WS 2003/04

Diskrete Strukturen I

Ernst W. Mayr

mayr@in.tum.de
Institut für Informatik
Technische Universität München

12-23-2003

Inversion

Basisfolgen

Definition

Eine Folge $(p_0(x), p_1(x), \ldots)$ von Polynomen $p_i(x)$ heißt *Basisfolge, falls*

$$\deg(p_i) = i \qquad \textit{für alle } i.$$

Bemerkung: $p_0 \neq 0$, *da wir für* $p(x) \equiv 0$ *festlegen:* $\deg(p) = -1$.

Basisfolgen

Definition

Eine Folge $(p_0(x), p_1(x), \ldots)$ von Polynomen $p_i(x)$ heißt *Basisfolge, falls*

$$\deg(p_i) = i \qquad \textit{für alle } i.$$

Bemerkung: $p_0 \neq 0$, *da wir für* $p(x) \equiv 0$ *festlegen:* $\deg(p) = -1$.

Beobachtung: $\big(p_i(x)\big)_{i\geq 0}$ sei eine Basisfolge. Dann kann jedes Polynom $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ vom Grad n eindeutig dargestellt werden als

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \cdot p_i(x)$$

mit $f_i \in \mathbb{R}$.

Beweis.

Mit Koeffizientenvergleich und vollständiger Induktion. $\square$

Beobachtung: $\big(p_i(x)\big)_{i\ge 0}$ sei eine Basisfolge. Dann kann jedes Polynom $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ vom Grad n eindeutig dargestellt werden als

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \cdot p_i(x)$$

mit $f_i \in \mathbb{R}$.

Beweis.

Mit Koeffizientenvergleich und vollständiger Induktion. $\square$

Zusammenhangskoeffizienten

Seien $\big(p_i(x)\big)_{i\geq 0}$ und $\big(q_i(x)\big)_{i\geq 0}$ Basisfolgen. Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $a_{n,k}$ und $b_{n,k} \in \mathbb{R}$ (die sogenannten *Zusammenhangskoeffizienten), so dass für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ gilt:*

1. $$q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \cdot p_k(x)$$

2. $$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} \cdot q_k(x)$$

Zusammenhangskoeffizienten

Seien $\big(p_i(x)\big)_{i\geq 0}$ und $\big(q_i(x)\big)_{i\geq 0}$ Basisfolgen. Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $a_{n,k}$ und $b_{n,k} \in \mathbb{R}$ (die sogenannten *Zusammenhangskoeffizienten), so dass für alle* $n, k \in \mathbb{N}_0$ *gilt:*

1. $$q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \cdot p_k(x)$$

2. $$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} \cdot q_k(x)$$

Zusammenhangskoeffizienten

Seien $\big(p_i(x)\big)_{i\geq 0}$ und $\big(q_i(x)\big)_{i\geq 0}$ Basisfolgen. Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $a_{n,k}$ und $b_{n,k} \in \mathbb{R}$ (die sogenannten *Zusammenhangskoeffizienten), so dass für alle* $n, k \in \mathbb{N}_0$ *gilt:*

1. $$q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \cdot p_k(x)$$

2. $$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} \cdot q_k(x)$$

Lemma

Seien die $a_{n,k}, b_{n,k}$ *wie oben,* $A = (a_{ij})_{0 \le i,j \le n}$ *und* $B = (b_{ij})_{0 \le i,j \le n}$*, dann ist*

$$A \cdot B = I$$

(I *ist die* $n+1$*-dimensionale Einheitsmatrix.)*

Beweis.

Klar. $\square$

Lemma

Seien die $a_{n,k}, b_{n,k}$ *wie oben,* $A = (a_{ij})_{0 \leq i,j \leq n}$ *und* $B = (b_{ij})_{0 \leq i,j \leq n}$*, dann ist*

$$A \cdot B = I$$

(I *ist die* $n+1$*-dimensionale Einheitsmatrix.)*

Beweis.

