Satz: Für jeden Graph G mit $|E| = m$

gilt: $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + 1/4}$

Bew.: Sei c Knotenfärbung mit $k = \chi(G)$ Farben: Zwischen je zwei Farbklassen gibt es dann mindestens 1 Kante (sonst für beide Klassen dieselbe Farbe!) Also:

$$m \geq \binom{k}{2} = \frac{1}{2} k(k-1). \checkmark$$

Satz: Für jeden Graph G gilt

$$\chi(G) \leq 1 + \max\{\delta(H) \mid H \subseteq G\}$$

$\uparrow$ schwacher Teilgraph

$\delta(H) = \min\{\deg(v) \mid v \text{ Knoten von } H\}$.

Bew: Genauere Analyse des "Greedy Coloring"-Algorithmus.

Folg: Jeder Graph besitzt einen Teilgraph H mit $\delta(H) \geq \chi(G) - 1$

Folg: Ist G vollständig oder ein Kreis ungerader Länge so gilt

$$\chi(G) = \Delta(G) + 1.$$

Folg: K_5 ist nicht planar

Bew: $\binom{5}{2} = 10$ Kanten, 5 Knoten: $10 \nleq 3\cdot 5-6$

Folg: In planarem Graphen mit $|V| \geq 4$ gibt es mindestens 4 Knoten vom Grad ≤ 5

Bew: Indirekt. Sei G Gegenbeisp. mit kleinster Zahl von Knoten: $|V| \geq 7$ (bei $|V| = 6$ ist stets $\deg(v) \leq 5$)

Dann enthält G keine isolierten Knoten ($\deg(\ ) = 0$) und keine Knoten vom Grad 1, denn diese könnte man weglassen – der Restgraph hätte immer noch höchstens 3 Knoten vom Grad ≤ 5 und wäre planar. Das Weglassen kann man solange wiederholen, bis jeder Knoten auf einem Kreis liegt. In jedem Kreis kann man Knoten vom Grad 2 mit ihren Kanten durch eine Kante ersetzen:

Also muß in G stets $\deg(v) \geq 3$ sein. Dann

$$3|V| - 6 \geq |E| = \frac{1}{2}\sum_{v\in V} \deg(v) \geq \frac{1}{2}\left(3\cdot 3 + (|V|-3)\cdot 6\right) =$$

(Euler)

$$= \frac{9}{2} + 3|V| - 9 = 3|V| - 4{,}5 \quad \text{Widersp.}$$

Beisp: Sei G ebener Graph mit 9 Knoten jeweils vom Grad k; die Zahl der Gebiete sei 11.
Wie groß ist k?

Überlegung: Anzahl Knoten mit ungeraden Grad ist gerade, also ist k gerade. (4

Ann: $k \geq 6$: Dann $|E| = \frac{1}{2} \cdot 9k > 3 \cdot \underbrace{9}_{|V|} - 6$ Widerspr.

Ann: $k = 2$: Dann G Vereinigung von höchstens 3 disjunkten Kreisen mit höchstens 4 Gebieten Widerspr.

Also $k = 4$, $|E| = 18$.

Satz: Für jeden dreiecksfreien planaren Graphen mit $|V| \geq 3$ gilt $|E| \leq 2|V| - 4$.
(dreiecksfrei: K_3 ist nicht Teilgraph.)

Bew: Jedes Gebiet wird von ≥ 4 Kanten begrenzt:
$2|E| \geq 4 \cdot (\#\text{Geb.}) \geq 4|E| - 4|V| + 8$

Folg: $K_{3,3}$ ist nicht planar

Bew: $K_{3,3}$ ist dreiecksfrei $|E| = 9 \not\leq 2 \cdot 6 - 4$.

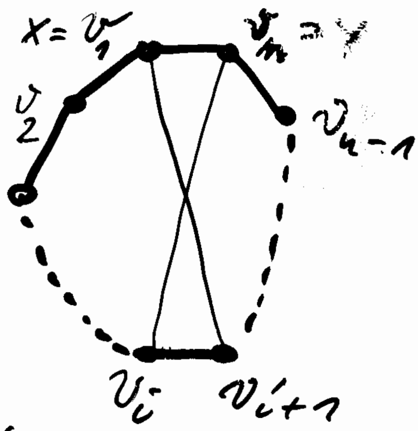
Folg: Jeder planare dreiecksfreie Graph besitzt mindestens einen Knoten vom Grad ≤ 3.

Bew: Sei G Gegenbeispiel mit kleinster Knotenzahl: $|V| \geq 5$. Dann $2|V| - 4 \geq |E| \geq |V| \cdot 4$, also $|V| - 2 \geq 2|V|$ Widerspr.

Satz: Gilt in G: (*) $\deg(x) + \deg(y) \geq |V|$ für alle $x, y \in V$ mit $x \neq y$ und $\{x, y\} \notin E$, so ist G hamiltonsch.

