Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

SS 2004
Übungsblatt 1
7. Mai 2004

Diskrete Strukturen II

Aufgabe 1

Eine faire Münze ist eine Münze, die mit Wahrscheinlichkeit 1/2 "Kopf" zeigt und mit Wahrscheinlichkeit 1/2 "Zahl". Wir werfen eine solche Münze n mal, dabei erhalten wir k mal "Kopf" und $n - k$ mal "Zahl".

a) Bestimmen Sie den zu n zugehörigen Ereignisraum Ω_n sowie $|\Omega_n|$.

b) Sei n gerade. Geben Sie eine möglichst gute asymptotische Abschätzung für $Pr[k = n/2]$ an. (Hinweis: Verwenden Sie die *Stirling-Formel.*)

c) Wie groß ist $Pr[k \text{ gerade}]$ in Abhängigkeit von n?

d) Wie groß ist $Pr[\forall i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil : \text{Ergebnis } i\text{-ter Wurf} = \text{Ergebnis } n - i + 1\text{-ter Wurf}]$?

e) Betrachten Sie folgende Variante von Teilaufgabe d): Eine *un*faire Münze wird $2n$ mal geworfen. Dabei beträgt die Wahrscheinlichkeit, "Kopf" zu werfen, p, mit $0 < p < 1$. Wie groß ist nun $Pr[\forall i \leq n : \text{Ergebnis } i\text{-ter Wurf} = \text{Ergebnis } 2n - i\text{-ter Wurf}]$?

Bestimmen Sie zur Lösung der Teilaufgaben b), c) und d) die Kardinalität einer jeweils geeigneten Ereignismenge.

Aufgabe 2

Am 9. September 1990 wurde folgendes Problem in der "Ask Marylin" Kolumne des Parade Magazine gestellt:

> *"Suppose you're on a game show, and you're given the choice of three doors. Behind one door is a car, behind the others, goats. You pick a door, say number 1, and the host, who knows what's behind the doors, opens another door, say number 3, which has a goat. He says to you, "Do you want to pick door number 2?" Is it to your advantage to switch your choice of doors?"*

Dieses Problem ist auch bekannt als das "Ziegenproblem" bzw. "Monty-Hall Dilemma".

a) Welches ist die bessere Strategie - wechseln (W) oder nicht (NW)? Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnen Sie das Auto, wenn Sie die bessere Strategie verwenden?

b) Ändert sich der Sachverhalt, wenn der Moderator *unabhängig von der Kandidatenwahl* eine der beiden Türen mit einer Ziege öffnet (also evtl. auch die vom Kandidaten gewählte Tür)?

c) Ein populärer Einwand gegen die korrekte Lösung von a) ist folgender:

> Ein UFO landet im Zuschauerraum und ein Außerirdischer springt auf die Bühne. Er sieht eine offene Ziegentür und zwei geschlossene Türen. Seine Chancen stehen also 1:1, dass er die richtige Tür wählt.

Warum überträgt sich dies nicht auf den Kandidaten?

d) (Der *4-Fälle-Einwand*) Jemand behauptet, die Strategien W und NW seien gleichwertig und argumentiert dabei wie folgt:

> Angenommen, der Kandidat wählt Tür 1. Nun gibt es vier Fälle:

(1) Auto hinter Tür 1, Moderator öffnet Tür 2 $\Rightarrow$ Strategie NW führt zum Gewinn
(2) Auto hinter Tür 1, Moderator öffnet Tür 3 $\Rightarrow$ Strategie NW führt zum Gewinn
(3) Auto hinter Tür 2, Moderator öffnet Tür 3 $\Rightarrow$ Strategie W führt zum Gewinn
(4) Auto hinter Tür 3, Moderator öffnet Tür 2 $\Rightarrow$ Strategie W führt zum Gewinn

Also ist jede Strategie in 50% der Fälle richtig!

Widerlegen Sie diese Argumentation!

Aufgabe 3

Das gute Mischen von Karten ist für Casinos unverzichtbar! Zum Beispiel kann ein Spieler, der sich beim Spiel "Black Jack" die bereits gespielten Karten merkt, bereits einen leichten Vorteil gegenüber dem Casino erlangen. Wenn die Karten jedoch nicht richtig gemischt sind, ist sein Vorteil - zumindest potentiell - sehr groß. Karten werden heutzutage nicht mehr von Hand gemischt, sondern maschinell. Von einer solchen Mischmaschine berichtete auch die Zeitschrift *New Scientist* in ihrer Ausgabe vom 20. Juli 2002. Die Maschine geht dabei wie folgt vor:

(1) Gegeben ein Stapel Karten $k_1, k_2, \ldots k_n$.[1]
(2) Beginnend mit k_1, verteile jedes k_i zufällig auf einen von zehn Stapeln $S_1, \ldots S_{10}$. Ein zweiter Zufallsgenerator entscheidet dabei, ob eine Karte oben oder unten auf einen vorhandenen Stapel eingefügt wird.
(3) Permutiere die Stapel $S_1, \ldots S_{10}$ zufällig und erhalte so die zehn Stapel $S'_1, \ldots S'_{10}$.
(4) Füge die Stapel $S'_1, \ldots S'_{10}$ zu einem einzigen Stapel $\mathcal{S}$ zusammen (wobei S'_1 der oberste und S'_{10} der unterste sei).

Die Konstrukteure dieser Maschine waren wohl keine Teilnehmer der Vorlesung DS II (oder haben zu wenig Übungsaufgaben gelöst ;-)! Sie weist einige grobe Konstruktionsfehler auf, die Sie im folgenden aufzeigen werden:

a) Zeigen Sie, dass Schritt (3) redundant in Bezug auf das Vermischen der Karten ist.

b) Betrachten Sie nun den Automaten *ohne Schritt (3)*. In Schritt (2) wird für jede Karte entschieden, auf welchen Stapel S_i sie gelegt wird, und ob sie unterhalb oder oberhalb von S_i abgelegt wird. Man kann daher Schritt (2) als Abbildung jeder Karte auf die Menge $\{(S_1, \text{oben}), (S_1, \text{unten}), \ldots, (S_{10}, \text{unten})\}$ betrachten. Gegeben eine solche Abbildung, wie bildet man $\mathcal{S}$ aus ihr?

c) Betrachten Sie wieder den Automaten ohne Schritt (3). Wenn der Automat "perfekt" mischt, dann müsste die Wahrscheinlichkeit jeder Permutation der Karten nach dem Mischvorgang gleich groß sein. Was gilt im vorliegenden Fall für die Wahrscheinlichkeit, dass sich k_n zuoberst auf $\mathcal{S}$ befindet? Was müsste bei einem perfekt mischenden Automaten gelten? (Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgabe b)

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass $\binom{n}{k}$ genau dann eine gerade Zahl ist, wenn $\binom{2n}{2k}$ eine gerade Zahl ist. Benutzen Sie dieses Ergebnis, um zu zeigen, dass es unendlich viele Zeilen im Pascalschen Dreieck gibt, die nur aus ungeraden Zahlen bestehen.

[1] Da es sich um mehrere Sets von Spielkarten handelt, können wir annehmen, dass n ein Vielfaches von 52 ist. Dies ist für die Lösung der Aufgaben jedoch nicht essentiell.