Klar. $\square$

Satz

Seien $a_{n,k}$ und $b_{n,k}$, $n, k \in \mathbb{N}_0$, die zu zwei Basisfolgen gehörenden Zusammenhangskoeffizienten. Dann gilt:

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[v_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \cdot u_k\right] \iff (\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[u_n = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} \cdot v_k\right]$$

Beweis.

In Matrixschreibweise gilt:

$$v = (v_0, \ldots, v_n)^T = A \cdot u \iff u = B \cdot v$$

Klar, da $A = B^{-1}$. $\square$

Satz

Seien $a_{n,k}$ und $b_{n,k}$, $n, k \in \mathbb{N}_0$, die zu zwei Basisfolgen gehörenden Zusammenhangskoeffizienten. Dann gilt:

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[v_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \cdot u_k\right] \iff (\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[u_n = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} \cdot v_k\right]$$

Beweis.

In Matrixschreibweise gilt:

$$v = \left(v_0, \ldots, v_n\right)^T = A \cdot u \iff u = B \cdot v$$

Klar, da $A = B^{-1}$. □

Satz

Seien $a_{n,k}$ und $b_{n,k}$, $n, k \in \mathbb{N}_0$, die zu zwei Basisfolgen gehörenden Zusammenhangskoeffizienten. Dann gilt:

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[v_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \cdot u_k\right] \iff (\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[u_n = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} \cdot v_k\right]$$

Beweis.

In Matrixschreibweise gilt:

$$v = \left(v_0, \ldots, v_n\right)^T = A \cdot u \iff u = B \cdot v$$

Klar, da $A = B^{-1}$. □

Die Binomialinversion

Der Binomialsatz ergibt:

$$x^n = \big((x-1)+1\big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (x-1)^k$$

$$(x-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \cdot x^k$$

Betrachte die beiden Basisfolgen

$$\left(v_k\right)_{k\geq 0} := \left(x^k\right)_{k\geq 0} \text{ und } \left(u_k\right)_{k\geq 0} := \left((x-1)^k\right)_{k\geq 0}.$$

Satz 3 liefert:

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[v_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot u_k \iff u_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\cdot v_k\right]$$

Für "Puristen": Ersetze u_n durch $(-1)^n \cdot u_n$. Dann gilt:

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[v_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\cdot u_k\right] \iff$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[u_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\cdot v_k\right]$$

Betrachte die beiden Basisfolgen

$$(v_k)_{k\geq 0} := (x^k)_{k\geq 0} \text{ und } (u_k)_{k\geq 0} := ((x-1)^k)_{k\geq 0}.$$

Satz 3 liefert:

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[v_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot u_k \iff u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \cdot v_k\right]$$

Für "Puristen": Ersetze u_n durch $(-1)^n \cdot u_n$. Dann gilt:

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[v_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \cdot u_k\right] \iff$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left[u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \cdot v_k\right]$$

Beispiel

Sei $d(n,k)$ die Anzahl der Permutationen $\in S_n$ mit genau k Fixpunkten.

$$D_n := d(n,0)\ .$$

(Die Anzahl der sog. *derangements*).

$$n! = \sum_{k=0}^{n} d(n,k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k} \overset{k\mapsto n-k}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$$

Beispiel

Sei $d(n,k)$ die Anzahl der Permutationen $\in S_n$ mit genau k Fixpunkten.

$$D_n := d(n,0)\ .$$

(Die Anzahl der sog. *derangements*).

$$n! = \sum_{k=0}^{n} d(n,k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k} \overset{k\mapsto n-k}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$$

Mit der Binomialinversion gilt:

$$\begin{aligned} D_n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \cdot \binom{n}{k} \cdot k! \\ &= n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^{n-k} \frac{n^{\underline{k}}}{n!} \right) \\ &= n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^{n-k} \cdot \frac{1}{(n-k)!} \right) \\ &= n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \,. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, dass

$$\lim_{n \to \infty} \frac{D_n}{|S_n|} = \frac{1}{e} \,.$$

Mit der Binomialinversion gilt:

$$\begin{aligned} D_n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \cdot \binom{n}{k} \cdot k! \\ &= n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^{n-k} \frac{n^{\underline{k}}}{n!} \right) \\ &= n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^{n-k} \cdot \frac{1}{(n-k)!} \right) \\ &= n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} . \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D_n}{|S_n|} = \frac{1}{e} .$$

