WS 2003/04

Diskrete Strukturen I

Ernst W. Mayr

mayr@in.tum.de
Institut für Informatik
Technische Universität München

01-16-2004

Definitionen für ungerichtete Graphen (Forts.)

Gradfolge

Definition

Sei $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ so, dass

$$\mathsf{d}(v_1) \geq \mathsf{d}(v_2) \geq \ldots \geq \mathsf{d}(v_n).$$

Dann heißt $\big(\mathsf{d}(v_1), \mathsf{d}(v_2), \ldots, \mathsf{d}(v_n)\big)$ die *Gradfolge von G.*

Bemerkung:

Isomorphe Graphen haben dieselbe Gradfolge.

Definitionen für ungerichtete Graphen (Forts.)

Gradfolge

Definition

Sei $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ so, dass

$$\mathsf{d}(v_1) \geq \mathsf{d}(v_2) \geq \ldots \geq \mathsf{d}(v_n).$$

Dann heißt $\big(\mathsf{d}(v_1), \mathsf{d}(v_2), \ldots, \mathsf{d}(v_n)\big)$ die *Gradfolge von G.*

Bemerkung:

Isomorphe Graphen haben dieselbe Gradfolge.

Satz
Sei $G = (V, E)$. Dann gilt:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E|$$

Beweis.
$\sum d(v)$ zählt Halbkanten. $\square$

Korollar: In jedem Graphen ist die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.

Satz

Sei $G = (V, E)$. Dann gilt:

$$\sum_{v \in V} \mathsf{d}(v) = 2 \cdot |E|$$

Beweis.

$\sum \mathsf{d}(v)$ zählt Halbkanten. $\square$

Korollar: In jedem Graphen ist die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.

Satz

Sei $G = (V, E)$. Dann gilt:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E|$$

Beweis.

$\sum d(v)$ zählt Halbkanten. $\square$

Korollar: In jedem Graphen ist die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.

Reguläre Graphen

Definition

Ein Graph $G = (V; E)$ heißt *k-regulär genau dann, wenn*

$$(\forall v \in V)\Big[d(v) = k\Big].$$

Beispiel

Q_k ist k-regulär; $T_{m_1,\ldots,m_k}$ ist $2k$-regulär.

Reguläre Graphen

Definition

Ein Graph $G = (V; E)$ heißt *k-regulär genau dann, wenn*

$$(\forall v \in V)\Big[d(v) = k\Big].$$

Beispiel

Q_k ist k-regulär; $T_{m_1,\ldots,m_k}$ ist $2k$-regulär.

Teilgraphen

Definition

1. $G' = (V', E')$ heißt *Teilgraph von* $G = (V, E)$*, falls*

$$V' \subseteq V \quad \wedge \quad E' \subseteq E.$$

2. *Ein Graph* $H = (\overline{V}, \overline{E})$ *heißt Unterteilung von* $G = (V, E)$*, falls* H *aus* G *dadurch entsteht, dass jede Kante* $(v, w) \in E$ *durch einen Pfad* $v = \overline{v}_0, \overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_k = w$ *ersetzt wird. Dabei sind* $\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_{k-1}$ *jeweils neue Knoten.*

Teilgraphen

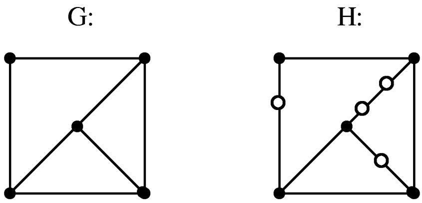
Definition

1. $G' = (V', E')$ heißt *Teilgraph von* $G = (V, E)$, *falls*

$$V' \subseteq V \quad \wedge \quad E' \subseteq E.$$

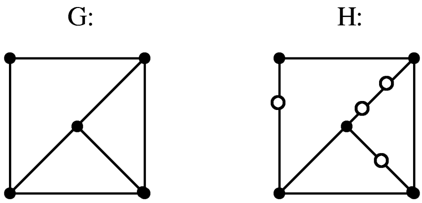
2. *Ein Graph* $H = (\overline{V}, \overline{E})$ *heißt Unterteilung von* $G = (V, E)$, *falls* H *aus* G *dadurch entsteht, dass jede Kante* $(v, w) \in E$ *durch einen Pfad* $v = \overline{v}_0, \overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_k = w$ *ersetzt wird. Dabei sind* $\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_{k-1}$ *jeweils neue Knoten.*

