist
  $\Rightarrow$ Jede zusammenhängende Komponente ist ein Pseudo-Baum
- Betrachte G_c. Beschränke LP(T) und die EPL $\vec{x}$ auf die in G_c enthaltenen Maschinen und Aufgaben zu LP$_c$(T) und $\vec{x_c}$
- $\vec{\bar{x}_c}$ sei der Rest von $\vec{x}$. Beobachte, dass $\vec{x_c}$ eine EPL zu LP$_c$(T) sein muss
- B.d.W.: Wenn $\vec{x_c}$ keine EPL zu LP$_c$(T) ist, dann ist $\vec{x_c}$ konvexe Kombination zweier unterschiedlicher zulässiger Lösungen zu LP$_c$(T)
- Jede der beiden Lösungen sind zusammen mit $\vec{\bar{x}_c}$ eine zulässige Lösung zu LP(T)
- D.h.: $\vec{x}$ ist konvexe Kombination zweier unterschiedlicher zulässiger Lösungen zu LP(T) $\Rightarrow$ ↯ Widerspruch
- Aus Anwendung des Lemmas „Beschränkung der Variablen einer EPL“ folgt, dass G_c ein Pseudo-Baum ist

□

EPL Graphen
Eigenschaften

Lemma (Struktur von G)

Der zu einer EPL gehörende Graph G ist ein Pseudo-Wald

Beweis.

- Idee: Zeige, dass Anzahl an Kanten jeder zusammenhängender Komponente G_i von G nach oben durch Anzahl an Knoten beschränkt ist
  $\Rightarrow$ Jede zusammenhängende Komponente ist ein Pseudo-Baum
- Betrachte G_c. Beschränke LP(T) und die EPL $\vec{x}$ auf die in G_c enthaltenen Maschinen und Aufgaben zu LP$_c$(T) und $\vec{x_c}$
- $\vec{\bar{x}_c}$ sei der Rest von $\vec{x}$. Beobachte, dass $\vec{x_c}$ eine EPL zu LP$_c$(T) sein muss
- B.d.W.: Wenn $\vec{x_c}$ keine EPL zu LP$_c$(T) ist, dann ist $\vec{x_c}$ konvexe Kombination zweier unterschiedlicher zulässiger Lösungen zu LP$_c$(T)
- Jede der beiden Lösungen sind zusammen mit $\vec{\bar{x}_c}$ eine zulässige Lösung zu LP(T)
- D.h.: $\vec{x}$ ist konvexe Kombination zweier unterschiedlicher zulässiger Lösungen zu LP(T) $\Rightarrow$ ↯ Widerspruch
- Aus Anwendung des Lemmas „Beschränkung der Variablen einer EPL“ folgt, dass G_c ein Pseudo-Baum ist

□

EPL Graphen
Eigenschaften

Lemma (Struktur von G)

Der zu einer EPL gehörende Graph G ist ein Pseudo-Wald

Beweis.

- Idee: Zeige, dass Anzahl an Kanten jeder zusammenhängender Komponente G_i von G nach oben durch Anzahl an Knoten beschränkt ist
  $\Rightarrow$ Jede zusammenhängende Komponente ist ein Pseudo-Baum
- Betrachte G_c. Beschränke LP(T) und die EPL $\vec{x}$ auf die in G_c enthaltenen Maschinen und Aufgaben zu LP$_c$(T) und $\vec{x_c}$
- $\vec{\bar{x}_c}$ sei der Rest von $\vec{x}$. Beobachte, dass $\vec{x_c}$ eine EPL zu LP$_c$(T) sein muss
- B.d.W.: Wenn $\vec{x_c}$ keine EPL zu LP$_c$(T) ist, dann ist $\vec{x_c}$ konvexe Kombination zweier unterschiedlicher zulässiger Lösungen zu LP$_c$(T)
- Jede der beiden Lösungen sind zusammen mit $\vec{\bar{x}_c}$ eine zulässige Lösung zu LP(T)
- D.h.: $\vec{x}$ ist konvexe Kombination zweier unterschiedlicher zulässiger Lösungen zu LP(T) $\Rightarrow$ $\lightning$ Widerspruch
- Aus Anwendung des Lemmas „Beschränkung der Variablen einer EPL“ folgt, dass G_c ein Pseudo-Baum ist

□

EPL Graphen
Eigenschaften

Lemma (Struktur von G)

Der zu einer EPL gehörende Graph G ist ein Pseudo-Wald

Beweis.

- Idee: Zeige, dass Anzahl an Kanten jeder zusammenhängender Komponente G_i von G nach oben durch Anzahl an Knoten beschränkt ist
  $\Rightarrow$ Jede zusammenhängende Komponente ist ein Pseudo-Baum
- Betrachte G_c. Beschränke LP(T) und die EPL $\vec{x}$ auf die in G_c enthaltenen Maschinen und Aufgaben zu LP$_c$(T) und $\vec{x_c}$
- $\bar{\vec{x_c}}$ sei der Rest von $\vec{x}$. Beobachte, dass $\vec{x_c}$ eine EPL zu LP$_c$(T) sein muss
- B.d.W.: Wenn $\vec{x_c}$ keine EPL zu LP$_c$(T) ist, dann ist $\vec{x_c}$ konvexe Kombination zweier unterschiedlicher zulässiger Lösungen zu LP$_c$(T)
- Jede der beiden Lösungen sind zusammen mit $\bar{\vec{x_c}}$ eine zulässige Lösung zu LP(T)
- D.h.: $\vec{x}$ ist konvexe Kombination zweier unterschiedlicher zulässiger Lösungen zu LP(T) $\Rightarrow$ ↯ Widerspruch
- Aus Anwendung des Lemmas „Beschränkung der Variablen einer EPL“ folgt, dass G_c ein Pseudo-Baum ist

□

EPL Graphen
Eigenschaften

Lemma (Struktur von G)

Der zu einer EPL gehörende Graph G ist ein Pseudo-Wald

Beweis.

- Idee: Zeige, dass Anzahl an Kanten jeder zusammenhängender Komponente G_i von G nach oben durch Anzahl an Knoten beschränkt ist
  $\Rightarrow$ Jede zusammenhängende Komponente ist ein Pseudo-Baum
- Betrachte G_c. Beschränke LP(T) und die EPL $\vec{x}$ auf die in G_c enthaltenen Maschinen und Aufgaben zu LP$_c$(T) und $\vec{x_c}$
- $\bar{\vec{x_c}}$ sei der Rest von $\vec{x}$. Beobachte, dass $\vec{x_c}$ eine EPL zu LP$_c$(T) sein muss
- B.d.W.: Wenn $\vec{x_c}$ keine EPL zu LP$_c$(T) ist, dann ist $\vec{x_c}$ konvexe Kombination zweier unterschiedlicher zulässiger Lösungen zu LP$_c$(T)
- Jede der beiden Lösungen sind zusammen mit $\bar{\vec{x_c}}$ eine zulässige Lösung zu LP(T)
- D.h.: $\vec{x}$ ist konvexe Kombination zweier unterschiedlicher zulässiger Lösungen zu LP(T) $\Rightarrow$ ↯ Widerspruch
- Aus Anwendung des Lemmas „Beschränkung der Variablen einer EPL“ folgt, dass G_c ein Pseudo-Baum ist

□

EPL Graphen
Eigenschaften

Lemma (Matching von H)

Der Graph H zu einer EPL besitzt ein perfektes Matching

Beweis.

Perfektes Matching Prozedur

1. Jede integral in $\vec{x}$ gesetzte Aufgabe hat nur eine einfallende Kante. Entferne beide $\Rightarrow$ Untergraph H. Da gleiche Anzahl von Kanten und Knoten entfernt wurde ist H ebenfalls ein Pseudo-Wald
2. Jede Aufgabe hat mindestens Grad 2 $\Rightarrow$ Alle Blätter müssen Maschinen sein. Matche jeweils Blatt mit der zugehöriger Aufgabe und entferne beide (In jedem Schritt müssen Blätter Maschinen sein)
3. Übrig bleiben gleichmäßige Zyklen. Matching von gegenüberliegenden Kanten jedes Zyklus gibt einen perfektes Matching

EPL Graphen
Eigenschaften

Lemma (Matching von *H*)

Der Graph H zu einer EPL besitzt ein perfektes Matching

Beweis.

