
Diskrete Strukturen I

31. Rekursionsformel

Sei a_n für $n \geq 0$ definiert durch $a_n = (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n$. Zeigen Sie, dass stets $a_n \in \mathbb{N}$ und geben Sie eine möglichst einfache Rekursionsformel für die a_n an.

32. Erzeugendenintegral

Sei $A(z)$ die Erzeugendenfunktion der Folge a_n für $n \geq 0$. Bestimmen Sie die Erzeugendenfunktion für $\int_0^z A(t) dt$.

33. Binomialquadrat

Beweisen Sie mit Hilfe geeigneter Erzeugendenfunktionen, dass

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

34. Erzeugendenrechnung

Sei $A(z)$ die Erzeugendenfunktion der Folge a_n für $n \geq 0$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{2}(A(z) + A(-z)) = \sum_{n \geq 0} a_{2n} z^{2n}$$

sowie

$$\frac{1}{2}(A(z) - A(-z)) = \sum_{n \geq 0} a_{2n+1} z^{2n+1}.$$