Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Dr. Peter Ullrich
Dipl.Math. Dipl.-Ing. Thomas Bayer

SS 2003
Übungsblatt 4
19. Mai 2003

Algorithmische Algebra II

Abgabe: 19. Mai, in der Übung, MI03.09.011B

Aufgabe 1

Implementieren Sie die Version 4 des Buchberger-Algorithmus aus der Vorlesung als Prozedur `myBuchberger4` in Singular. Das Kriterium $\texttt{Crit}(f_i, f_j, B)$ ist wie folgt definiert:

$\texttt{Crit}(f_i, f_j, B)$ ist wahr genau dann, wenn ein $k \notin \{i, j\}$ existiert, so dass $[i, k] \notin B, [j, k] \notin B$ und $LM(f_k)$ teilt $kgV(LM(f_i), LM(f_j))$ gilt, wobei $[i, j] = (i, j)$ ist, falls $i < j$, und (i, j) im Fall $i > j$ $(i \neq j)$.
Testen Sie anhand verschiedener Eingaben die Laufzeit des Algorithmus und dokumentieren Sie Ihre Resultate.

(Bitte senden Sie die Source-Codes an `bayert@`in.tum.de)

Aufgabe 2

Seien $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{N})$ und $b = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{N}^m$ gegeben. Weiter sei ℓ die $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung geben durch $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{N}^n$, d.h. $\ell(\alpha) = \sum_i c_i \alpha_i$. In dieser Aufgabe untersuchen wir Lösungen $\alpha \in \mathbb{N}$ von $A\alpha = b$, die ℓ minimieren.
Sei $\varphi : k[Y_1, \dots, Y_n] \to k[X_1, \dots, X_m]$ der k-Algebrenhomomorphismus gegeben durch $\varphi(Y_j) = f_j$ mit $f_j := \prod_{i=1}^m X_i^{a_{ij}}$ (vgl. A3, Blatt 2).
Eine monomiale Ordnung auf $\mathbb{M}(X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n)$ heißt *passend für* (A, b, ℓ), wenn folgendes gilt:

1. (Elimination) Jedes Monom, das mindestens ein X_i enthält, ist größer als jedes Monom aus $\mathbb{M}(Y_1, \dots, Y_n)$.

2. (Kompatibiltät) Sind $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, und gilt $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ und $\ell(\alpha) > \ell(\beta)$, so folgt $Y^\alpha > Y^\beta$.

Sei $I = (Y_1 - f_1, \dots, Y_n - f_n) \subset k[X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n]$. Zeigen Sie:

(i) Gilt $\varphi(h) = 0$ für $h \in k[Y_1, \dots, Y_n]$, so folgt $h \in I \cap k[Y_1, \dots, Y_n]$.

(ii) Sei G eine Gröbner Basis von I bzgl. einer für (A, b, ℓ) passenden, monomialen Ordnung. Ist dann $f = X^b \in \mathrm{im}(\varphi)$, so ist $\alpha = \mathrm{multideg}(\overline{f}^G)$ eine Lösung von $A\alpha = b$, die ℓ minimiert.

Aufgabe 3

Gegeben sei eine Matrix $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{Z})$ und ein (Spalten)Vektor $b = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{Z}^m$. Sei weiter $\ell(x) = \sum_i c_i, x_i$ die durch $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{N}^n$ definierte $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung, genannt die *Kostenfunktion*. Wir schreiben $Ax = b$ ($Ax \leq b$) für das Diophantische (Un)gleichungssystem $\sum_j a_{ij}x_j = b_i$ (bzw. $\sum_j a_{ij}x_j \leq b_i$) $(i = 1, \ldots, n)$, $x \in \mathbb{N}^n$. Das *Integer Programming Problem* $\mathrm{IP}(\ell, A, b)$ fragt nach Lösungen $x \in \mathbb{N}^n$ von $Ax \leq b$, die ℓ minimieren (oder maximieren).
Sei $\tilde{A} = (A|I_m)$ die $m \times (n+m)$-Matrix, die aus A durch Spaltenerweiterungen um die $m \times m$ Einheitsmatrix I_m ensteht. Sei $\tilde{\ell}(\alpha, \beta) = \ell(\alpha)$, $(\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^m)$.
Zeigen Sie, dass es eine Bijektion zwischen den Mengen $\{\alpha \in \mathbb{N}^n : A\alpha \leq b,\ \alpha \text{ minimiert } \ell\}$ und $\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{n+m} : \tilde{A}(\alpha, \beta) = b,\ (\alpha, \beta) \text{ minimiert } \tilde{\ell}\}$ gibt.

Aufgabe 4

Sei $R = k[X_1, \ldots, X_n]$.

(i) Sei $>$ eine monomiale Ordnung auf R^q. Zeigen Sie: Sind $\bar{M}$, $\bar{N}$ zwei Monome in $\mathbb{R}^q$ und gilt $\bar{M}|\bar{N}$, so folgt $\bar{M} \leq \bar{N}$.

(ii) Sei $>$ eine monomiale Ordnung auf $\mathbb{M}_n(X_1, \ldots, X_n)$. Zegen Sie, dass $>_{\text{TOP}}$ und $>_{\text{POT}}$ (vgl. Vorlesung) monomiale Ordnungen auf R^q sind.