Perfektes Matching Prozedur

1. Jede integral in $\vec{x}$ gesetzte Aufgabe hat nur eine einfallende Kante. Entferne beide $\Rightarrow$ Untergraph H. Da gleiche Anzahl von Kanten und Knoten entfernt wurde ist H ebenfalls ein Pseudo-Wald
2. Jede Aufgabe hat mindestens Grad 2 $\Rightarrow$ Alle Blätter müssen Maschinen sein. Matche jeweils Blatt mit der zugehöriger Aufgabe und entferne beide (In jedem Schritt müssen Blätter Maschinen sein)
3. Übrig bleiben gleichmäßige Zyklen. Matching von gegenüberliegenden Kanten jedes Zyklus gibt einen perfektes Matching

□

EPL Graphen
Eigenschaften

Lemma (Matching von *H*)

Der Graph H zu einer EPL besitzt ein perfektes Matching

Beweis.

Perfektes Matching Prozedur

1. Jede integral in $\vec{x}$ gesetzte Aufgabe hat nur eine einfallende Kante. Entferne beide $\Rightarrow$ Untergraph H. Da gleiche Anzahl von Kanten und Knoten entfernt wurde ist H ebenfalls ein Pseudo-Wald
2. Jede Aufgabe hat mindestens Grad 2 $\Rightarrow$ Alle Blätter müssen Maschinen sein. Matche jeweils Blatt mit der zugehöriger Aufgabe und entferne beide (In jedem Schritt müssen Blätter Maschinen sein)
3. Übrig bleiben gleichmäßige Zyklen. Matching von gegenüberliegenden Kanten jedes Zyklus gibt einen perfektes Matching

□

EPL Graphen
Eigenschaften

Lemma (Matching von *H*)

Der Graph H zu einer EPL besitzt ein perfektes Matching

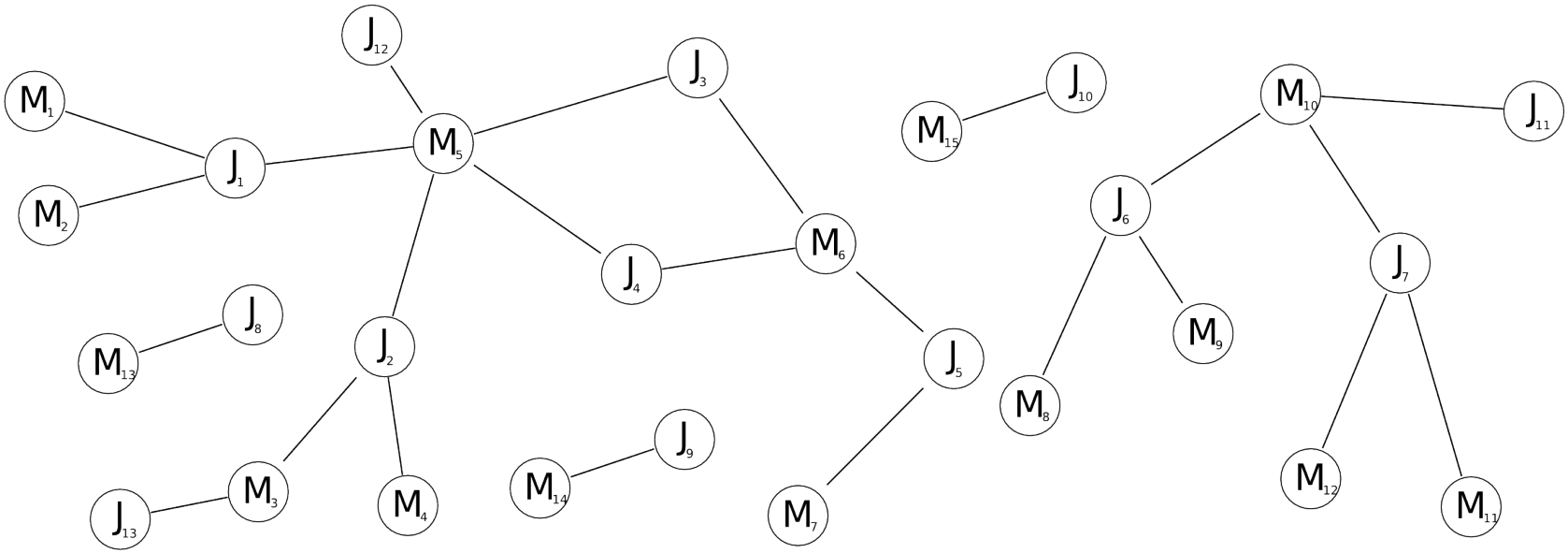
Beweis.

Perfektes Matching Prozedur

1. Jede integral in $\vec{x}$ gesetzte Aufgabe hat nur eine einfallende Kante. Entferne beide $\Rightarrow$ Untergraph H. Da gleiche Anzahl von Kanten und Knoten entfernt wurde ist H ebenfalls ein Pseudo-Wald
2. Jede Aufgabe hat mindestens Grad 2 $\Rightarrow$ Alle Blätter müssen Maschinen sein. Matche jeweils Blatt mit der zugehöriger Aufgabe und entferne beide (In jedem Schritt müssen Blätter Maschinen sein)
3. Übrig bleiben gleichmäßige Zyklen. Matching von gegenüberliegenden Kanten jedes Zyklus gibt einen perfektes Matching