Beispiel (Unterteilung)



Bemerkung: (Satz von Kuratowski) Ein Graph ist genau dann nicht planar, wenn er eine Unterteilung des K_5 oder des $K_{3,3}$ als Teilgraph enthält.

Beispiel (Unterteilung)



Bemerkung: (Satz von Kuratowski) Ein Graph ist genau dann nicht planar, wenn er eine Unterteilung des K_5 oder des $K_{3,3}$ als Teilgraph enthält.

Induzierte Teilgraphen

Definition

Ein Graph $G' = (V', E')$ heißt *(knoten-)induzierter Teilgraph von* $G = (V, E)$, *falls* G' *Teilgraph von* G *ist und* $E' = E \cap (V' \times V')$.

Beispiel

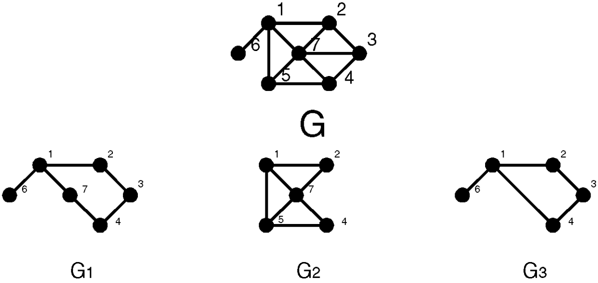
G_1 ist Teilgraph von G, aber nicht knoteninduziert; G_2 ist der von $\{1, 2, 4, 5, 7\}$ induzierte Teilgraph; G_3 ist nicht Teilgraph von G.

Induzierte Teilgraphen

Definition

Ein Graph $G' = (V', E')$ heißt *(knoten-)induzierter Teilgraph von* $G = (V, E)$*, falls* G' *Teilgraph von* G *ist und* $E' = E \cap (V' \times V')$*.*

Beispiel



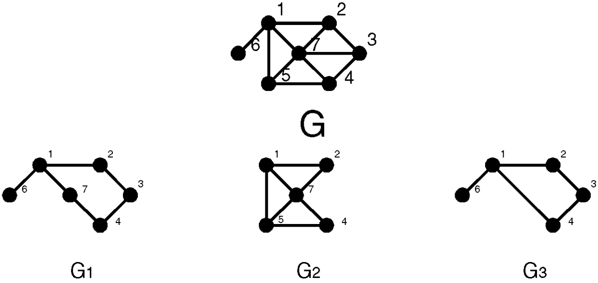
G_1 ist Teilgraph von G, aber nicht knoteninduziert; G_2 ist der von $\{1, 2, 4, 5, 7\}$ induzierte Teilgraph; G_3 ist nicht Teilgraph von G.

Induzierte Teilgraphen

Definition

Ein Graph $G' = (V', E')$ heißt *(knoten-)induzierter Teilgraph von* $G = (V, E)$, *falls* G' *Teilgraph von* G *ist und* $E' = E \cap (V' \times V')$.

Beispiel



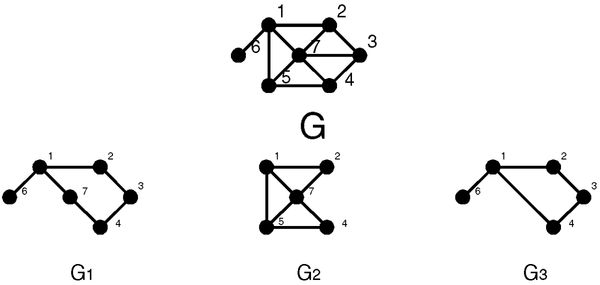
G_1 ist Teilgraph von G, aber nicht knoteninduziert; G_2 ist der von $\{1, 2, 4, 5, 7\}$ induzierte Teilgraph; G_3 ist nicht Teilgraph von G.

