Randomized Rounding

Nicolas Weber
Görlitz 2007

5. September 2007

Hallo

Hallo

Einfacher Ansatz

$b_f := (\text{false}, \dots, \text{false})$
$b_t := (\text{true}, \dots, \text{true})$

Theorem

Sei Φ eine (n, m)-Formel in KNF. Dann ist

$$\max\{\text{wahr}(b_f, \Phi), \text{wahr}(b_t, \Phi)\} \geq \frac{1}{2} m.$$

Algorithmus A: Setze jede Variable in Φ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ auf true oder false.

Theorem

Sei k_j die Anzahl der Literale in C_j. Es gilt

$$Pr[A\,\mathrm{erfuellt}\ C_j] = 1 - \frac{1}{2^{k_j}}.$$

Für jede (n, m)-Formel Φ in KNF, in der jede Klausel ***mindestens*** *k Literale hat, gilt*

$$E\left[A(\Phi)\right] := E\left[\mathrm{wahr}(b_A, \Phi)\right] = \sum_{j=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{2^{k_j}}\right) \geq \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \cdot m.$$

Einfacher Randomisierter Ansatz II

Definition

Definiere *erwartete relative Güte* als

$$E\left[\varrho_A(I)\right] := \max\left\{\frac{OPT(I)}{E[A(I)]}, \frac{E[A(I)]}{OPT(I)}\right\}.$$

Theorem

Algorithmus A hat für jede (n,m)-Formel in KNF mit ***mindestens*** *k Literalen eine erwartete relative Güte von*

$$E\left[\varrho_A(\Phi)\right] = \frac{1}{1-\frac{1}{2^k}}.$$

Randomisiertes Runden

Nennen Menge der Variablen, die in C_j nicht negiert vorkommen S_j^+; Menge der negierten Variablen S_j^-
Führe für jede Variable x_i 0-1-Variable $\hat{x}_i$ ein, für jede Klausel 0-1-Variable $\hat{Z}_j$

$$\begin{aligned} \text{maximiere} \quad & \sum_{j=1}^{m} \hat{Z}_j \\ \text{gem} \quad & \sum_{x_i \in S_j^+} \hat{x}_i + \sum_{x_i \in S_j^-} (1 - \hat{x}_i) \geq \hat{Z}_j \quad j = 1, \ldots, m \\ & \hat{x}_i, \hat{Z}_j \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \end{aligned}$$

$\rightarrow 0 \leq \hat{x}_i, \hat{Z}_j \leq 1$

Randomisiertes Runden II

Eigentliches Runden:

Für $i := 1$ bis n tue

$$\begin{cases} \text{mit Warscheinlichkeit}\, \pi(\hat{x}_i) & x_i := \text{true} \\ \text{mit Warscheinlichkeit}\, 1 - \pi(\hat{x}_i) & x_i := \text{false} \end{cases}$$

Algorithmus B:

1. Löse relaxiertes Problem
2. Runde randomisiert; zunächst mit $\pi(x) = x$

Theorem

C_j habe k_j Literale. Dann gilt

$$Pr[B \text{ erfuellt } C_j] \geq \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k_j}\right)^{k_j}\right) \cdot \hat{Z}_j.$$

Theorem

*Für jede (n, m)-Formel Φ in KNF mit **höchstens** k Literalen gilt*

$$E[B(\Phi)] \geq \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k}\right) \cdot OPT(\Phi).$$

Hilfe

Fact

Für $a_i \geq 0$ *gilt* $\prod_{i=1}^{k} a_i \leq \left(\frac{1}{k}\sum_{i=i}^{k} a_i\right)^k$.

Fact

Sei $f(x)$ *auf dem Interval* $[a, b]$ *konkav und gelte* $f(a) \geq ma + n$ *und* $f(b) \geq mb + n$. *Dann gilt für alle* $x \in [a, b]$: $f(x) \geq mx + n$.