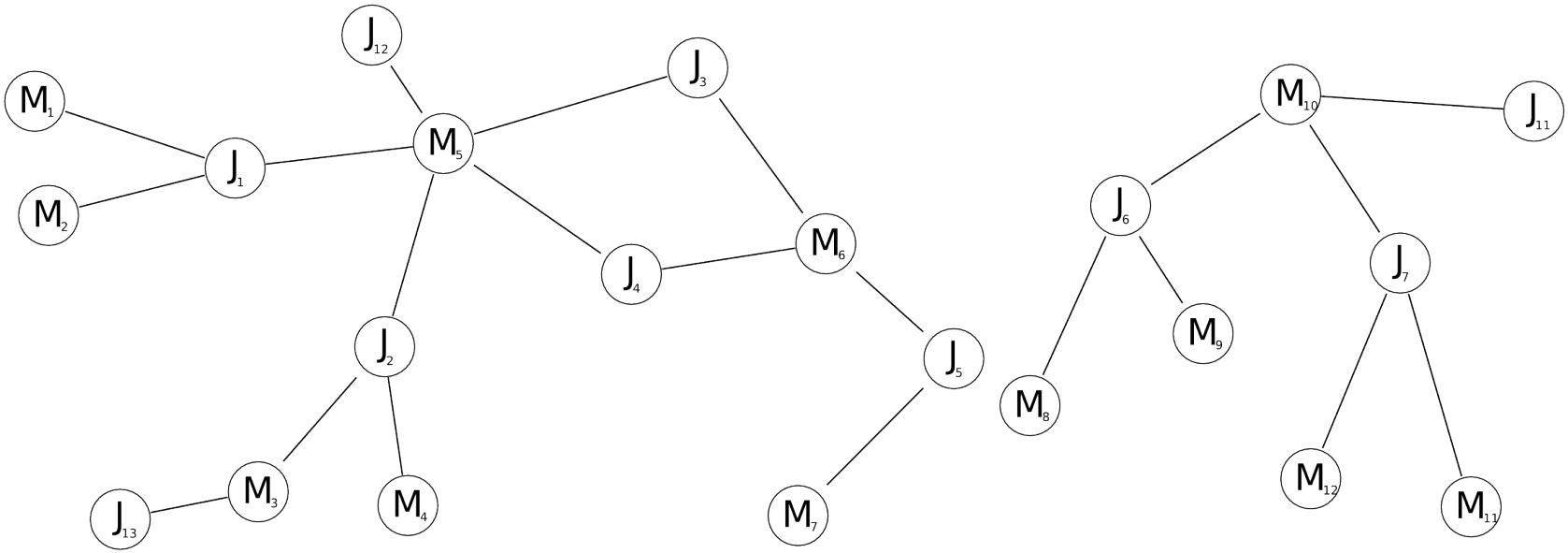
□

Perfektes Matching Prozedur



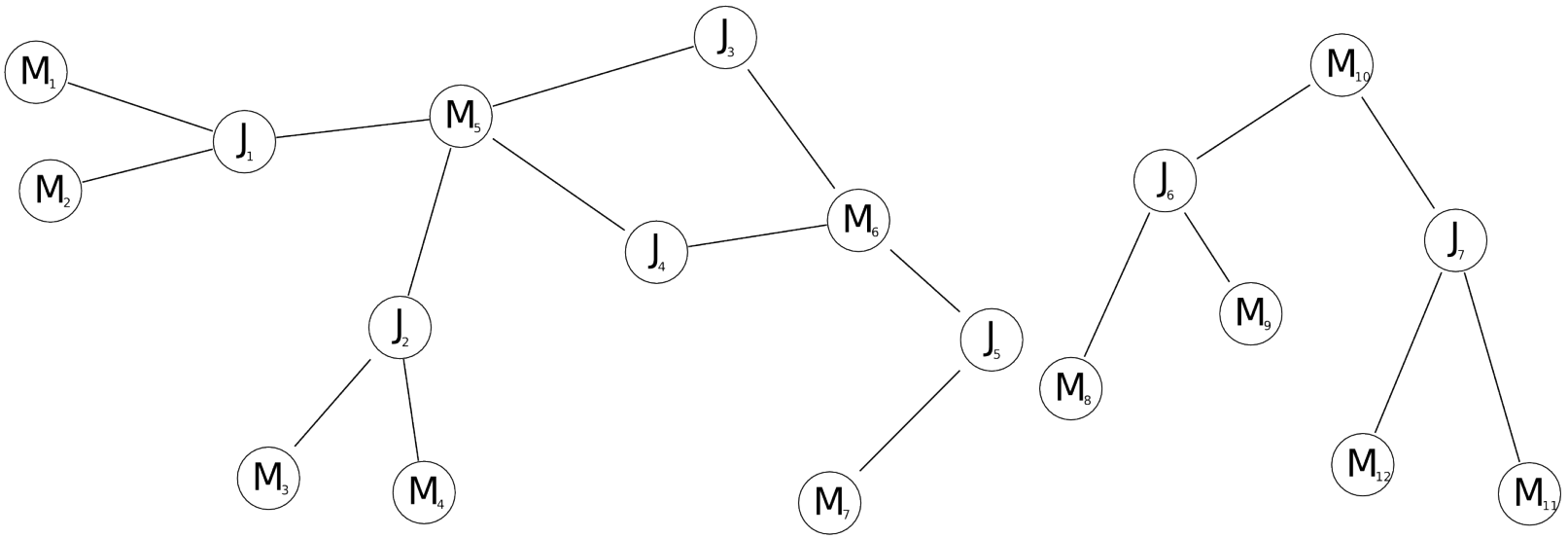
Bipartiter Graph *G*

Perfektes Matching Prozedur



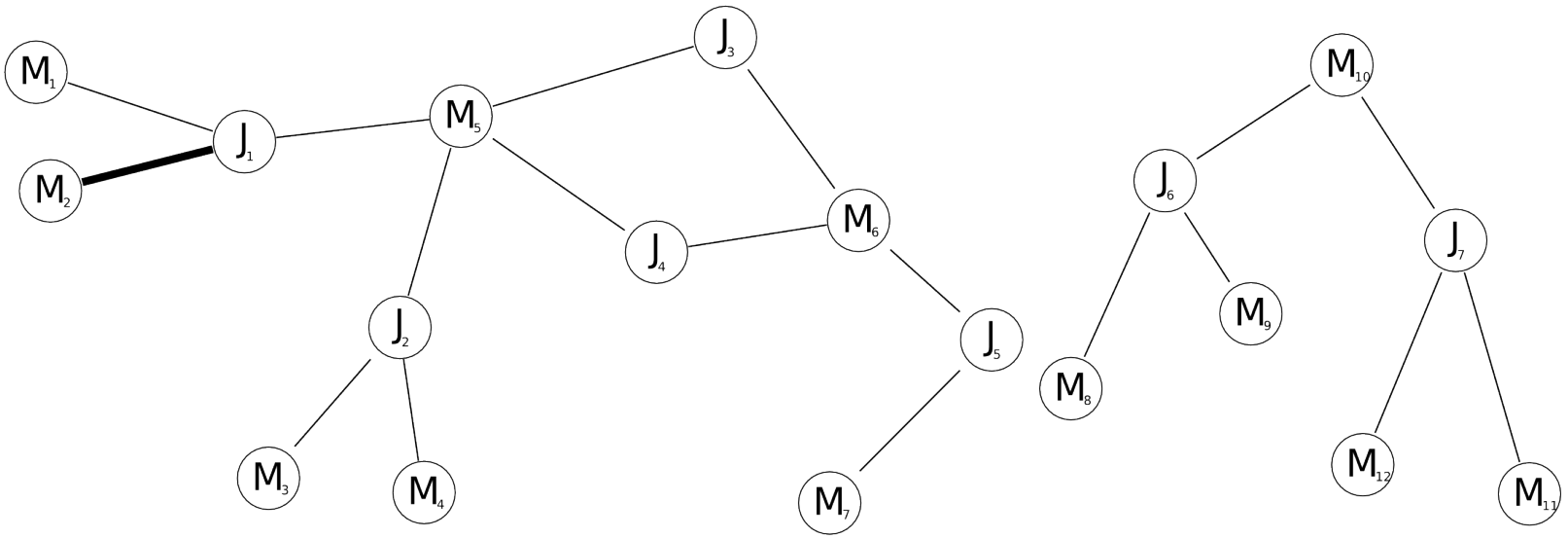
Unabhängige Maschinen-Aufgabe Paare entfernt

Perfektes Matching Prozedur



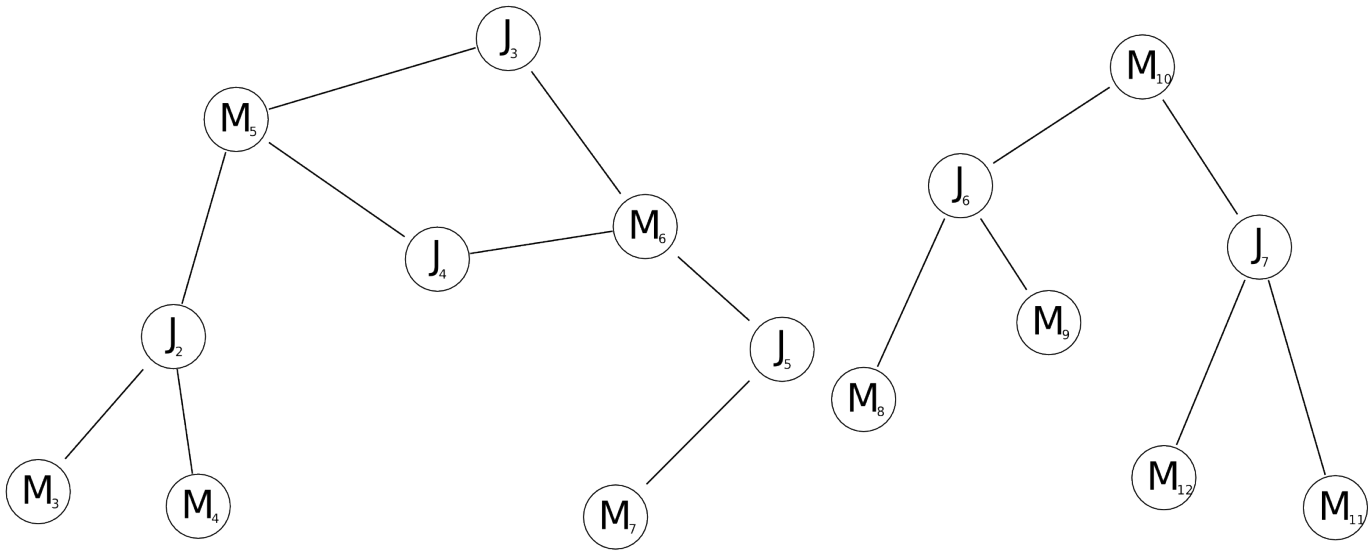
Integrale Aufgaben entfernt $\Rightarrow$ Graph H (Pseudo-Wald)