Induzierte Teilgraphen

Definition

Ein Graph $G' = (V', E')$ heißt *(knoten-)induzierter Teilgraph von* $G = (V, E)$, *falls* G' *Teilgraph von* G *ist und* $E' = E \cap (V' \times V')$.

Beispiel



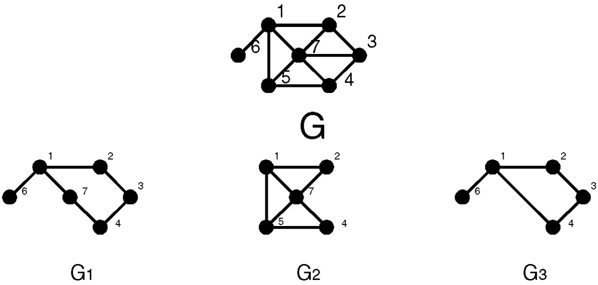
G_1 ist Teilgraph von G, aber nicht knoteninduziert; G_2 ist der von $\{1, 2, 4, 5, 7\}$ induzierte Teilgraph; G_3 ist nicht Teilgraph von G.

Induzierte Teilgraphen

Definition

Ein Graph $G' = (V', E')$ heißt *(knoten-)induzierter Teilgraph von* $G = (V, E)$, *falls* G' *Teilgraph von* G *ist und* $E' = E \cap (V' \times V')$.

Beispiel

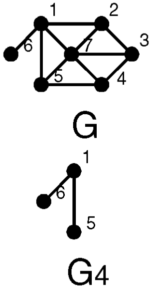


G_1 ist Teilgraph von G, aber nicht knoteninduziert; G_2 ist der von $\{1, 2, 4, 5, 7\}$ induzierte Teilgraph; G_3 ist nicht Teilgraph von G.

Sei $V' \subseteq V$. Dann bezeichnet $G \setminus V'$ den durch $V \setminus V'$ induzierten Teilgraphen von G.

Beispiel

$G_4 = G \setminus \{2, 3, 4, 7\}$



Erreichbarkeit

Definition

Sei $G = (V, E)$; $u, v \in V$. v heißt von u aus in G *erreichbar, falls G einen Pfad mit Endknoten u und v enthält.*

Satz

Die Relation $R \subseteq V \times V$ mit

$$uRv \overset{:}{\Longleftrightarrow} \text{„}v \text{ ist von } u \text{ aus in } G \text{ erreichbar“}$$

ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis.

Es ist leicht zu sehen, dass R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. □

Erreichbarkeit

Definition

Sei $G = (V, E)$; $u, v \in V$. v heißt von u aus in G *erreichbar, falls G einen Pfad mit Endknoten u und v enthält.*

Satz

Die Relation $R \subseteq V \times V$ mit

$$uRv \;\overset{:}{\Longleftrightarrow}\; \text{„}v \text{ ist von } u \text{ aus in } G \text{ erreichbar“}$$

ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis.

Es ist leicht zu sehen, dass R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. $\square$

Erreichbarkeit

Definition

Sei $G = (V, E)$; $u, v \in V$. v heißt von u aus in G *erreichbar, falls G einen Pfad mit Endknoten u und v enthält.*

Satz

Die Relation $R \subseteq V \times V$ mit

$$uRv \overset{:}{\iff} \text{„}v \text{ ist von } u \text{ aus in } G \text{ erreichbar“}$$

ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis.

