Diskrete Strukturen II

Zentralübung

Hanjo Täubig Sebastian Wernicke

21.05.2004

Raumänderung

Die Zentralübung findet an folgenden Tagen nicht im gewohnten Hörsaal statt, sondern wie folgt:

- Freitag, 18.06.2004: MW 1801
- Freitag, 09.07.2004: MI Hörsaal 3
- Freitag, 16.07.2004: MW 1801

Aufgabe 1

Gegeben zwei Zufallsvariablen X und Y. Zeigen Sie:

a) Wenn X und Y unabhängig sind sowie den gleichen Erwartungswert und die gleiche Varianz haben, so gilt $\mathbb{E}((X-Y)^2) = 2 \cdot \mathrm{Var}(X)$.

Da X und Y den gleichen Erwartungswert haben, ist $\mathbb{E}(X-Y) = 0$ und wir folgern

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((X-Y)^2) &= \mathbb{E}((X-Y)^2) - \mathbb{E}(X-Y)^2 \\
&= \mathrm{Var}(X-Y) \\
&= \mathrm{Var}(X) + (-1)^2\mathrm{Var}(Y) \\
&= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) \\
&= 2 \cdot \mathrm{Var}(X)
\end{aligned}$$

Aufgabe 1

Gegeben zwei Zufallsvariablen X und Y. Zeigen Sie:

b) Wenn X und Y die gleiche Varianz haben, so gilt $\mathbb{E}((X+Y)(X-Y)) = \mathbb{E}(X+Y) \cdot \mathbb{E}(X-Y)$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \mathrm{Var}(Y) \\ \Rightarrow \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 &= \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 \\ \Rightarrow \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(Y^2) &= \mathbb{E}(X)^2 - \mathbb{E}(Y)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((X+Y)(X-Y)) &= \mathbb{E}(X^2 - Y^2) \\ &= \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(-Y^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(Y^2) \\ &= \mathbb{E}(X)^2 - \mathbb{E}(Y)^2 \\ &= (\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)) \cdot (\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y)) \\ &= \mathbb{E}(X+Y) \cdot \mathbb{E}(X-Y) \end{aligned}$$

Aufgabe 1

Gegeben zwei Zufallsvariablen X und Y. Zeigen Sie:

c) Es gilt $\mathrm{Var}(X+Y)+\mathrm{Var}(X-Y)=2\mathrm{Var}(X)+2\mathrm{Var}(Y)$.

Wegen

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X+Y) &= \mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)\\
\mathrm{Var}(X-Y) &= \mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(-Y)+2\mathrm{Cov}(X,-Y)\\
&= \mathrm{Var}(X)+(-1)^2\mathrm{Var}(Y)-2\mathrm{Cov}(X,Y)
\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Var}(X+Y)+\mathrm{Var}(X-Y)\\
&= 2\mathrm{Var}(X)+2\mathrm{Var}(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)-2\mathrm{Cov}(X,Y)\\
&= 2\mathrm{Var}(X)+2\mathrm{Var}(Y)
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Wir wählen nacheinander zufällig Buchstaben aus der Multimenge der Buchstaben des Wortes `CHOOSE` aus. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz folgender Zufallsvariablen:

a) $X :=$ Anzahl der Züge (mit Zurücklegen), bis `C` gezogen.
Es gilt

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n\geq 1} n \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = 6$$

Wegen

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{n\geq 1} n^2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = 66$$

ist

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - E(X)^2 = 30$$

Aufgabe 2

Wir wählen nacheinander zufällig Buchstaben aus der Multimenge der Buchstaben des Wortes `CHOOSE` aus. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz folgender Zufallsvariablen:

b) Y := Anzahl der Züge (ohne Zurücklegen), bis `C` gezogen.
Es gilt

$$\mathbb{E}(Y) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} + \cdots + 6 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{21}{6}$$

Wegen

$$\mathbb{E}(Y^2) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} + \cdots + 36 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{91}{6}$$

ist

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = \frac{35}{12}$$

Aufgabe 2

Wir wählen nacheinander zufällig Buchstaben aus der Multimenge der Buchstaben des Wortes CHOOSE aus. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz folgender Zufallsvariablen:

c) $Z :=$ Anz. d. Züge (ohne Zurücklegen), bis beide O gezogen.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z) &= 2 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \binom{2}{1} \frac{2 \cdot 4}{6 \cdot 5} \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \binom{3}{1} \frac{2 \cdot 4 \cdot 3}{6 \cdot 5 \cdot 4} \cdot \frac{1}{3} \\ &\quad + 5 \cdot \binom{4}{1} \frac{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \binom{5}{1} \frac{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \\ &= \frac{14}{3}\end{aligned}$$

Aufgabe 2

c) Wegen

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z^2) &= 4\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}+9\cdot\binom{2}{1}\frac{2\cdot 4}{6\cdot 5}\cdot\frac{1}{4}+16\cdot\binom{3}{1}\frac{2\cdot 4\cdot 3}{6\cdot 5\cdot 4}\cdot\frac{1}{3}\\ &\quad+25\cdot\binom{4}{1}\frac{2\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}\cdot\frac{1}{2}+36\cdot\binom{5}{1}\frac{2\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}\\ &= \frac{70}{3}\end{aligned}$$

ist

$$\mathrm{Var}(Z)=\mathbb{E}(Z^2)-\mathbb{E}(Z)^2=\frac{14}{9}$$

Aufgabe 3

Ein Geigerzähler registriert mit Wahrscheinlichkeit 10^{-4} ein von einer Quelle Q emittiertes Teilchen. Wenn Q 30 000 Teilchen emittiert, wie groß ist dann (approximativ) die Wahrscheinlichkeit, dass der Zähler kein Teilchen registriert? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mehr als 2 Teilchen registriert?