Perfektes Matching Prozedur



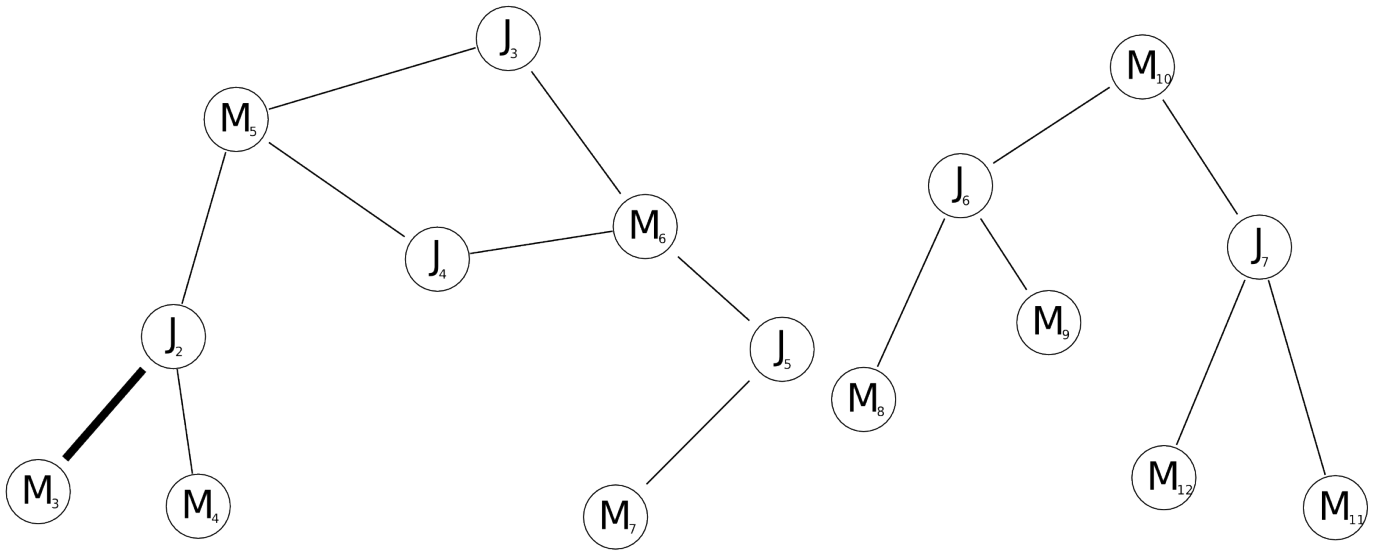
Matche Blätter mit Aufgaben und entferne beide

Perfektes Matching Prozedur



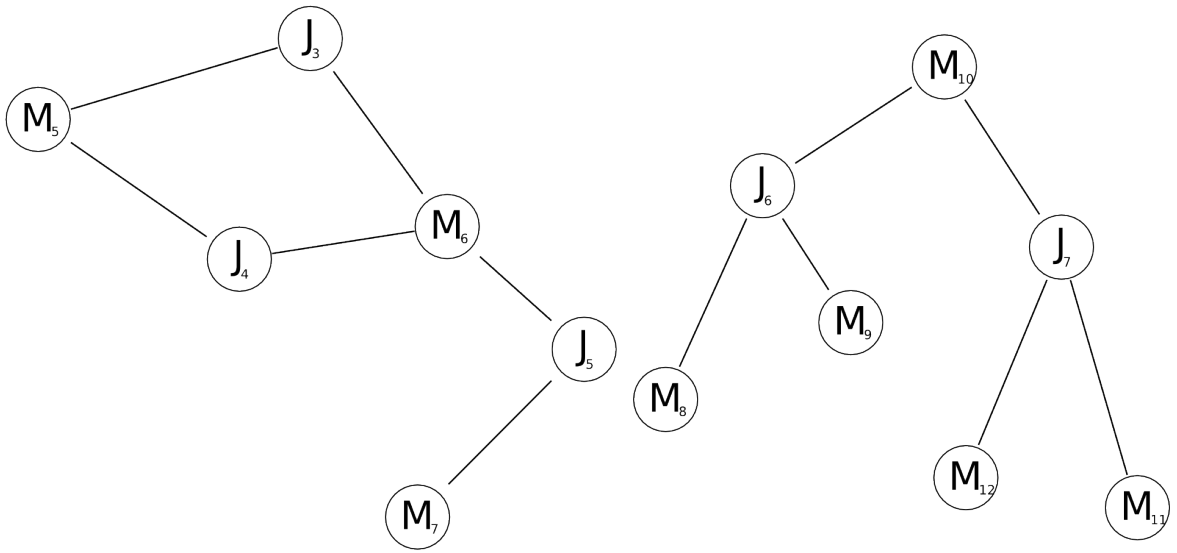
Matche Blätter mit Aufgaben und entferne beide

Perfektes Matching Prozedur



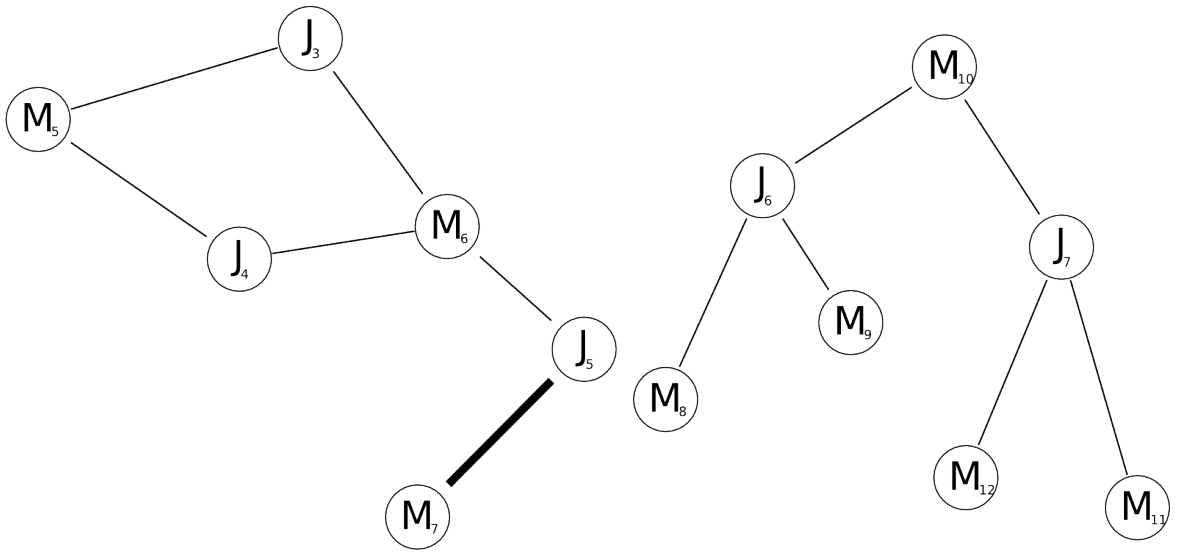
Matche Blätter mit Aufgaben und entferne beide