Es ist leicht zu sehen, dass R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. $\square$

Zusammenhangskomponenten

Die Äquivalenzklassen der Erreichbarkeitsrelation heißen *Zusammenhangskomponenten von* G*.* G *heißt zusammenhängend, falls* G *aus genau einer Zusammenhangskomponente besteht.*

Zusammenhangskomponenten

Die Äquivalenzklassen der Erreichbarkeitsrelation heißen *Zusammenhangskomponenten von* G*.* G *heißt zusammenhängend, falls* G *aus genau einer Zusammenhangskomponente besteht.*

Bäume

Definition

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *Baum, falls* G *zusammenhängend und kreisfrei ist.*

Spannbäume

Definition

Ein Teilgraph $T = (V', E')$ von $G = (V, E)$ heißt *Spannbaum von G, falls T ein Baum und $V' = V$ ist.*

Satz

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. *$G = (V, E)$ ist ein nichtleerer Baum.*
2. *Für zwei Knoten $u, v \in V$ mit $u \neq v$ und $V \neq \emptyset$ gibt es genau einen einfachen Pfad zwischen u und v.*
3. *G ist zusammenhängend und $|V| = |E| + 1$*

Spannbäume

Definition

Ein Teilgraph $T = (V', E')$ von $G = (V, E)$ heißt *Spannbaum von G, falls T ein Baum und $V' = V$ ist.*

Satz

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. *$G = (V, E)$ ist ein nichtleerer Baum.*
2. *Für zwei Knoten $u, v \in V$ mit $u \neq v$ und $V \neq \emptyset$ gibt es genau einen einfachen Pfad zwischen u und v.*
3. *G ist zusammenhängend und $|V| = |E| + 1$*

Spannbäume

Definition

Ein Teilgraph $T = (V', E')$ von $G = (V, E)$ heißt *Spannbaum von G, falls T ein Baum und $V' = V$ ist.*

Satz

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. *$G = (V, E)$ ist ein nichtleerer Baum.*
2. *Für zwei Knoten $u, v \in V$ mit $u \neq v$ und $V \neq \emptyset$ gibt es genau einen einfachen Pfad zwischen u und v.*
3. *G ist zusammenhängend und $|V| = |E| + 1$*

Spannbäume

Definition

Ein Teilgraph $T = (V', E')$ von $G = (V, E)$ heißt *Spannbaum von* G*, falls* T *ein Baum und* $V' = V$ *ist.*

Satz

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. $G = (V, E)$ *ist ein nichtleerer Baum.*
2. *Für zwei Knoten* $u, v \in V$ *mit* $u \neq v$ *und* $V \neq \emptyset$ *gibt es genau einen einfachen Pfad zwischen* u *und* v*.*
3. G *ist zusammenhängend und* $|V| = |E| + 1$

Beweis

$1. \Rightarrow 2.$

Seien $u, v \in V$, $u \neq v$. Da G zusammenhängend ist, muss mindestens ein Pfad zwischen u und v existieren.

Widerspruchsannahme: Es gibt zwei verschiedene Pfade

zwischen u und v.

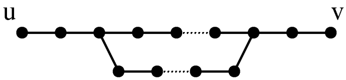
Dann gibt es einen Kreis in G, was einen Widerspruch zur Annahme darstellt.

Beweis

1\. $\Rightarrow$ 2.

Seien $u, v \in V$, $u \neq v$. Da G zusammenhängend ist, muss mindestens ein Pfad zwischen u und v existieren. Widerspruchsannahme: Es gibt zwei verschiedene Pfade

zwischen u und v.



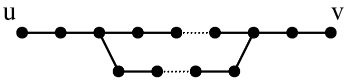
Dann gibt es einen Kreis in G, was einen Widerspruch zur Annahme darstellt.

Beweis

1. $\Rightarrow$ 2.

Seien $u, v \in V$, $u \neq v$. Da G zusammenhängend ist, muss mindestens ein Pfad zwischen u und v existieren.
Widerspruchsannahme: Es gibt zwei verschiedene Pfade

zwischen u und v.



Dann gibt es einen Kreis in G, was einen Widerspruch zur Annahme darstellt.