Mit der Binomialinversion gilt:

$$
\begin{aligned}
D_n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \cdot \binom{n}{k} \cdot k! \\
&= n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^{n-k} \frac{n^{\underline{k}}}{n!} \right) \\
&= n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^{n-k} \cdot \frac{1}{(n-k)!} \right) \\
&= n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \,.
\end{aligned}
$$

Daraus ergibt sich, dass

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{D_n}{|S_n|} = \frac{1}{e} \,.
$$

Mit der Binomialinversion gilt:

$$\begin{aligned} D_n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \cdot \binom{n}{k} \cdot k! \\ &= n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^{n-k} \frac{n^{\underline{k}}}{n!} \right) \\ &= n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^{n-k} \cdot \frac{1}{(n-k)!} \right) \\ &= n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \,. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D_n}{|S_n|} = \frac{1}{e} \,.$$

Mit der Binomialinversion gilt:

$$
\begin{aligned}
D_n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \cdot \binom{n}{k} \cdot k! \\
&= n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^{n-k} \frac{n^{\underline{k}}}{n!} \right) \\
&= n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^{n-k} \cdot \frac{1}{(n-k)!} \right) \\
&= n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \, .
\end{aligned}
$$

Daraus ergibt sich, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D_n}{|S_n|} = \frac{1}{e} \, .$$

Mit der Binomialinversion gilt:

$$\begin{aligned}
D_n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \cdot \binom{n}{k} \cdot k! \\
&= n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^{n-k} \frac{n^{\underline{k}}}{n!} \right) \\
&= n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^{n-k} \cdot \frac{1}{(n-k)!} \right) \\
&= n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \,.
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, dass

$$\lim_{n \to \infty} \frac{D_n}{|S_n|} = \frac{1}{e} \,.$$

Stirling-Inversion

Betrachte die Basisfolgen $(x^n)_{n\geq 0}$ und $(x^{\underline{n}})_{n\geq 0}$.

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left(S_{n,k} \cdot x^{\underline{k}} \right)$$

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^{n-k} \cdot s_{n,k} \cdot x^k \right)$$

Daraus lässt sich die *Stirling-Inversion ableiten:*

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0) \left[v_n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} \cdot u_k \iff u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} s_{n,k} \cdot v_k \right]$$

Stirling-Inversion

Betrachte die Basisfolgen $(x^n)_{n\geq 0}$ und $(x^{\underline{n}})_{n\geq 0}$.

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left(S_{n,k} \cdot x^{\underline{k}} \right)$$

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^{n-k} \cdot s_{n,k} \cdot x^k \right)$$

Daraus lässt sich die *Stirling-Inversion ableiten:*

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0) \left[v_n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} \cdot u_k \iff u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} s_{n,k} \cdot v_k \right]$$

Stirling-Inversion

Betrachte die Basisfolgen $(x^n)_{n\geq 0}$ und $(x^{\underline{n}})_{n\geq 0}$.

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left(S_{n,k} \cdot x^{\underline{k}} \right)$$

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^{n-k} \cdot s_{n,k} \cdot x^k \right)$$

Daraus lässt sich die *Stirling-Inversion ableiten:*

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0) \left[v_n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} \cdot u_k \iff u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} s_{n,k} \cdot v_k \right]$$

Definition

Zu einer Folge $(a_i)_{i\geq 0}$ von $a_i \in \mathbb{R}$ ist die zugehörige *(gewöhnliche) erzeugende Funktion die formale Potenzreihe*

$$A(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot z^i \ .$$

Beobachtungen: Die formalen Potenzreihen bilden eine additive Gruppe:

$$A(z) \pm B(z) = \sum_{i \geq 0} (a_i \pm b_i) z^i$$

$$c \cdot A(z) = \sum_{i \geq 0} (c \cdot a_i) z^i$$

Hier gilt folgende Produktformel:

$$A(z) \cdot B(z) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} \right) \cdot z^n$$