Perfektes Matching Prozedur



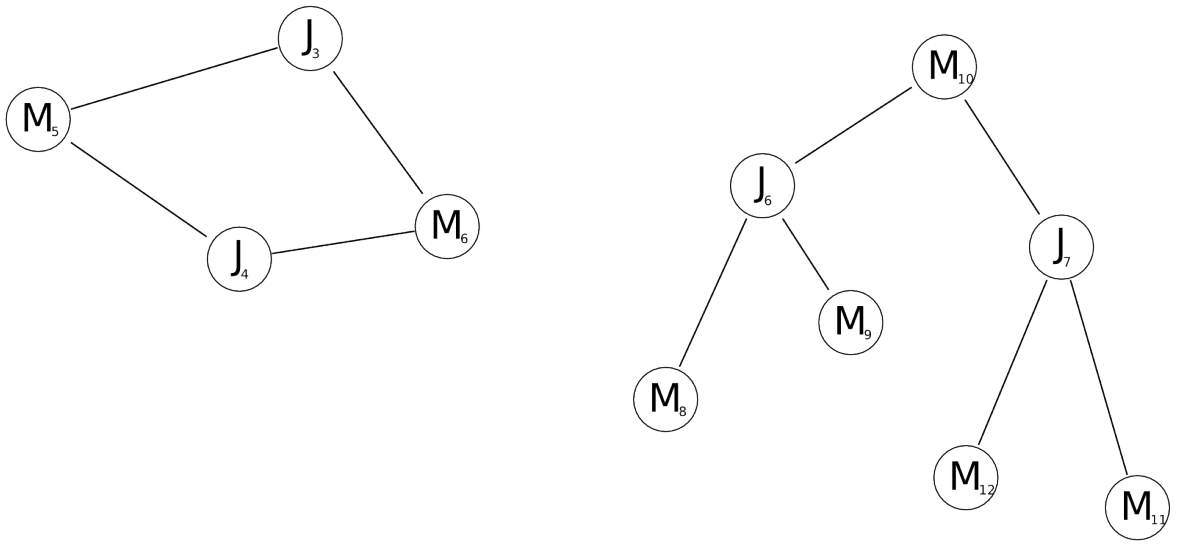
Matche Blätter mit Aufgaben und entferne beide

Perfektes Matching Prozedur



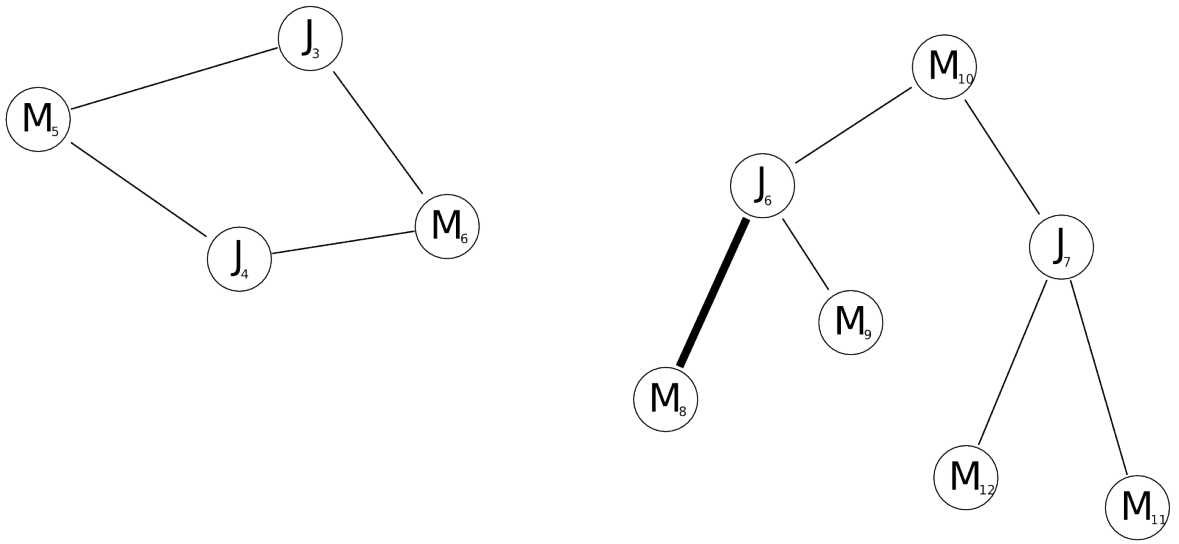
Matche Blätter mit Aufgaben und entferne beide

Perfektes Matching Prozedur



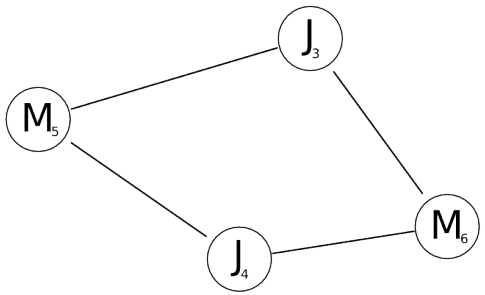
Matche Blätter mit Aufgaben und entferne beide

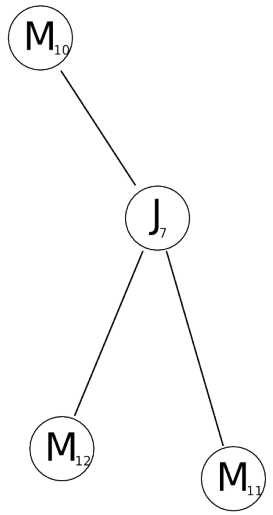
Perfektes Matching Prozedur



Matche Blätter mit Aufgaben und entferne beide

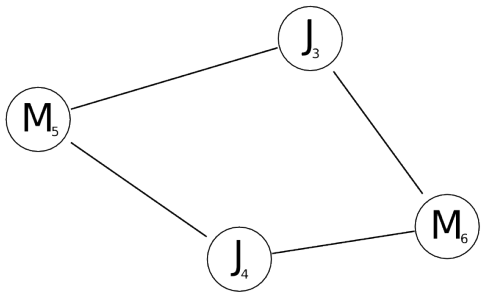
Perfektes Matching Prozedur

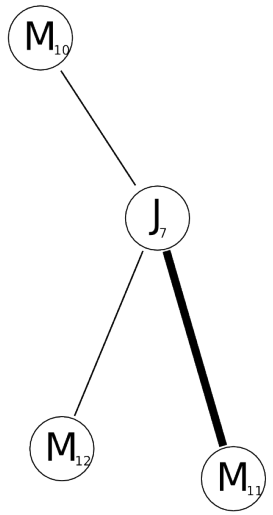




Matche Blätter mit Aufgaben und entferne beide

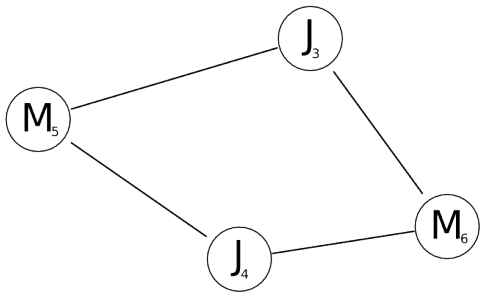
Perfektes Matching Prozedur





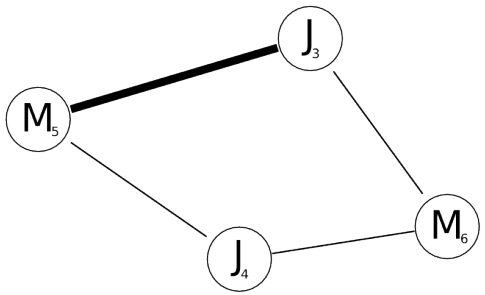
Matche Blätter mit Aufgaben und entferne beide