$2. \Rightarrow 3.$

Beweis durch Induktion:

Dass G zusammenhängend und V nichtleer sein muss, ist klar. Für $|E| = 0$ gilt $|V| = 1$ (Induktionsanfang). G muss

einen Knoten mit Grad 1 enthalten. Verwende nun folgende Konstruktion: Wähle $u \in V$ beliebig. Ist $\deg(u) \neq 1$, wähle einen Nachbarn u_1 von u. Setze die Konstruktion fort, ohne einen bereits verwendeten Knoten nochmals zu wählen. Da V endlich und G zusammenhängend ist, kommt man so schließlich zu einem Blatt (Knoten mit Grad 1). Entfernt man

nun dieses Blatt (sowie die inzidente Kante) und wendet man auf den entstehenden Graphen die Induktionsvoraussetzung an, erhält man:

$$(|V| - 1) - 1 = |E| - 1$$

Damit ist bewiesen, dass $|V| = |E| + 1$.

$2. \Rightarrow 3.$

Beweis durch Induktion:

Dass G zusammenhängend und V nichtleer sein muss, ist klar. Für $|E| = 0$ gilt $|V| = 1$ (Induktionsanfang). G muss

einen Knoten mit Grad 1 enthalten. Verwende nun folgende Konstruktion: Wähle $u \in V$ beliebig. Ist $\deg(u) \neq 1$, wähle einen Nachbarn u_1 von u. Setze die Konstruktion fort, ohne einen bereits verwendeten Knoten nochmals zu wählen. Da V endlich und G zusammenhängend ist, kommt man so schließlich zu einem Blatt (Knoten mit Grad 1). Entfernt man

nun dieses Blatt (sowie die inzidente Kante) und wendet man auf den entstehenden Graphen die Induktionsvoraussetzung an, erhält man:

$$(|V| - 1) - 1 = |E| - 1$$

Damit ist bewiesen, dass $|V| = |E| + 1$.

$2. \Rightarrow 3.$

Beweis durch Induktion:

Dass G zusammenhängend und V nichtleer sein muss, ist klar. Für $|E| = 0$ gilt $|V| = 1$ (Induktionsanfang). G muss

einen Knoten mit Grad 1 enthalten. Verwende nun folgende Konstruktion: Wähle $u \in V$ beliebig. Ist $\deg(u) \neq 1$, wähle einen Nachbarn u_1 von u. Setze die Konstruktion fort, ohne einen bereits verwendeten Knoten nochmals zu wählen. Da V endlich und G zusammenhängend ist, kommt man so schließlich zu einem Blatt (Knoten mit Grad 1). Entfernt man

nun dieses Blatt (sowie die inzidente Kante) und wendet man auf den entstehenden Graphen die Induktionsvoraussetzung an, erhält man:

$$\big(|V| - 1\big) - 1 = |E| - 1$$

Damit ist bewiesen, dass $|V| = |E| + 1$.

$3. \Rightarrow 1.$

Sei nun G zusammenhängend mit $|V| = |E| + 1$.
Zu zeigen: G ist kreisfrei. Widerspruchsannahme: G enthält einen einfachen Kreis $C = (V_C, E_C)$.
Da wir G aufbauen können, indem wir die Knoten in $V \setminus V_C$ mit jeweils einer neuen Kante hinzufügen und zum Schluss noch eventuell übrig gebliebene Kanten hinzufügen, gilt:

$$|V| = |V_C| + |V \setminus V_C| \leq |E_C| + |E \setminus E_C| = |E|$$

Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $|V| = |E| + 1$.

q. e. d.

$3. \Rightarrow 1.$

Sei nun G zusammenhängend mit $|V| = |E| + 1$.
Zu zeigen: G ist kreisfrei. Widerspruchsannahme: G enthält einen einfachen Kreis $C = (V_C, E_C)$.
Da wir G aufbauen können, indem wir die Knoten in $V \setminus V_C$ mit jeweils einer neuen Kante hinzufügen und zum Schluss noch eventuell übrig gebliebene Kanten hinzufügen, gilt:

$$|V| = |V_C| + |V \setminus V_C| \leq |E_C| + |E \setminus E_C| = |E|$$

Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $|V| = |E| + 1$.

q. e. d.

