Diskrete Strukturen II

Zentralübung

Hanjo Täubig Sebastian Wernicke

30.04.2004

Sprechstunde

Montags 9:15-10:00 Uhr
(im Anschluss an die Vorlesung)
Besprechungsraum 03.09.011

Aufgabe 1

Eine faire Münze ist eine Münze, die mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ “Kopf” zeigt und mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ “Zahl”.
Wir werfen eine solche Münze n mal, dabei erhalten wir k mal “Kopf” und $n - k$ mal “Zahl”.

Aufgabe 1

a) Bestimmen Sie den zu n zugehörigen Ereignisraum Ω_n sowie $|\Omega_n|$.

Wir können jedes Elementarereignis eines n-maligen Münzwurfs als String $x_1 \ldots x_n$ der Länge n darstellen, wobei $x_i = K$ wenn beim i-ten Wurf "Kopf" gefallen ist und $x_i = Z$ sonst.

Daher ist

$$\Omega_n = \{x_1 \ldots x_n \mid x_i \in \{K, Z\}\}$$

also die Menge aller Strings der Länge n über dem Alphabet $\{K, Z\}$.

Damit ist auch klar, dass $|\Omega_n| = 2^n$.

Aufgabe 1

b) Sei n gerade. Geben Sie eine möglichst gute asymptotische Abschätzung für $Pr[k = n/2]$ an.
Sei A_n das Ereignis
"$k = n/2$ bei n-maligem Werfen einer Münze"
für ein gerades n. Dann ist

$$|A_n| = \binom{n}{n/2} = \frac{n!}{(n/2)!(n-n/2)!} = \frac{n!}{((n/2)!)^2}$$

$$\sim \frac{\sqrt{2\pi n} \cdot (n/e)^n}{\pi n \cdot (n/2e)^n} = 2^n \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$$

und somit

$$Pr[A_n] = \frac{|A_n|}{|\Omega_n|} \sim \frac{2^n \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi n}}}{2^n} = \sqrt{\frac{2}{\pi n}}.$$

Aufgabe 1

c) Wie groß ist $Pr[k \text{ gerade}]$ in Abhängigkeit von n?
Sei A_n das Ereignis "k ist gerade bei n Würfen einer Münze".
Dann können wir durch Induktion zeigen, dass

$$|A_n| = |\overline{A_n}| = \frac{1}{2}|\Omega_n|.$$

Für Ω_1 ist dies klar. Sei $|A_i| = |\overline{A_i}| = \frac{1}{2}|\Omega_i|$ für ein $i > 1$.
Dann ist

$$\begin{aligned} A_{i+1} &= \{x_1 \dots x_i K \mid k \text{ ungerade für } x_1 \dots x_i\} \dot\cup \\ &\quad \{x_1 \dots x_i Z \mid k \text{ gerade für } x_1 \dots x_i\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |A_{i+1}| = |A_i| + |\overline{A_i}| = |\Omega_i| = \frac{1}{2}|\Omega_{i+1}|.$$

Mithin gilt

$$Pr[A_n] = \frac{\frac{1}{2}|\Omega_n|}{|\Omega_n|} = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 1

d) Wie groß ist $Pr[\forall i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil : i\text{-ter Wurf} = n - i + 1\text{-ter Wurf}]$?
Sei A_n das Ereignis
"$\forall i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$: i-ter Wurf $= (n - i + 1)$-ter Wurf bei n Würfen einer Münze".
Für gerade n ist

$$|A_n| = |\{x_1 \ldots x_{n/2} x_{n/2} \ldots x_1 \mid x_i \in \{K, Z\}\}| = 2^{n/2} = 2^{\lceil n/2 \rceil}$$

während für ungerades n gilt

$$|A_n| = |\{x_1 \ldots x_{(n-1)/2} x_{\lceil (n-1)/2 \rceil} x_{(n-1)/2} \ldots x_1 \mid x_i \in \{K, Z\}\}|$$
$$= 2 \cdot 2^{(n-1)/2} = 2^{\lceil n/2 \rceil}$$

