

---

## Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen I

---

Abgabetermin: 21.11.2003 vor der Vorlesung

### Aufgabe 1

Analysieren Sie die Laufzeit für dynamische Felder mit multiplikativer Vergrößerungsstrategie mittels der Potenzial-Methode der amortisierten Analyse. Definieren Sie dafür explizit ein Potenzial.

### Aufgabe 2

Bestimmen Sie eine obere Schranke für die amortisierte Laufzeit der Einzeloperationen in einer Folge von  $n$  Operationen  $P = p_1 p_2 \cdot \dots \cdot p_n$ , wobei für die Laufzeit  $t_i$  von  $p_i$  gilt:

$$t_i = \begin{cases} \Theta(i) & , \text{ falls } i = f(k) \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \\ O(1) & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Dabei sei  $f(x)$  eine streng monoton steigende Funktion. Was ergibt sich für  $f(x) = x^2$  und für  $f(k) = p_k$ , wobei  $p_k$  die  $k$ -te Primzahl ist?  
(Hinweis: Verwenden Sie den Primzahlsatz.)

### Aufgabe 3

Gegeben sei nebenstehendes Programm, das prüft, ob ein Array sortiert ist. (O.B.d.A. enthält  $a[]$  keine gleichen Elemente.) Wie sind die Best-Case, die Worst-Case und Average-Case Laufzeiten (im uniformen Kostenmodell)? Beweisen Sie Ihre Antworten.

```
Input: Array  $a[1, \dots, n]$   
 $i := 2$ ;  
while  $i \leq n$  and  $a[i-1] \leq a[i]$  do  
     $i := i + 1$ ;  
if  $i > n$  then  
    return "sortiert!";  
else  
    return "nicht sortiert!";
```

### Aufgabe 4

Gegeben sei nebenstehendes randomisiertes Programm, das prüft, ob ein Array sortiert ist. (O.B.d.A. enthält  $a[]$  keine gleichen Elemente.) Wie würden Sie  $M$  wählen, so dass der Algorithmus eine garantierte Fehlerwahrscheinlichkeit von höchstens  $\epsilon = 10^{-10}$  aufweist? Begründen Sie Ihre Wahl. Wie ist die Laufzeit?

```
Input: Array  $a[1, \dots, n]$   
for  $i:=1$  to  $M$  do  
    random  $r$  in  $\{2, \dots, n\}$ ;  
    if  $a[r-1] > a[r]$  then  
        return "nicht sortiert!";  
return "sortiert!";
```