Korollar: Sei $T = (V, E)$ ein Baum mit $|V| = n$ und sei $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ die Gradfolge von T, dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2 \cdot |E| = 2n - 2$$

Satz ((Arthur Cayley, 1889))

Sei $t(n)$ die Anzahl der verschiedenen markierten Bäume mit Knotenmenge $\{1, \dots, n\}$. Dann gilt:

$$t(n) = n^{n-2}$$

Beispiel

- $n = 2$:
- $n = 3$:

Satz ((Arthur Cayley, 1889))

Sei $t(n)$ die Anzahl der verschiedenen markierten Bäume mit Knotenmenge $\{1, \dots, n\}$. Dann gilt:

$$t(n) = n^{n-2}$$

Beispiel

- $n = 2$:

- $n = 3$:

Satz ((Arthur Cayley, 1889))

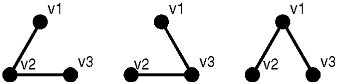
Sei $t(n)$ die Anzahl der verschiedenen markierten Bäume mit Knotenmenge $\{1, \ldots, n\}$. Dann gilt:

$$t(n) = n^{n-2}$$

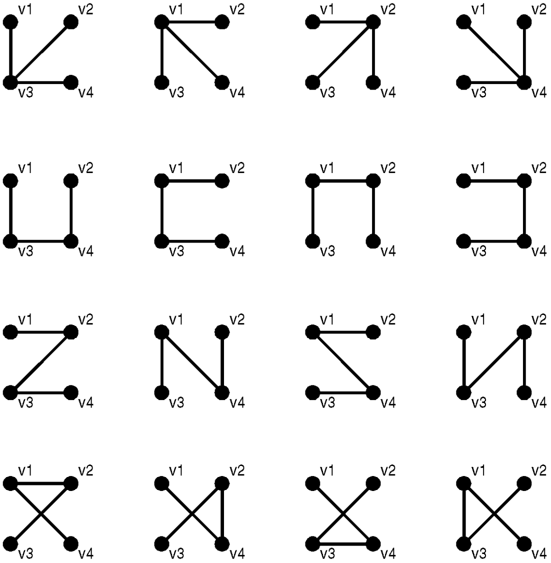
Beispiel

- $n = 2$:

- $n = 3$:



- $n = 4$:



Beweis

Wir geben eine Bijektion zwischen der Menge $\mathcal{T}(n)$ der markierten Spannbäume mit n Knoten und der Menge $\{1, \ldots, n\}^{n-2}$ an. (Diese Bijektion geht auf H. Prüfer zurück; man bezeichnet sie deshalb auch als *Prüfer-Code.)*

Sei $T \in \mathcal{T}(n)$. Konstruiere $(a_1, \ldots, a_{n-2})$, $a_i \in \{1, \ldots, n\}$ wie folgt:

```
for i=1 to n-2 do
    v_i := Blatt mit minimalem Index
    a_i := Index des Nachbarn von v_i in T
    T := T \ {v_i}
od
```

Beispiel

Prüfer-Code: $(2, 4, 4, 2, 1, 11, 11, 1, 11)$

Sei $T \in \mathcal{T}(n)$. Konstruiere $(a_1, \ldots, a_{n-2})$, $a_i \in \{1, \ldots, n\}$ wie folgt:

```
for i=1 to n-2 do
    v_i := Blatt mit minimalem Index
    a_i := Index des Nachbarn von v_i in T
    T := T \ {v_i}
od
```

