Diskrete Strukturen I

5. Untergruppennormalteiler

Zeigen Sie: Eine Untergruppe H einer (endlichen oder unendlichen) Gruppe G ist Normalteiler von G genau dann, wenn $aHa^{-1} \subseteq H$ für alle $a \in G$.
(Zur Erinnerung: H heißt Normalteiler von G, falls $Hb = bH \ \forall\ b \in G$.)

6. Abelgruppe

Sei G eine Gruppe so dass $\forall a \in G : aa = 1$. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.
(Zur Erinnerung: Eine Gruppe heisst abelsch, wenn $\forall x, y \in G : xy = yx$.)

7. Transformationsmenge

Betrachten Sie die Menge der Transformationen

$$R_{abcd}(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

von $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ nach $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $\det \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \neq 0$. Dabei sei für alle $\tilde{x}$ mit $c\tilde{x} + d = 0$

$$R_{a,b,c,d}(\tilde{x}) = \infty.$$

a) Finden Sie eine sinnvolle Definition für $R_{abcd}(\infty)$ indem Sie einen aus der Analysis wohlbekannten Weg einschlagen.

b) Zeigen Sie: Die R_{abcd} bilden unter Komposition ein Monoid.

c) Für welche a, b, c, d ist das Monoid eine Gruppe?

(Zur Erinnerung: Ein Monoid hat es schon fast zur Gruppe gebracht, ihm fehlt nur das Inverse.)

8. Gruppenbildung

Zeigen Sie, dass $N = \{m \in \mathbb{N}, 0 < m < n\}$ mit der Multiplikation mod n genau dann eine Gruppe bildet, wenn n eine Primzahl ist.