Bew: Indirekt: Sei G Gegenbeispiel mit maximaler Kantenzahl. ($|V|$ fest)
G ist kein vollständiger Graph K_n, denn jeder K_n ist hamiltonsch.
G besitzt also mindestens eine "Nichtkante" $\{x, y\} \subseteq V$, $x \neq y$, $\{x, y\} \notin E$.
Vergrößere G zu $G' = (V, E' = E \cup \{x, y\})$
Da die Knotengrade in G' höchstens größer als in G sind, gilt (*) auch in G'.
Da G maximal war, enthält G' einen Hamiltonkreis C, dieser enthält $\{x, y\}$, sonst wäre C in G. Sei nun etwa

$$C = (v_1 = x, v_2, \ldots v_n = y)$$



$$S := \{v_i \mid 1 \leq i < n, \{x, v_{i+1}\} \in E\}$$

$$T := \{v_i \mid 1 \leq i < n, \{y, v_i\} \in E\}$$

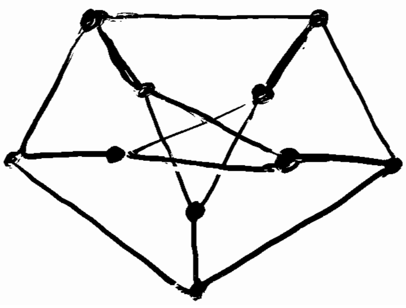
Dann $y = v_n \notin S \cup T$ (weil $\{x, y\} \notin E$),
also $|S \cup T| < |V| = n$. (alle Knoten in C!)

Nun: $|S| = \deg(x)$, $|T| = \deg(y)$, also wg ⊛ $|S \cap T| > 0$. Sei $v_i \in S \cap T$ beliebig.

Ersetze in C die Kanten $\{x, y\}$ und $\{v_i, v_{i+1}\}$ durch $\{x, v_{i+1}\}$ und $\{y, v_i\}$. Das ergibt einen Hamiltonkreis von G. Wdspr.!

<u>Bem</u>: Vermutung: Es ex. kein Algorithmus der wesentlich schneller als in der Zeit $O(2^n)$ (also nicht in $O(p(n))$, p Polynom) für jeden Graphen G mit $|V| = n$ entscheidet, ob er hamiltonsch ist oder nicht.
(das Problem ist NP-vollständig – d.h. wenn man eine Lösung rät (nicht-deterministisch) kann man in Polynomialzeit feststellen, ob sie richtig ist; und alle so lösbaren Problem sind „<u>äquivalent</u>" zu „hamiltonsch?".)

Graph ohne Hamilton-kreis: Petersen-Graph.



Idee für Algorithmus: Bei bipartiten Graphen: Breitensuche

Allgemein: Greedy-Algorithmus (gieriges Vorgehen)

Knoten beliebig ordnen (numerieren).

Greedy vertice Coloring

Eingabe: Graph $G = (V, E)$, wobei $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

Ausgabe: Färbung $c[v]$.

$c[v_1] := 1$;

for $i := 2$ **to** n **do**

$c[v_i]$:= Kleinste nat. Zahl, die nicht in der Menge

$\{c[x] \mid x \in \Gamma(v_i) \cap \{v_1, \ldots, v_{i-1}\}\}$

vorkommt;

end do

Termination klar ("for")

Stets ist Färbung von G_i = "von $\{v_1, \ldots, v_i\}$ induzierter Teilgraph von G" korrekt.

$$c[v_i] \leq (\underbrace{\text{Grad } d_i \text{ von } v_i \text{ in } G_i}) + 1 \leq \deg_G(v) + 1 \leq \Delta(G) + 1$$

Verbesserung des Alg. mit Hilfe von : Wähle Numerierung so, daß v_i in G_i minimalen Grad hat. Das geht so: Wähle v_n so, daß $\deg(v_n)$ minimal in G, v_{n-1} so, daß $\deg(v_{n-1})$ " " $G \setminus \{v_n\}$ etc.

2

Satz (Brooks): Es ex. Alg., der Graphen G in der Zeit $\mathcal{O}(|E|+|V|)$ so färbt, daß für die Zahl $A(G)$ der verwendeten Farben gilt:

$$\chi(G) \le A(G) \le \begin{cases} \Delta(G)+1 & \text{falls } G=K_n \text{ oder } G=C_{2n+1} \\ \Delta(G) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Lemma: Für jeden Graphen G ex. Nummerierung der Knoten, bei der der Greedy-Alg. genau $\chi(G)$ Farben benötigt.

Bew: Sei $C_1, C_2 \dots C_k$, $k=\chi(G)$ eine Partition von V in Mengen gleichgefärbter Knoten. Die Nummerierung sei so, daß jeder Knoten in C_j in jeder der Klassen $C_1, \dots, C_{j-1}$ mindestens einen Nachbarn hat. Nummerierung: Mit den Knoten aus C_1 beginnen, danach die aus C_2, ...

Beisp: Für jedes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ ex Graph G mit $\chi(G) \le 2$ aber $\chi'(G) = n$:

z.B.: Sterngraph mit n Blättern