Beispiel

Prüfer-Code: $(2, 4, 4, 2, 1, 11, 11, 1, 11)$

Sei $T \in \mathcal{T}(n)$. Konstruiere $(a_1, \ldots, a_{n-2})$, $a_i \in \{1, \ldots, n\}$ wie folgt: `for` i`=1` `to` $n-2$ `do`

v_i := Blatt mit minimalem Index

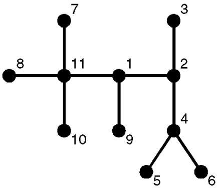
a_i := Index des Nachbarn von v_i in T

T := $T \setminus \{v_i\}$

`od`

Beispiel

Prüfer-Code: $(2, 4, 4, 2, 1, 11, 11, 1, 11)$



Sei $(a_1, \ldots, a_{n-2})$ ein gegebener Prüfer-Code; sei f_i sei die Anzahl des Auftretens von i in $(a_1, \ldots, a_{n-2})$. Wenn ein Blatt, das Nachbar von a_i ist, im Algorithmus gestrichen wird, ist a_i nicht das kleinste Blatt, sondern innerer Knoten:

$$d(a_i) \geq f_i + 1$$

Da

$$n - 2 = \sum_{i=1}^{n} f_i \leq \sum_{i=1}^{n} (d(v_i) - 1) = 2n - 2 - n = n - 2$$

gilt

$$(\forall i)\Big[f_i = d(a_i) - 1\Big]$$

Also ergeben sich aus den f_i die Knotengrade. Insbesondere sind die Knoten mit $f_i = 0$ (also die, die nicht im Code auftauchen), genau die Blätter des Baumes.

Sei $(a_1, \ldots, a_{n-2})$ ein gegebener Prüfer-Code; sei f_i sei die Anzahl des Auftretens von i in $(a_1, \ldots, a_{n-2})$. Wenn ein Blatt, das Nachbar von a_i ist, im Algorithmus gestrichen wird, ist a_i nicht das kleinste Blatt, sondern innerer Knoten:

$$d(a_i) \geq f_i + 1$$

Da

$$n - 2 = \sum_{i=1}^{n} f_i \leq \sum_{i=1}^{n} \big(d(v_i) - 1\big) = 2n - 2 - n = n - 2$$

gilt

$$(\forall i)\Big[f_i = d(a_i) - 1\Big]$$

Also ergeben sich aus den f_i die Knotengrade. Insbesondere sind die Knoten mit $f_i = 0$ (also die, die nicht im Code auftauchen), genau die Blätter des Baumes.

Sei $(a_1, \ldots, a_{n-2})$ ein gegebener Prüfer-Code; sei f_i sei die Anzahl des Auftretens von i in $(a_1, \ldots, a_{n-2})$. Wenn ein Blatt, das Nachbar von a_i ist, im Algorithmus gestrichen wird, ist a_i nicht das kleinste Blatt, sondern innerer Knoten:

$$d(a_i) \geq f_i + 1$$

Da

$$n - 2 = \sum_{i=1}^{n} f_i \leq \sum_{i=1}^{n} \big(d(v_i) - 1\big) = 2n - 2 - n = n - 2$$

gilt

$$(\forall i)\Big[f_i = d(a_i) - 1\Big]$$

Also ergeben sich aus den f_i die Knotengrade. Insbesondere sind die Knoten mit $f_i = 0$ (also die, die nicht im Code auftauchen), genau die Blätter des Baumes.

Umkehrabbildung: Gegeben $(a_1, \ldots, a_{n-2})$

```
for i=1 to n do
    d(v_i):=f_i+1
od
B:=∅; T:=∅
for i=1 to n-2 do
    b:= min_{1≤j≤n} {j; j ∉ {a_i, a_{i+1}, ..., a_{n-2}} ∪ B}
    füge Kante (b, a_i) zu T hinzu
    B:=B ∪ {b}
od
füge zu T die letzte Kante gemäß der Gradbedingung hinzu
```

q. e. d.