Daher ist

$$Pr[A_n] = \frac{|A_n|}{|\Omega_n|} = \frac{2^{\lceil n/2 \rceil}}{2^n} = \frac{1}{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}$$

Aufgabe 1

e) Betrachten Sie folgende Variante von Teilaufgabe d): Eine *unfaire* Münze wird $2n$ mal geworfen. Dabei beträgt die Wahrscheinlichkeit, "Kopf" zu werfen, p, mit $0 < p < 1$. Wie groß ist nun
$Pr[\forall i \leq n : i\text{-ter Wurf} = (2n - i + 1)\text{-ter Wurf}]$?

Wenn wir im i-ten der ersten n Würfe "Kopf" werfen, dann müssen wir im korrespondierenden $(2n - i + 1)$-ten Wurf ebenfalls "Kopf" werfen. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist p^2.
Analog ist die Wahrscheinlichkeit für ein korrespondierendes "Zahl"-Paar $(1 - p)^2$.
Für jedes $m \leq n$ gibt es $\binom{n}{m}$ Möglichkeiten, m mal Kopf zu werfen.

Aufgabe 1

e) Daher ist

$$Pr[\forall i \leq n : i\text{-ter Wurf} = (2n - i + 1)\text{-ter Wurf}] =$$

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} p^{2m}(1-p)^{2(n-m)} = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (1-p)^{2n} \left(\frac{p^2}{(1-p)^2}\right)^m =$$

$$(1-p)^{2n} \cdot \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \left(\frac{p^2}{(1-p)^2}\right)^m =$$

$$(1-p)^{2n} \cdot \left(1 + \frac{p^2}{(1-p)^2}\right)^n = (2p^2 - 2p + 1)^n$$

Bemerken Sie, dass durch Einsetzen von $p = \frac{1}{2}$ unser Ergebnis aus Teilaufgabe d) bestätigt wird.

Aufgabe 2

Am 9. September 1990 wurde folgendes Problem in der "Ask Marylin" Kolumne des Parade Magazine gestellt:

> *"Suppose you're on a game show, and you're given the choice of three doors. Behind one door is a car, behind the others, goats. You pick a door, say number 1, and the host, who knows what's behind the doors, opens another door, say number 3, which has a goat. He says to you, "Do you want to pick door number 2?" Is it to your advantage to switch your choice of doors?"*

Dieses Problem ist auch bekannt als das "Ziegenproblem" bzw. "Monty-Hall Dilemma".

Aufgabe 2

a) Welches ist die bessere Strategie - wechseln (W) oder nicht (NW)? Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnen Sie das Auto, wenn Sie die bessere Strategie verwenden?

Aufgabe 2

a) Im Fall der Strategie NW gewinnt der Kandidat das Auto genau dann, wenn er von Anfang an die richtige Tür gewählt hat.

$$\begin{aligned} Pr[\text{Autogewinn bei Strategie NW}] &= Pr[\text{richtige Tür gewählt}] \\ &= \frac{1}{\#\ \text{Anzahl der Türen}} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

a) Mit Strategie W hingegen kann man das Auto nur gewinnen, wenn man eine der *falschen* Türen gewählt hat. Wenn man eine falsche Tür gewählt hat, dann gewinnt man allerdings immer: Der Moderator zeigt einem die zweite falsche Tür mit einer Ziege und man wählt zwangsweise die Tür mit dem Auto.

$$\begin{aligned} Pr[\text{Autogewinn bei Strategie W}] &= Pr[\text{falsche Tür gewählt}] \\ &= \frac{2}{\#\ \text{Anzahl der Türen}} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Man sollte also auf jeden Fall die Tür wechseln.

Aufgabe 2

b) Ändert sich der Sachverhalt, wenn der Moderator *unabhängig von der Kandidatenwahl* eine der beiden Türen mit einer Ziege öffnet (also evtl. auch die vom Kandidaten gewählte Tür)?

Es ist nun jeweils zu berücksichtigen, dass der Moderator auch die Tür öffnen kann, welche der Kandidat gewählt hat. Er wird also unter Umständen zum Umentscheiden “gezwungen”.