(*Konvolution von $A(z)$ und $B(z)$*)

Beobachtungen: Die formalen Potenzreihen bilden eine additive Gruppe:

$$A(z) \pm B(z) = \sum_{i \geq 0} (a_i \pm b_i) z^i$$

$$c \cdot A(z) = \sum_{i \geq 0} (c \cdot a_i) z^i$$

Hier gilt folgende Produktformel:

$$A(z) \cdot B(z) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} \right) \cdot z^n$$

(*Konvolution von* $A(z)$ *und* $B(z)$)

Beobachtungen: Die formalen Potenzreihen bilden eine additive Gruppe:

$$A(z) \pm B(z) = \sum_{i \geq 0} (a_i \pm b_i) z^i$$

$$c \cdot A(z) = \sum_{i \geq 0} (c \cdot a_i) z^i$$

Hier gilt folgende Produktformel:

$$A(z) \cdot B(z) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} \right) \cdot z^n$$

(*Konvolution von* $A(z)$ *und* $B(z)$)

Satz

Eine formale Potenzreihe

$$A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot z^n$$

besitzt ein multiplikatives Inverses genau dann, wenn $a_0 \neq 0$.

Beweis

Annahme: Sei

$$B(z) = \sum_{n \geq 0} b_n \cdot z^n$$

ein solches Inverses. Dann muss $A(z) \cdot B(z) = 1$ sein, also auch $a_0 \cdot b_0 = 1$, damit $a_0 \neq 0$. Daher muss $b_0 = {a_0}^{-1}$ sein.

Satz

Eine formale Potenzreihe

$$A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot z^n$$

besitzt ein multiplikatives Inverses genau dann, wenn $a_0 \neq 0$*.*

Beweis

Annahme: Sei

$$B(z) = \sum_{n \geq 0} b_n \cdot z^n$$

ein solches Inverses. Dann muss $A(z) \cdot B(z) = 1$ sein, also auch $a_0 \cdot b_0 = 1$, damit $a_0 \neq 0$. Daher muss $b_0 = {a_0}^{-1}$ sein.

Seien induktiv $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ bereits bestimmt. Dann folgt aus

$$[z^n]\Big(A(z) \cdot B(z)\Big) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} = 0, n \geq 1$$

$\big($dabei bezeichnet $[z^n](\ldots)$ den Koeffizienten von z^n in $(\ldots)\big)$ folgende Formel:

$$b_n = \frac{-1}{a_0} \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_{n-k}$$

Also ist b_n und damit per Induktion $B(z)$ eindeutig bestimmt.

q. e. d.

Seien induktiv $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ bereits bestimmt. Dann folgt aus

$$[z^n]\Big(A(z) \cdot B(z)\Big) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} = 0, n \geq 1$$

$\big($dabei bezeichnet $[z^n](\ldots)$ den Koeffizienten von z^n in $(\ldots)\big)$ folgende Formel:

$$b_n = \frac{-1}{a_0} \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_{n-k}$$

Also ist b_n und damit per Induktion $B(z)$ eindeutig bestimmt.
q. e. d.

Beispiel

Geometrische Reihe:

$$A(z) = \sum_{n \geq 0} z^n$$

Es gilt $A(z) \cdot (1 - z) = 1$, da

$$\begin{aligned} A(z) \cdot (1 - z) &= A(z) - z \cdot A(z) \\ &= (1 + z + z^2 \ldots) - (z + z^2 + z^3 + \ldots) = 1 \end{aligned}$$

Also:

$$A(z) = \frac{1}{1 - z}$$

Beispiel

Geometrische Reihe:

$$A(z) = \sum_{n\geq 0} z^n$$

Es gilt $A(z)\cdot(1-z) = 1$, da

$$\begin{aligned} A(z)\cdot(1-z) &= A(z) - z\cdot A(z) \\ &= (1+z+z^2\ldots) - (z+z^2+z^3+\ldots) = 1 \end{aligned}$$