Perfektes Matching Prozedur



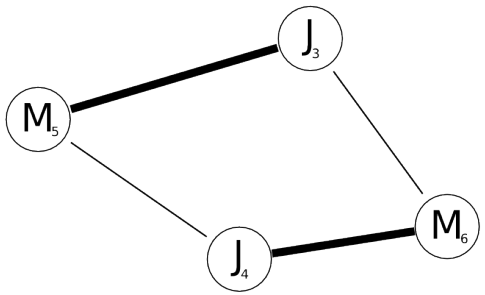
Resultierende gleichmäßige Zyklen von H

Perfektes Matching Prozedur



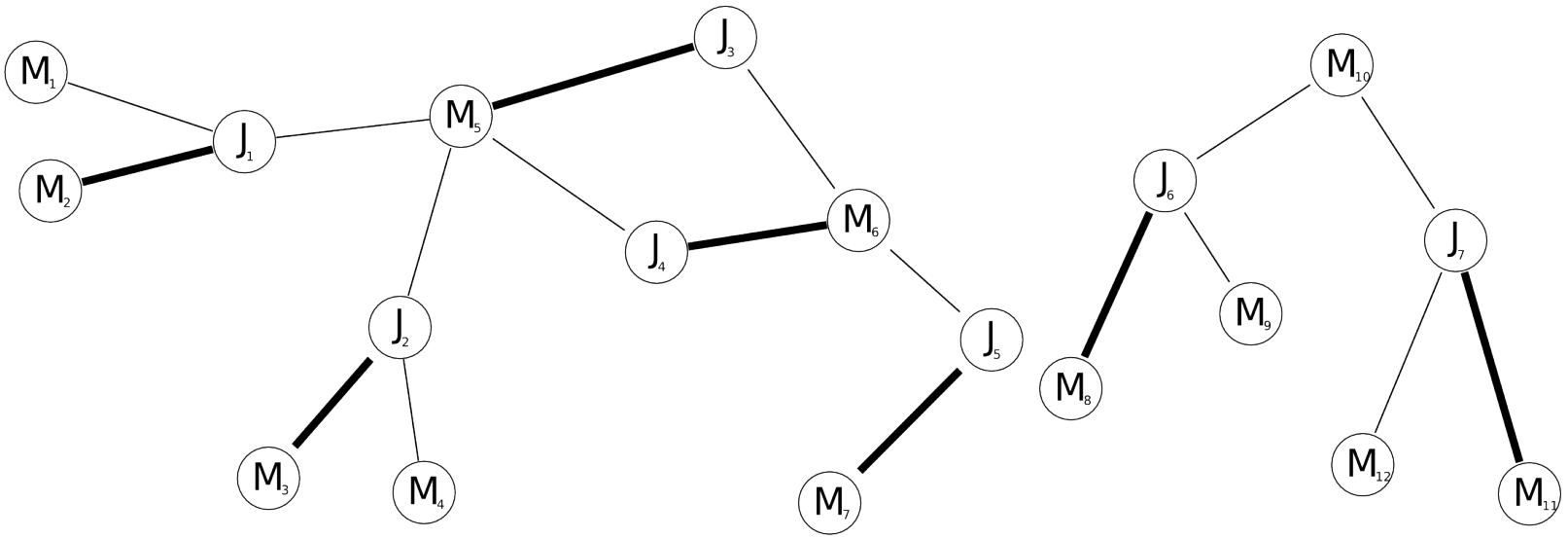
Matche gegenüberliegende Kanten der Zyklen

Perfektes Matching Prozedur



Matche gegenüberliegende Kanten der Zyklen

Perfektes Matching Prozedur



Perfektes Matching von H

Gliederung

Scheduling Approximation Algorithmus

Algorithmus Initialisierung

Suche Bereich der Werte T durch Berechnung des *Makespans* α der Greedy Suche $\Rightarrow$ Suchintervall: $[\frac{\alpha}{m}, \alpha]$

Algorithmus: Scheduling auf unverbundenen parallelen Maschinen

1. Sucher per Binäre-Suche den kleinsten Wert $T^* \in \mathbb{Z}^+$, für den LP(T) eine zulässige Lösung besitzt
2. Finde eine EPL $\vec{x}$ zu LP(T^*)
3. Weise Maschinen alle integralen Aufgaben $\vec{x}$ zufolge zu
4. Erzeuge Graph H und und finde perfektes Matching M in H (durch Perfektes Matching Prozedur)
5. Weise Maschinen die partiellen Aufgaben Matching M zufolge zu

Scheduling Approximation Algorithmus

Algorithmus Initialisierung

Suche Bereich der Werte T durch Berechnung des *Makespans* α der Greedy Suche $\Rightarrow$ Suchintervall: $[\frac{\alpha}{m}, \alpha]$

Algorithmus: Scheduling auf unverbundenen parallelen Maschinen

1. Sucher per Binäre-Suche den kleinsten Wert $T^* \in \mathbb{Z}^+$, für den LP(T) eine zulässige Lösung besitzt
2. Finde eine EPL $\vec{x}$ zu LP(T^*)
3. Weise Maschinen alle integralen Aufgaben $\vec{x}$ zufolge zu
4. Erzeuge Graph H und und finde perfektes Matching M in H (durch Perfektes Matching Prozedur)
5. Weise Maschinen die partiellen Aufgaben Matching M zufolge zu

Scheduling Approximation Algorithmus

Algorithmus Initialisierung

Suche Bereich der Werte T durch Berechnung des *Makespans* α der Greedy Suche $\Rightarrow$ Suchintervall: $[\frac{\alpha}{m}, \alpha]$

Algorithmus: Scheduling auf unverbundenen parallelen Maschinen

1. Sucher per Binäre-Suche den kleinsten Wert $T^* \in \mathbb{Z}^+$, für den LP(T) eine zulässige Lösung besitzt
2. Finde eine EPL $\vec{x}$ zu LP(T^*)
3. Weise Maschinen alle integralen Aufgaben $\vec{x}$ zufolge zu
4. Erzeuge Graph H und und finde perfektes Matching M in H (durch Perfektes Matching Prozedur)
5. Weise Maschinen die partiellen Aufgaben Matching M zufolge zu

Scheduling Approximation Algorithmus

Algorithmus Initialisierung

Suche Bereich der Werte T durch Berechnung des *Makespans* α der Greedy Suche $\Rightarrow$ Suchintervall: $[\frac{\alpha}{m}, \alpha]$

Algorithmus: Scheduling auf unverbundenen parallelen Maschinen

1. Sucher per Binäre-Suche den kleinsten Wert $T^* \in \mathbb{Z}^+$, für den LP(T) eine zulässige Lösung besitzt
2. Finde eine EPL $\vec{x}$ zu LP(T^*)
3. Weise Maschinen alle integralen Aufgaben $\vec{x}$ zufolge zu
4. Erzeuge Graph H und und finde perfektes Matching M in H (durch Perfektes Matching Prozedur)
5. Weise Maschinen die partiellen Aufgaben Matching M zufolge zu

Scheduling Approximation Algorithmus

Algorithmus Initialisierung

Suche Bereich der Werte T durch Berechnung des *Makespans* α der Greedy Suche $\Rightarrow$ Suchintervall: $[\frac{\alpha}{m}, \alpha]$

Algorithmus: Scheduling auf unverbundenen parallelen Maschinen

1. Sucher per Binäre-Suche den kleinsten Wert $T^* \in \mathbb{Z}^+$, für den LP(T) eine zulässige Lösung besitzt
2. Finde eine EPL $\vec{x}$ zu LP(T^*)
3. Weise Maschinen alle integralen Aufgaben $\vec{x}$ zufolge zu
4. Erzeuge Graph H und und finde perfektes Matching M in H (durch Perfektes Matching Prozedur)
5. Weise Maschinen die partiellen Aufgaben Matching M zufolge zu