Aufgabe 2

b) Für die Strategie NW gilt mithin:
$Pr[\text{Auto}_{\text{NW}}]$

$$\begin{aligned}
&= Pr[\text{richtige Tür gewählt}] + \\
&\quad Pr[\text{falsche Tür gewählt}] \cdot Pr[\text{gew. Tür geöffnet}] \cdot \\
&\quad Pr[\text{richtig umentschieden}] \\
&= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

b) Für die Strategie W gilt:
$Pr[\text{Auto}_W]$

$$\begin{aligned} &= Pr[\text{falsche Tür gewählt}] \cdot Pr[\text{gew. Tür geöffnet}] \cdot \\ &\quad Pr[\text{richtig umentschieden}] + \\ &\quad Pr[\text{falsche Tür gewählt}] \cdot Pr[\text{gew. Tür nicht geöffnet}] \cdot \\ &\quad Pr[\text{richtig umentschieden}] \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Bei dieser Spielvariante führen also beide Strategien gleichwahrscheinlich zu einem Autogewinn.

Aufgabe 2

c) Ein populärer Einwand gegen die korrekte Lösung von a) ist folgender:

> *Ein UFO landet im Zuschauerraum und ein Außerirdischer springt auf die Bühne. Er sieht eine offene Ziegentür und zwei geschlossene Türen. Seine Chancen stehen also 1:1, dass er die richtige Tür wählt.*

Warum überträgt sich dies nicht auf den Kandidaten?
Die Argumentation überträgt sich deshalb nicht auf den Kandidaten, weil es sich hier um die in b) beschriebene Spielsituation handelt: Der Moderator öffnet eine Tür völlig unabhängig von der Wahl des Außerirdischen, während er sie abhängig von der Wahl des Kandidaten wählen muss (seine Wahl ist nämlich nicht mehr frei, wenn der Kandidat eine Ziegentür gewählt hat).

Aufgabe 2

d) (Der *4-Fälle-Einwand*) Jemand behauptet, die Strategien W und NW seien gleichwertig und argumentiert dabei wie folgt:

> *Angenommen, der Kandidat wählt Tür 1. Nun gibt es vier Fälle:*
>
> *(1) Auto hinter Tür 1, Moderator öffnet Tür 2* $\Rightarrow$ *Strategie NW führt zum Gewinn*
>
> *(2) Auto hinter Tür 1, Moderator öffnet Tür 3* $\Rightarrow$ *Strategie NW führt zum Gewinn*
>
> *(3) Auto hinter Tür 2, Moderator öffnet Tür 3* $\Rightarrow$ *Strategie W führt zum Gewinn*
>
> *(4) Auto hinter Tür 3, Moderator öffnet Tür 2* $\Rightarrow$ *Strategie W führt zum Gewinn*
>
> *Also ist jede Strategie in 50% der Fälle richtig!*

Widerlegen Sie diese Argumentation!

Aufgabe 2

d) Die Argumentation übersieht, dass Fall (1) und (2) *zusammengenommen* mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$ eintreten (da beide Fälle voraussetzen, dass der Kandidat die Tür mit dem Auto gewählt hat, was aber nur mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$ eintritt), während Fall (2) und (3) *jeweils* mit einer Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ eintreten. Daher ist die Strategie NW also nur in $\frac{1}{3}$ aller Fälle richtig.

Aufgabe 3

Das gute Mischen von Karten ist für Casinos unverzichtbar! Zum Beispiel kann ein Spieler, der sich beim Spiel “Black Jack” die bereits gespielten Karten merkt, bereits einen leichten Vorteil gegenüber dem Casino erlangen. Wenn die Karten jedoch nicht richtig gemischt sind, ist sein Vorteil - zumindest potentiell - sehr groß. Karten werden heutzutage nicht mehr von Hand gemischt, sondern maschinell. Von einer solchen Mischmaschine berichtete auch die Zeitschrift *New Scientist* in ihrer Ausgabe vom 20. Juli 2002. Die Maschine geht dabei wie folgt vor:

Aufgabe 3

(1) Gegeben ein Stapel Karten $k_1, k_2, \ldots k_n$.