Also:

$$A(z) = \frac{1}{1-z}$$

Beispiel

Geometrische Reihe:

$$A(z) = \sum_{n \geq 0} z^n$$

Es gilt $A(z) \cdot (1-z) = 1$, da

$$\begin{aligned} A(z) \cdot (1-z) &= A(z) - z \cdot A(z) \\ &= (1 + z + z^2 \ldots) - (z + z^2 + z^3 + \ldots) = 1 \end{aligned}$$

Also:

$$A(z) = \frac{1}{1-z}$$

Satz

Einige wichtige Erzeugendenfunktionen:

1. $$\sum_{n\geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}$$

2. $$\sum_{n\geq 0} (-1)^n \cdot z^n = \frac{1}{1+z}$$

3. $$\sum_{n\geq 0} z^{2n} = \frac{1}{1-z^2}$$

Einige wichtige Erzeugendenfunktionen:

Beweis.

1. s. o.
2. Setze in (1) $z \mapsto -z$.
3. Setze in (1): $z \mapsto z^2$.
4. Der Fall $a \in \mathbb{N}_0$ wird durch den Binomialsatz gezeigt, für allgemeine a verweisen wir auf die *Analysis*.
5. $$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\binom{c+n-1}{n}z^n &= \sum_{n\geq 0}\binom{-c}{n}(-1)^n z^n\\ &= \sum_{n\geq 0}\binom{-c}{n}(-z)^n\\ &\overset{(4)}{=} (1-z)^{-c}\end{aligned}$$
6. Setze in (5) $c := m-1$.

Beweis.

1. s. o.
2. Setze in (1) $z \mapsto -z$.
3. Setze in (1): $z \mapsto z^2$.
4. Der Fall $a \in \mathbb{N}_0$ wird durch den Binomialsatz gezeigt, für allgemeine a verweisen wir auf die *Analysis*.
5. $$\begin{aligned}\sum_{n\ge 0}\binom{c+n-1}{n} z^n &= \sum_{n\ge 0}\binom{-c}{n}(-1)^n z^n\\ &= \sum_{n\ge 0}\binom{-c}{n}(-z)^n\\ &\stackrel{(4)}{=} (1-z)^{-c}\end{aligned}$$
6. Setze in (5) $c := m-1$.

Beweis.

1. s. o.
2. Setze in (1) $z \mapsto -z$.
3. Setze in (1): $z \mapsto z^2$.
4. Der Fall $a \in \mathbb{N}_0$ wird durch den Binomialsatz gezeigt, für allgemeine a verweisen wir auf die *Analysis*.
5. $$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} \binom{c+n-1}{n} z^n &= \sum_{n\geq 0} \binom{-c}{n} (-1)^n z^n \\ &= \sum_{n\geq 0} \binom{-c}{n} (-z)^n \\ &\overset{(4)}{=} (1-z)^{-c}\end{aligned}$$
6. Setze in (5) $c := m-1$.

$\square$

Beweis.

1. s. o.
2. Setze in (1) $z \mapsto -z$.
3. Setze in (1): $z \mapsto z^2$.
4. Der Fall $a \in \mathbb{N}_0$ wird durch den Binomialsatz gezeigt, für allgemeine a verweisen wir auf die *Analysis*.
5. $$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\binom{c+n-1}{n}z^n &= \sum_{n\geq 0}\binom{-c}{n}(-1)^n z^n\\ &= \sum_{n\geq 0}\binom{-c}{n}(-z)^n\\ &\overset{(4)}{=} (1-z)^{-c}\end{aligned}$$
6. Setze in (5) $c := m-1$.

Beweis.