Erinnerung: Nebenbedinung $\sum_{x_i \in S_j^+} \hat{x}_i + \sum_{x_i \in S_j^-} (1 - \hat{x}_i) \geq \hat{Z}_j$

Theorem

C_j habe k_j Literale. Dann gilt

$$Pr[B\,\text{erfuellt}\ C_j] \geq \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k_j}\right)^{k_j}\right) \cdot \hat{Z}_j.$$

Theorem

*Für jede (n, m)-Formel Φ in KNF mit **höchstens** k Literalen gilt*

$$E[B(\Phi)] \geq \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k}\right) \cdot OPT(\Phi).$$

Randomisiertes Runden IV

Theorem

Algorithmus B hat für jede (n, m)-Formel in KNF mit ***höchstens*** *k Literalen eine erwartete relative Güte von*

$$E\left[\varrho_B(\Phi)\right] = \frac{OPT(\Phi)}{E[B(\Phi)]} \geq \frac{1}{1-\frac{1}{e}} \approx 1.582.$$

Mit besserem π geht auch $\frac{4}{3}$ (evtl. später).

Derandomisierung

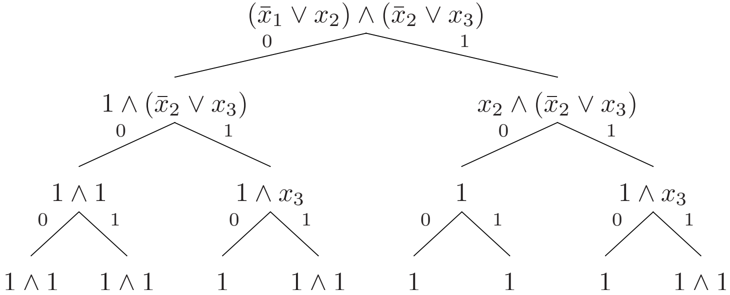
Def. *Substitution* auf Max-SAT:

- Wenn x_1 in C_j nicht vorkommt, bleibt C_j unverändert.
- Wenn C_j wahr wird, wenn man α für x_1 einsetzt, wird C_j durch true, was wir jetzt als Klausel ansehen, ersetzt.
- Ansonsten streiche das Literal in C_j, das durch Einsetzen von α zu false ausgewertet wird. Wird C_j dadurch zur leeren Klausel, fällt sie ganz weg.

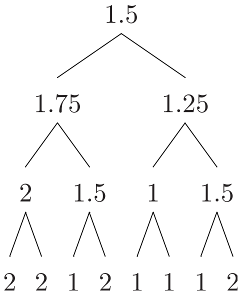
Führt auf Baum.

Derandomisierung II

$$E\,[\mathrm{wahr}(b_A, \Phi)] = \sum_{j=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{2^{k_j}}\right)$$



Derandomisierung III



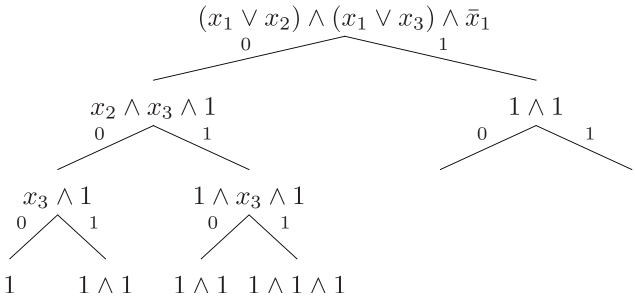
$$\begin{aligned} E[A(I)] &= Pr[x_1 = 0] \cdot E[A(I)|x_1 = 0] + Pr[x_1 = 1] \cdot E[A(I)|x_1 = 1] \\ &\leq \max\{E[A(I)|x_1 = 0], E[A(I)|x_1 = 1]\} \end{aligned}$$

...induktiv bis Blatt fortsetzen (Indukionstreue...). Geht auch allgemein.

Derandomisierung IV

$$\varrho_{\mathrm{DERAND\_A}}(I) \leq E[\varrho_A(I)] = \frac{m}{\sum_{j=1}^{m} 1 - \frac{1}{2^{k_j}}}$$

Dafür gibt es als Zeugen die $(3k, 3k)$-Formel
$\Phi_k := \bigwedge_{i=0}^{k-1} ((x_{3i+1} \vee x_{3i+2} \wedge (x_{3i+2} \vee x_{3i+3}) \wedge \bar{x}_{3i+1})$



Danke

Danke