Brücken

Definition

Eine Kante e eines Graphen $G = (V, E)$ heißt *Brücke, falls* $G' = \big(V, E \setminus \{e\}\big)$ *mehr Zusammenhangskomponenten hat als* G.

Beispiel

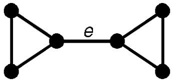
Beobachtung: Eine Kante e ist genau dann eine Brücke, wenn es keinen einfachen Kreis gibt, der e enthält.

Brücken

Definition

Eine Kante e eines Graphen $G = (V, E)$ heißt *Brücke, falls* $G' = \big(V, E \setminus \{e\}\big)$ *mehr Zusammenhangskomponenten hat als* G.

Beispiel

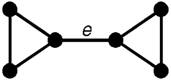


Beobachtung: Eine Kante e ist genau dann eine Brücke, wenn es keinen einfachen Kreis gibt, der e enthält.

Brücken

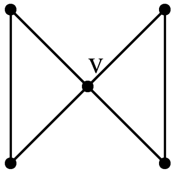
Definition
Eine Kante e eines Graphen $G = (V, E)$ heißt *Brücke, falls* $G' = \big(V, E \setminus \{e\}\big)$ *mehr Zusammenhangskomponenten hat als* G.

Beispiel



Beobachtung: Eine Kante e ist genau dann eine Brücke, wenn es keinen einfachen Kreis gibt, der e enthält.

Anmerkung: (ohne Definition) Der Knoten v in der folgenden Abbildung ist ein *Artikulationsknoten:*



Abstand

Definition

Seien u, v zwei Knoten und P ein Pfad in G von u nach v mit einer minimalen Anzahl k von Kanten. Dann heißt

$$\mathsf{d}(u, v) := k$$

der *Abstand von u und v in G*. *Wir setzen $\mathsf{d}(u, v) := \infty$, falls u und v in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von G liegen.*

$$D(G) := \max\{\mathsf{d}(u, v); u, v \in V\}$$

heißt der Durchmesser des Graphen G.

Abstand

Definition

Seien u, v zwei Knoten und P ein Pfad in G von u nach v mit einer minimalen Anzahl k von Kanten. Dann heißt

$$\mathsf{d}(u,v) := k$$

der *Abstand von u und v in G. Wir setzen $\mathsf{d}(u,v) := \infty$, falls u und v in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von G liegen.*

$$D(G) := \max\{\mathsf{d}(u,v); u, v \in V\}$$

heißt der Durchmesser des Graphen G.

Abstand

Definition

Seien u, v zwei Knoten und P ein Pfad in G von u nach v mit einer minimalen Anzahl k von Kanten. Dann heißt

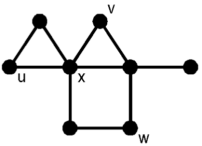
$$\mathsf{d}(u, v) := k$$

der *Abstand von u und v in G. Wir setzen $\mathsf{d}(u, v) := \infty$, falls u und v in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von G liegen.*

$$D(G) := \max\left\{\mathsf{d}(u, v); u, v \in V\right\}$$

heißt der Durchmesser des Graphen G.

Beispiel

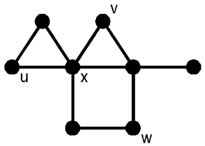


$\mathsf{d}(u, v) = 2$, $\mathsf{d}(u, w) = 3$, $\mathsf{d}(u, x) = 1$, $\mathsf{D}(G) = 3$.

Beobachtung: d erfüllt die Dreiecksungleichung, ist also eine Metrik:

$$\mathsf{d}(u, v) \leq \mathsf{d}(u, w) + \mathsf{d}(w, v)$$

Beispiel



$\mathsf{d}(u,v)=2$, $\mathsf{d}(u,w)=3$, $\mathsf{d}(u,x)=1$, $\mathsf{D}(G)=3$.

Beobachtung: d erfüllt die Dreiecksungleichung, ist also eine Metrik:

$$\mathsf{d}(u,v)\le \mathsf{d}(u,w)+\mathsf{d}(w,v)$$