1. s. o.
2. Setze in (1) $z \mapsto -z$.
3. Setze in (1): $z \mapsto z^2$.
4. Der Fall $a \in \mathbb{N}_0$ wird durch den Binomialsatz gezeigt, für allgemeine a verweisen wir auf die *Analysis*.
5. $$\sum_{n\geq 0}\binom{c+n-1}{n}z^n = \sum_{n\geq 0}\binom{-c}{n}(-1)^n z^n = \sum_{n\geq 0}\binom{-c}{n}(-z)^n \overset{(4)}{=} (1-z)^{-c}$$
6. Setze in (5) $c := m-1$.

□

Beweis.

1. s. o.
2. Setze in (1) $z \mapsto -z$.
3. Setze in (1): $z \mapsto z^2$.
4. Der Fall $a \in \mathbb{N}_0$ wird durch den Binomialsatz gezeigt, für allgemeine a verweisen wir auf die *Analysis*.
5. $$\sum_{n\geq 0} \binom{c+n-1}{n} z^n = \sum_{n\geq 0} \binom{-c}{n} (-1)^n z^n = \sum_{n\geq 0} \binom{-c}{n} (-z)^n \overset{(4)}{=} (1-z)^{-c}$$
6. Setze in (5) $c := m-1$.

□

Beweis.

1. s. o.
2. Setze in (1) $z \mapsto -z$.
3. Setze in (1): $z \mapsto z^2$.
4. Der Fall $a \in \mathbb{N}_0$ wird durch den Binomialsatz gezeigt, für allgemeine a verweisen wir auf die *Analysis*.
5. $$\sum_{n\geq 0} \binom{c+n-1}{n} z^n = \sum_{n\geq 0} \binom{-c}{n} (-1)^n z^n = \sum_{n\geq 0} \binom{-c}{n} (-z)^n \overset{(4)}{=} (1-z)^{-c}$$
6. Setze in (5) $c := m - 1$.

$\square$

Beispiel

Sei

$$A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot z^n, m \in \mathbb{N}_0 \ .$$

Dann ist

$$z^m \cdot A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot z^{n+m} = \sum_{n\geq m} a_{n-m} \cdot z^n \ .$$

Beispiel

Sei

$$A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot z^n, m \in \mathbb{N}_0 \ .$$

Dann ist

$$z^m \cdot A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot z^{n+m} = \sum_{n\geq m} a_{n-m} \cdot z^n \ .$$

Damit gilt

$$\frac{z^m}{(1-z)^{m+1}} \overset{\text{Satz 7 (6)}}{=} z^m \cdot \sum_{n\geq 0} \binom{m+n}{n} \cdot z^n$$

$$= \sum_{n\geq 0} \binom{m+n}{n} z^{m+n} = \sum_{n\geq m} \binom{n}{n-m} z^n$$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{n\geq 0} \binom{n}{n-m} \cdot z^n\,.$$

$(*)$ Das Gleichheitszeichen gilt, da für $n < m$

$$\binom{n}{n-m} = 0$$

ist.

Damit gilt

$$\frac{z^m}{(1-z)^{m+1}} \overset{\text{Satz 7 (6)}}{=} z^m \cdot \sum_{n\geq 0} \binom{m+n}{n} \cdot z^n$$

$$= \sum_{n\geq 0} \binom{m+n}{n} z^{m+n} = \sum_{n\geq m} \binom{n}{n-m} z^n$$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{n\geq 0} \binom{n}{n-m} \cdot z^n \,.$$

$(*)$ Das Gleichheitszeichen gilt, da für $n < m$

$$\binom{n}{n-m} = 0$$

ist.

Damit gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{z^m}{(1-z)^{m+1}} &\overset{\text{Satz 7 (6)}}{=} z^m \cdot \sum_{n\geq 0} \binom{m+n}{n} \cdot z^n \\
&= \sum_{n\geq 0} \binom{m+n}{n} z^{m+n} = \sum_{n\geq m} \binom{n}{n-m} z^n \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{n\geq 0} \binom{n}{n-m} \cdot z^n \, .
\end{aligned}
$$

$(*)$ Das Gleichheitszeichen gilt, da für $n < m$

$$\binom{n}{n-m} = 0$$

ist.