Scheduling Approximation Algorithmus

Algorithmus Initialisierung

Suche Bereich der Werte T durch Berechnung des *Makespans* α der Greedy Suche $\Rightarrow$ Suchintervall: $[\frac{\alpha}{m}, \alpha]$

Algorithmus: Scheduling auf unverbundenen parallelen Maschinen

1. Sucher per Binäre-Suche den kleinsten Wert $T^* \in \mathbb{Z}^+$, für den LP(T) eine zulässige Lösung besitzt
2. Finde eine EPL $\vec{x}$ zu LP(T^*)
3. Weise Maschinen alle integralen Aufgaben $\vec{x}$ zufolge zu
4. Erzeuge Graph H und und finde perfektes Matching M in H (durch Perfektes Matching Prozedur)
5. Weise Maschinen die partiellen Aufgaben Matching M zufolge zu

Scheduling Approximation Algorithmus

Algorithmus Initialisierung

Suche Bereich der Werte T durch Berechnung des *Makespans* α der Greedy Suche $\Rightarrow$ Suchintervall: $[\frac{\alpha}{m}, \alpha]$

Algorithmus: Scheduling auf unverbundenen parallelen Maschinen

1. Sucher per Binäre-Suche den kleinsten Wert $T^* \in \mathbb{Z}^+$, für den LP(T) eine zulässige Lösung besitzt
2. Finde eine EPL $\vec{x}$ zu LP(T^*)
3. Weise Maschinen alle integralen Aufgaben $\vec{x}$ zufolge zu
4. Erzeuge Graph H und und finde perfektes Matching M in H (durch Perfektes Matching Prozedur)
5. Weise Maschinen die partiellen Aufgaben Matching M zufolge zu

Approximationsgarantie des Algorithmus

Satz (Approximationsgarantie des Algorithmus)

Der Algorithmus erreicht eine Approximationsgarantie von Faktor 2 für das Problem Scheduling auf unverbundenen parallelen Maschinen

Beweis.

- $T^* \leq \text{OPT}$, da LP(OPT) eine zulässige Lösung besitzt
- Die EPL $\vec{x}$ zu LP(T^*) hat einen partiellen *Makespan* $\leq T^*$
- Daher hat die Beschränkung auf integrale Aufgaben in $\vec{x}$ einen (integralen) *Makespan* $\leq T^*$
- Jede Kante (i, j) von H genügt $p_{ij} \leq T^*$. Das perfekte Matching von H teilt höchstens eine zusätzliche Aufgabe pro Maschine zu
- $\Rightarrow$ Gesamte *Makespan* $\leq 2T^* \leq 2\,\text{OPT}$
- Der Algorithmus läuft in polynomieller Zeit

□

Approximationsgarantie des Algorithmus

Satz (Approximationsgarantie des Algorithmus)

Der Algorithmus erreicht eine Approximationsgarantie von Faktor 2 für das Problem Scheduling auf unverbundenen parallelen Maschinen

Beweis.

- $T^* \leq$ OPT, da LP(OPT) eine zulässige Lösung besitzt
- Die EPL $\vec{x}$ zu LP(T^*) hat einen partiellen *Makespan* $\leq T^*$
- Daher hat die Beschränkung auf integrale Aufgaben in $\vec{x}$ einen (integralen) *Makespan* $\leq T^*$
- Jede Kante (i, j) von H genügt $p_{ij} \leq T^*$. Das perfekte Matching von H teilt höchstens eine zusätzliche Aufgabe pro Maschine zu
- $\Rightarrow$ Gesamte *Makespan* $\leq 2T^* \leq 2$ OPT
- Der Algorithmus läuft in polynomieller Zeit

□

Approximationsgarantie des Algorithmus

Satz (Approximationsgarantie des Algorithmus)

Der Algorithmus erreicht eine Approximationsgarantie von Faktor 2 für das Problem Scheduling auf unverbundenen parallelen Maschinen

Beweis.

- $T^* \leq$ OPT, da LP(OPT) eine zulässige Lösung besitzt
- Die EPL $\vec{x}$ zu LP(T^*) hat einen partiellen *Makespan* $\leq T^*$
- Daher hat die Beschränkung auf integrale Aufgaben in $\vec{x}$ einen (integralen) *Makespan* $\leq T^*$
- Jede Kante (i, j) von H genügt $p_{ij} \leq T^*$. Das perfekte Matching von H teilt höchstens eine zusätzliche Aufgabe pro Maschine zu
- $\Rightarrow$ Gesamte *Makespan* $\leq 2T^* \leq 2$ OPT
- Der Algorithmus läuft in polynomieller Zeit

□

Approximationsgarantie des Algorithmus

Satz (Approximationsgarantie des Algorithmus)

Der Algorithmus erreicht eine Approximationsgarantie von Faktor 2 für das Problem Scheduling auf unverbundenen parallelen Maschinen

Beweis.

- $T^* \leq$ OPT, da LP(OPT) eine zulässige Lösung besitzt
- Die EPL $\vec{x}$ zu LP(T^*) hat einen partiellen *Makespan* $\leq T^*$
- Daher hat die Beschränkung auf integrale Aufgaben in $\vec{x}$ einen (integralen) *Makespan* $\leq T^*$
- Jede Kante (i, j) von H genügt $p_{ij} \leq T^*$. Das perfekte Matching von H teilt höchstens eine zusätzliche Aufgabe pro Maschine zu
- $\Rightarrow$ Gesamte *Makespan* $\leq 2T^* \leq 2$ OPT
- Der Algorithmus läuft in polynomieller Zeit

□

Approximationsgarantie des Algorithmus

Satz (Approximationsgarantie des Algorithmus)

Der Algorithmus erreicht eine Approximationsgarantie von Faktor 2 für das Problem Scheduling auf unverbundenen parallelen Maschinen

Beweis.

- $T^* \leq$ OPT, da LP(OPT) eine zulässige Lösung besitzt
- Die EPL $\vec{x}$ zu LP(T^*) hat einen partiellen *Makespan* $\leq T^*$
- Daher hat die Beschränkung auf integrale Aufgaben in $\vec{x}$ einen (integralen) *Makespan* $\leq T^*$
- Jede Kante (i, j) von H genügt $p_{ij} \leq T^*$. Das perfekte Matching von H teilt höchstens eine zusätzliche Aufgabe pro Maschine zu
- $\Rightarrow$ Gesamte *Makespan* $\leq 2T^* \leq 2$ OPT
- Der Algorithmus läuft in polynomieller Zeit

□

Approximationsgarantie des Algorithmus

Satz (Approximationsgarantie des Algorithmus)

Der Algorithmus erreicht eine Approximationsgarantie von Faktor 2 für das Problem Scheduling auf unverbundenen parallelen Maschinen

Beweis.

- $T^* \leq$ OPT, da LP(OPT) eine zulässige Lösung besitzt
- Die EPL $\vec{x}$ zu LP(T^*) hat einen partiellen *Makespan* $\leq T^*$
- Daher hat die Beschränkung auf integrale Aufgaben in $\vec{x}$ einen (integralen) *Makespan* $\leq T^*$
- Jede Kante (i, j) von H genügt $p_{ij} \leq T^*$. Das perfekte Matching von H teilt höchstens eine zusätzliche Aufgabe pro Maschine zu
- $\Rightarrow$ Gesamte *Makespan* $\leq 2T^* \leq 2$ OPT
- Der Algorithmus läuft in polynomieller Zeit

□

Approximationsgarantie des Algorithmus

Satz (Approximationsgarantie des Algorithmus)

Der Algorithmus erreicht eine Approximationsgarantie von Faktor 2 für das Problem Scheduling auf unverbundenen parallelen Maschinen

Beweis.