(2) Beginnend mit k_1, verteile jedes k_i zufällig auf einen von zehn Stapeln $S_1, \ldots S_{10}$. Ein zweiter Zufallsgenerator entscheidet dabei, ob eine Karte oben oder unten auf einen vorhandenen Stapel eingefügt wird.

(3) Permutiere die Stapel $S_1, \ldots S_{10}$ zufällig und erhalte so die zehn Stapel $S'_1, \ldots S'_{10}$.

(4) Füge die Stapel $S'_1, \ldots S'_{10}$ zu einem einzigen Stapel $\mathcal{S}$ zusammen (wobei S'_1 der oberste und S'_{10} der unterste sei).

Die Konstrukteure dieser Maschine waren wohl keine Teilnehmer der Vorlesung DS 2 (oder haben zu wenig Übungsaufgaben gelöst ;-)! Sie weist einige grobe Konstruktionsfehler auf, die Sie im folgenden aufzeigen werden:

Aufgabe 3

a) Zeigen Sie, dass Schritt (3) redundant in Bezug auf das Vermischen der Karten ist.
Für beliebiges $1 \leq j \leq 10$ ist die Wahrscheinlichkeit $Pr[k_i \text{ gehört zu } S'_j]$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{a=1}^{10} Pr[k_i \text{ gehört zu } S_a] \cdot Pr[S_a \text{ wird auf } S'_j \text{ abgebildet}] \\
&= \sum_{a=1}^{10} Pr[k_i \text{ gehört zu } S_a] \cdot \frac{1}{10} = \sum_{a=1}^{10} \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \\
&= 10 \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{10}
\end{aligned}
$$

was aber genau der Wahrscheinlichkeit $Pr[k_i \text{ gehört zu } S_j]$ für beliebiges $1 \leq j \leq 10$ entspricht.

Aufgabe 3

b) Betrachten Sie nun den Automaten *ohne Schritt (3)*. In Schritt (2) wird für jede Karte entschieden, auf welchen Stapel S_i sie gelegt wird, und ob sie unterhalb oder oberhalb von S_i abgelegt wird. Man kann daher Schritt (2) als Abbildung jeder Karte auf die Menge $\{(S_1, \text{oben}), (S_1, \text{unten}), \ldots, (S_{10}, \text{unten})\}$ betrachten. Gegeben eine solche Abbildung, wie bildet man $\mathcal{S}$ aus ihr?

Aufgabe 3

b) Gegeben einen Stapel Karten und eine Abbildung jeder Karte auf die Menge

$$\{(S_1, \text{oben}), (S_1, \text{unten}), \ldots, (S_{10}, \text{unten})\}$$

bildet man folgenden neuen Stapel: Obenauf liegen alle Karten, die auf (S_1, oben) abgebildet sind, und zwar *in der umgekehrten Reihenfolge*, wie im Ursprungsstapel vorkommen. Dann folgen die Karten, die auf (S_1, unten) abgebildet sind, und zwar *in genau der Reihenfolge*, wie sie auch im Ursprungsstapel vorkommen. Es folgen alle Karten, die auf (S_2, oben) abgebildet sind, wieder umgekehrt der Reihenfolge des Ursprungsstapels, und so weiter bis (S_{10}, unten).

Aufgabe 3

c) Betrachten Sie wieder den Automaten ohne Schritt (3). Wenn der Automat "perfekt" mischt, dann müsste die Wahrscheinlichkeit jeder Permutation der Karten nach dem Mischvorgang gleich groß sein. Was gilt im vorliegenden Fall für die Wahrscheinlichkeit, dass sich k_n zuoberst auf $\mathcal{S}$ befindet? Was müsste bei einem perfekt mischenden Automaten gelten?
(Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgabe b)

Aufgabe 3

c) Betrachten wir die Lösung von Teilaufgabe b, so fällt auf:

$$Pr[k_n \text{ oben auf } \mathcal{S}] = Pr[k_n \text{ abgebildet auf } (S_1, \text{oben})] = \frac{1}{20}.$$