Aufgabe 3

Wir können die Poisson-Approximation verwenden. Nach dieser ist die Zahl der registrierten Teilchen mit

$$\lambda = n \cdot p_i = 3 \quad (i \leq 30\,000)$$

verteilt.
Also gilt

$$\Pr[\text{kein Teilchen}] \approx e^{-3} \approx 5.0\%$$

und

$$\begin{aligned}
\Pr[\text{mehr als 2 Teilchen}] &= 1 - \Pr[\leq 2 \text{ Teilchen}] \\
&\approx 1 - e^{-3}(1 + 3 + 9/2) \\
&\approx 57.7\%.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Es wird so lange gewürfelt, bis jede der Zahlen $1, \ldots, 6$ einmal gekommen ist. Sei der Wert der Zufallsvariable X durch die Anzahl der Würfe bestimmt. Wie groß sind $\mathbb{E}(X)$ und $\mathrm{Var}(X)$?

Aufgabe 4

Wir beobachten: Ist gerade die $(i-1)$-te verschiedene Zahl geworfen worden, so ist in jedem darauffolgenden Wurf die Wahrscheinlichkeit $p_i = 1 - \frac{i-1}{6}$, eine neue verschiedene Zahl zu werfen. Da wir so lange würfeln, bis die neue Zahl erscheint, haben wir für jedes "Warten auf die nächste neue Zahl" eine geometrische Verteilung mit Erfolgswahrscheinlichkeit p_i.
Da die einzelnen "Warteereignisse" unabhängig sind, gilt

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{6} p_i^{-1} = 6/6 + 6/5 + 6/4 + \cdots + 6/1 = 14.7$$

und

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{6} \frac{1-p_i}{p_i^2} = 0 + \frac{5/6}{1/36} + \frac{4/6}{4/36} + \cdots + \frac{1/6}{25/36} = 38.99$$

Aufgabe 5

Heureka! Wir haben eine Maschine erfunden, die DS-II Hausaufgaben automatisch löst, und werden sie gleich morgen in Betrieb nehmen. Aufgrund der Komplexität der Aufgaben ist die Maschine allerdings recht fehleranfällig und geht mit Wahrscheinlichkeit $\Pr[t] = C/t^4$ in genau t Tagen von heute an kaputt.

a) Wie groß ist C?

Es gilt

$$\sum_{t\geq 1} \Pr[t] = 1 \implies C \cdot \sum_{t\geq 1} 1/t^4 = 1 \implies C = \frac{90}{\pi^4} \approx 0.924.$$

Aufgabe 5

b) Welche Lebensdauer erwarten Sie für die Maschine?
(Hinweis: Sie dürfen $\zeta(3) \approx 1.2021$ annehmen, wobei ζ die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(\sigma) = \sum_{n \geq 1} n^{-\sigma}$ sei.)

Wir erwarten eine Lebensdauer von

$$\begin{aligned} \sum_{t \geq 1} t \cdot \Pr[t] &= \frac{90}{\pi^4} \sum_{t \geq 1} 1/t^3 \\ &\approx \frac{90}{\pi^4} \cdot 1.2021 \approx 1.11 \end{aligned}$$

Tagen. Das reicht immerhin für ein Übungsblatt!

Aufgabe 5

c) Welche Varianz hat die Lebensdauer?

Wegen

$$\sum_{t \geq 1} t^2 \cdot \Pr[t] = \frac{90}{\pi^4} \sum_{t \geq 1} 1/t^2 = \frac{90}{\pi^4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{15}{\pi^2}$$

hat die Lebensdauer der Maschine eine Varianz von

$$\frac{15}{\pi^2} - (1.11)^2 \approx 0.29$$

Tagen. Es ist also sehr wahrscheinlich, dass sie genau am ersten Tag der Inbetriebnahme kaputtgeht.

Aufgabe 5

d) In 10 Tagen stellen wir fest, dass die Maschine immer noch läuft. Wie lange erwarten wir nun, dass es dauert, bis sie kaputt geht?

Bezeichne die Wahrscheinlichkeit, dass die Maschine nach $10 + k$ Tagen kaputt geht, mit $\Pr'[k]$.
Wenn die Maschine bereits seit zehn Tagen läuft, dann wissen wir, dass

$$\sum_{k \geq 1} \Pr{}'[k] = 1 \implies \sum_{t \geq 10} C'/t^4 = 1$$

$$\implies C' = \frac{40327580160000}{-43631884298881 + 448084224000\pi^4}$$

$$C' \approx 2586.3$$

Aufgabe 5

d) Wir erwarten daher eine Gesamtlebensdauer von

$$\begin{aligned}\sum_{t\geq 10} C'/t^3 &= C' \cdot \sum_{t\geq 10} 1/t^3 \\ &= C' \cdot \left(\zeta(3) - \frac{19148110939}{16003008000}\right) \approx 14.29\end{aligned}$$

Tagen für die Maschine.
Da sie bereits seit 10 Tagen läuft, bleiben ihr noch erwartete 4.29 Tage Lebensdauer.

Raumänderung

Die Zentralübung findet an folgenden Tagen nicht im gewohnten Hörsaal statt, sondern wie folgt:

- Freitag, 18.06.2004: MW 1801
- Freitag, 09.07.2004: MI Hörsaal 3
- Freitag, 16.07.2004: MW 1801