- $T^* \leq$ OPT, da LP(OPT) eine zulässige Lösung besitzt
- Die EPL $\vec{x}$ zu LP(T^*) hat einen partiellen *Makespan* $\leq T^*$
- Daher hat die Beschränkung auf integrale Aufgaben in $\vec{x}$ einen (integralen) *Makespan* $\leq T^*$
- Jede Kante (i, j) von H genügt $p_{ij} \leq T^*$. Das perfekte Matching von H teilt höchstens eine zusätzliche Aufgabe pro Maschine zu
- $\Rightarrow$ Gesamte *Makespan* $\leq 2T^* \leq 2$ OPT
- Der Algorithmus läuft in polynomieller Zeit

□

Abschliessendes Beispiel

Beispiel

- Definiere Familie von Problemen, deren Instanz m aus $m^2 - m + 1$ Aufgaben, die auf m Maschinen gesetzt werden sollen, besteht
- Erste Aufgabe hat Bearbeitungszeit m auf allen Maschinen, alle anderen haben Einheits–Bearbeitungszeit
- Optimaler Schedule setzt erste Aufgabe auf eine Maschine und verteilt jeweils m der restliche Aufgaben auf übrige $m - 1$ Maschinen
- $\Rightarrow$ *Makespan* $= m$. Ausserdem hat LP(T) keine zulässige Lösung für $T < m$
- Angenommen es wird die EPL zu LP(m) gewählt, die $\frac{1}{m}$ der ersten Aufgabe und $m - 1$ andere Aufgaben jeder der m Maschinen zuweißt
- $\Rightarrow$ Der Algorithmus rundet eine Lösung mit *Makespan* $= 2m - 1$

sität Bielefeld

Abschliessendes Beispiel

Beispiel

- Definiere Familie von Problemen, deren Instanz m aus $m^2 - m + 1$ Aufgaben, die auf m Maschinen gesetzt werden sollen, besteht
- Erste Aufgabe hat Bearbeitungszeit m auf allen Maschinen, alle anderen haben Einheits–Bearbeitungszeit
- Optimaler Schedule setzt erste Aufgabe auf eine Maschine und verteilt jeweils m der restliche Aufgaben auf übrige $m - 1$ Maschinen
- $\Rightarrow$ *Makespan* $= m$. Ausserdem hat LP(T) keine zulässige Lösung für $T < m$
- Angenommen es wird die EPL zu LP(m) gewählt, die $\frac{1}{m}$ der ersten Aufgabe und $m - 1$ andere Aufgaben jeder der m Maschinen zuweißt
- $\Rightarrow$ Der Algorithmus rundet eine Lösung mit *Makespan* $= 2m - 1$

sität Bielefeld

Abschliessendes Beispiel

Beispiel

- Definiere Familie von Problemen, deren Instanz m aus $m^2 - m + 1$ Aufgaben, die auf m Maschinen gesetzt werden sollen, besteht
- Erste Aufgabe hat Bearbeitungszeit m auf allen Maschinen, alle anderen haben Einheits–Bearbeitungszeit
- Optimaler Schedule setzt erste Aufgabe auf eine Maschine und verteilt jeweils m der restliche Aufgaben auf übrige $m - 1$ Maschinen
- $\Rightarrow$ *Makespan* $= m$. Ausserdem hat LP(T) keine zulässige Lösung für $T < m$
- Angenommen es wird die EPL zu LP(m) gewählt, die $\frac{1}{m}$ der ersten Aufgabe und $m - 1$ andere Aufgaben jeder der m Maschinen zuweißt
- $\Rightarrow$ Der Algorithmus rundet eine Lösung mit *Makespan* $= 2m - 1$

sität Bielefeld

Abschliessendes Beispiel

Beispiel

- Definiere Familie von Problemen, deren Instanz m aus $m^2 - m + 1$ Aufgaben, die auf m Maschinen gesetzt werden sollen, besteht
- Erste Aufgabe hat Bearbeitungszeit m auf allen Maschinen, alle anderen haben Einheits–Bearbeitungszeit
- Optimaler Schedule setzt erste Aufgabe auf eine Maschine und verteilt jeweils m der restliche Aufgaben auf übrige $m - 1$ Maschinen
- $\Rightarrow$ *Makespan* $= m$. Ausserdem hat LP(T) keine zulässige Lösung für $T < m$
- Angenommen es wird die EPL zu LP(m) gewählt, die $\frac{1}{m}$ der ersten Aufgabe und $m - 1$ andere Aufgaben jeder der m Maschinen zuweißt
- $\Rightarrow$ Der Algorithmus rundet eine Lösung mit *Makespan* $= 2m - 1$

sität Bielefeld

Abschliessendes Beispiel

Beispiel

- Definiere Familie von Problemen, deren Instanz m aus $m^2 - m + 1$ Aufgaben, die auf m Maschinen gesetzt werden sollen, besteht
- Erste Aufgabe hat Bearbeitungszeit m auf allen Maschinen, alle anderen haben Einheits–Bearbeitungszeit
- Optimaler Schedule setzt erste Aufgabe auf eine Maschine und verteilt jeweils m der restliche Aufgaben auf übrige $m - 1$ Maschinen
- $\Rightarrow$ *Makespan* $= m$. Ausserdem hat LP(T) keine zulässige Lösung für $T < m$
- Angenommen es wird die EPL zu LP(m) gewählt, die $\frac{1}{m}$ der ersten Aufgabe und $m - 1$ andere Aufgaben jeder der m Maschinen zuweißt
- $\Rightarrow$ Der Algorithmus rundet eine Lösung mit *Makespan* $= 2m - 1$

sität Bielefeld

Abschliessendes Beispiel

Beispiel

- Definiere Familie von Problemen, deren Instanz m aus $m^2 - m + 1$ Aufgaben, die auf m Maschinen gesetzt werden sollen, besteht
- Erste Aufgabe hat Bearbeitungszeit m auf allen Maschinen, alle anderen haben Einheits–Bearbeitungszeit
- Optimaler Schedule setzt erste Aufgabe auf eine Maschine und verteilt jeweils m der restliche Aufgaben auf übrige $m - 1$ Maschinen
- $\Rightarrow$ *Makespan* $= m$. Ausserdem hat LP(T) keine zulässige Lösung für $T < m$
- Angenommen es wird die EPL zu LP(m) gewählt, die $\frac{1}{m}$ der ersten Aufgabe und $m - 1$ andere Aufgaben jeder der m Maschinen zuweißt
- $\Rightarrow$ Der Algorithmus rundet eine Lösung mit *Makespan* $= 2m - 1$

sität Bielefeld

Zusammenfassung

Zusammenfassung

- Faktor 2 Algorithmus zum Scheduling auf unverbundenen parallelen Maschinen angegeben
- Verfahren basiert auf LP–Rounding mit LP–Parametric–Pruning
- Spezielle Eigenschaften einer EPL des relaxierten Problems werden zur Approximation ausgenutzt

Zusammenfassung

Zusammenfassung

- Faktor 2 Algorithmus zum Scheduling auf unverbundenen parallelen Maschinen angegeben
- Verfahren basiert auf LP–Rounding mit LP–Parametric–Pruning
- Spezielle Eigenschaften einer EPL des relaxierten Problems werden zur Approximation ausgenutzt

Zusammenfassung

Zusammenfassung

- Faktor 2 Algorithmus zum Scheduling auf unverbundenen parallelen Maschinen angegeben
- Verfahren basiert auf LP–Rounding mit LP–Parametric–Pruning
- Spezielle Eigenschaften einer EPL des relaxierten Problems werden zur Approximation ausgenutzt

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit, das war's.

Quellenverzeichnis


J. K. Lenstra and D. B. Shmoys and É. Tardos
Approximation algorithms for scheduling unrelated parallel machines
Math. Program.
46:259-271, 1990


Vijay V. Vazirani
Approximation Algorithms
Springer-Verlag, Berlin, 2001