Für eine perfekte Mischung müsste allerdings gelten:

$$\begin{aligned} Pr[k_n \text{ oben auf } \mathcal{S}] &= Pr[k_n \text{ an 2. Stelle in } \mathcal{S}] = \dots \\ &= Pr[k_n \text{ an } n\text{-ter Stelle in } \mathcal{S}] = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Damit aber sind Permutationen, in denen k_n oben auf dem gemischten Stapel liegt, für $n > 20$ (was in der Praxis wohl immer der Fall ist) wesentlich wahrscheinlicher als andere Permutationen. Eine schlechte Mischmaschine...

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass $\binom{n}{k}$ genau dann eine gerade Zahl ist, wenn $\binom{2n}{2k}$ eine gerade Zahl ist. Benutzen Sie dieses Ergebnis, um zu zeigen, dass es unendlich viele Zeilen im Pascalschen Dreieck gibt, die nur aus ungeraden Zahlen bestehen.

Fakt

Die geraden Faktoren von $(2n)!$ entsprechen genau den Faktoren von $n!$, allerdings jeweils multipliziert mit 2.

$$(2n)! = n! \cdot 2^n \cdot \textit{ungerade Faktoren von } (2n)!$$

Aufgabe 4

$$\binom{2n}{2k} = \frac{(2n)!}{(2k)!(2n-2k)!} =$$

$$= \frac{n! \cdot 2^n \cdot UF((2n)!)}{k! \cdot 2^k \cdot UF((2k)!) \quad \cdot \quad (n-k)! \cdot 2^{n-k} \cdot UF((2n-2k)!)} =$$

$$= \binom{n}{k} \cdot \frac{UF((2n)!)}{UF((2k)!) \cdot UF((2n-2k)!)}$$

Da der Bruch nur aus ungeraden Zahlen besteht, ist er immer ungerade. Also ist $\binom{2n}{2k}$ genau dann gerade, wenn der Faktor $\binom{n}{k}$ vor dem Bruch gerade ist.

Aufgabe 4

Mit dem bewiesenen ersten Teil zeigen wir nun durch Induktion, dass die 2^n-te Reihe des Pascal'schen Dreiecks für jedes $n \in \mathbb{N}$ nur aus ungeraden Zahlen besteht (und es deshalb unendlich viele Reihen gibt, deren Einträge alle ungerade sind).
Induktionsanfang: die 2^0-te Reihe enthält nur den Eintrag $\binom{0}{0} = 1$.
Nehmen wir an, die Behauptung sei wahr für die 2^{n-1}-te Reihe des Pascalschen Dreiecks.
Die 2^n-te Reihe ist gegeben durch

$$\binom{2^n-1}{0} \quad \binom{2^n-1}{1} \quad \binom{2^n-1}{2} \quad \cdots \quad \binom{2^n-1}{2^n-1}.$$

Aufgabe 4

Betrachte nun den Binomialkoeffizienten $\binom{2^n-1}{i}$ für $0 \leq i \leq 2^n - 1$.
Ist i ungerade, so wissen wir wegen

$$\binom{2^n-1}{i} = \frac{2^n-1}{i}\binom{2^n-2}{i-1}$$

bereits, dass der entsprechende Eintrag ungerade ist, denn $\binom{2^n-2}{i-1} = \binom{2\cdot(2^{n-1}-1)}{2\cdot\frac{i-1}{2}}$ ist nach der I.V. in Verbindung mit $\binom{2n}{2k} \equiv \binom{n}{k}$ ungerade; ferner ist $2^n - 1$ (trivialerweise) ungerade.
Hiermit ergibt sich für gerade i aufgrund von

$$\binom{2^n-1}{i} = \binom{2^n-1}{2^n-1-i}$$

in Verbindung mit der Tatsache, dass $2^n - 1 - i$ ungerade ist, dass auch $\binom{2^n-1}{i}$ ungerade sein muss.