Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Theoretische Informatik und
Grundlagen der Künstlichen Intelligenz
Prof. Dr. Dr. h.c. Wilfried Brauer

Wintersemester 2004/05
Diskrete Strukturen I
Mittelklausur
10. Dezember 2004
Sebastian Wernicke

Diskrete Strukturen I

Name	Vorname	Studiengang	Matrikelnummer
....	....	☐ Diplom ☐ Inform. ☐ Bachelor ☐ BioInf. ☐ Lehramt ☐ WirtInf.	....

Hörsaal	Reihe	Sitzplatz	Unterschrift
....	....	....	....

Allgemeine Hinweise

- **Bitte füllen Sie obige Felder in Druckbuchstaben aus und unterschreiben Sie!**
- **Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift oder in roter/grüner Farbe!**
- **Bitte machen Sie deutlich erkennbar, welche Lösung zu welcher Aufgabe gehört.**
- **Extrem schwere Lesbarkeit kann im Zweifelsfall zu Punktabzug führen.**
- **Als einziges Hilfsmittel zur Klausur ist ein handbeschriebenes Blatt DIN A4 zugelassen. Bei Verwendung anderer Hilfsmittel wird die gesamte Klausur mit null Punkten bewertet.**
- **Die Arbeitszeit beträgt 120 Minuten. Insgesamt sind maximal 70 Punkte erreichbar.**

Hörsaal verlassen von ...... bis ...... / von ...... bis ......

Vorzeitig abgegeben um ......

Besondere Bemerkungen:

	A0	A1	A2	A3	A4	A5	Σ	Korrektor
Erstkorrektur								
Zweitkorrektur								

0. Aufwärmübungen [1+2+4 = 7 Punkte]

a) Nennen Sie jeweils eine Sache, die Ihnen an der Vorlesung bisher gut gefällt, und eine, die wir verbessern können.

b) Wir definieren uns rekursiv eine Folge F von Zahlen: $F_0 = 2$, $F_1 = 3$, $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ für alle $i \geq 2$. die ersten Zahlen der Folge sind also $2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$
Wo liegt nun der Argumentationsfehler in folgendem Induktionsbeweis: "Behauptung: Alle Zahlen F sind gerade. Induktionsvoraussetzung erfüllt, da $F_0 = 2$. Nehme nun an, die Behauptung sei für alle $0 \leq i \leq n$ wahr. Dann sind nach der Annahme F_{n-1} und F_n gerade. Per Definition ist $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$ damit auch gerade."

c) Ein 2×2 Quadrat, bei dem ein 1×1 Stück fehlt, heisse L-Teil. Beweisen oder widerlegen Sie: Für alle $n \geq 1$ kann man ein $2^n \times 2^n$ Quadrat so mit L-Teilen auslegen, dass genau die linke untere Ecke frei bleibt.

(Hinweis: In b) ist an der Induktionsannahme per se nichts auszusetzen)

1. Notationsübungen in O [2+2+3+4+5=16 Punkte]

a) In einem Buch über O-Notation finden wir die scheinbar paradoxe Aussage

$$\text{“}O(n^2) = O(n^3) \neq O(n^2).\text{”}$$

Angenommen, der Autor ist mit der O-Notation vertraut und es handelt sich nicht um einen Druckfehler, wie erklärt sich dies?

b) Sie haben zwei Algorithmen A und B entworfen. Für eine Eingabe der Größe n benötigt der Algorithmus A die Zeit $O(\log n)$, während Algorithmus B die Zeit $O(n)$ benötigt. Sie implementieren nun beide Algorithmen und merken, dass auf ihren Testdaten der Algorithmus A wesentlich länger braucht als Algorithmus B. Wie kann das erklärt werden? (Nehmen Sie hierzu an, dass die Laufzeit nur von der Eingabegröße abhängt und sowohl ihre theoretische Analyse als auch die Implementierung in Ordnung sind.)

c) Was ist falsch an der Argumentation “Es gilt ja bekanntlich $n = O(n)$, $2n = O(n)$, etc. Also gilt $\sum_{k=1}^{n} kn = \sum_{k=1}^{n} O(n) = O(n^2)$”? Wie müsste die Gleichung korrekterweise lauten?

d) Welche Funktion wächst asymptotisch schneller: $f(n) := n^{\log n}$ oder $g(n) := (\log n)^n$? Begründen Sie Ihre Antwort mathematisch!

e) Welche Funktion wächst asymptotisch schneller: $f(n) := n^{\log\log\log n}$ oder $g(n) := \lceil \log n \rceil !$? Begründen Sie Ihre Antwort mathematisch!

(Hinweis: Aussagen über die Wachstumsverhalten des Logarithmus zweier Funktionen gelten auch für die Funktionen selbst. Logarithmieren Sie also bei Aufgabe d) und e) die Funktionen – und wenn’s sein muss, dann halt zweimal!)

2. Binomialkoeffizienten [3+7=10 Punkte]

Der (Ihnen wahrscheinlich noch aus der Schule bekannte) Binomialsatz lautet

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

a) Beweisen Sie: Ist p eine Primzahl, so gilt $\binom{p}{k} \equiv 0 \mod p$ für alle $0 < k < p$.

b) Beweisen Sie Fermats kleinen Satz für die natürlichen Zahlen (für alle Primzahlen p und natürliche Zahlen a gilt $a^p \equiv a \mod p$).

3. Gruppenaufgaben [4+8 = 12 Punkte]

a) Zeigen Sie, dass die Menge $M := \{\frac{a}{2^n} \mid a, n \in \mathbb{Z}\}$ eine Gruppe bezüglich der Addition bildet.

b) Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und

$$Z(G) := \{z \in G \mid \forall g \in G: \; z \circ g = g \circ z\}$$

Zeigen Sie, dass $(Z(G), \circ)$ eine Untergruppe von $(G, \circ)$ bildet.

4. Faktoren [5+4+5 = 14 Punkte]

a) Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung des über $\mathbb{R}$ definierten Ausdrucks

$$p(x) = \frac{4x - 1}{(x+2)(x-1)(x+1)}$$

Analog zur Primteilerzerlegung von ganzen Zahlen will man oft Polynome in irreduzible Polynome zerlegen. D.h. gegeben ein Polynom $p(x)$, versucht man n Polynome $q_i(x)$ so zu bestimmen, dass $p(x) = q_1(x)q_2(x)\cdots q_n(x)$ und es für kein $q_i(x)$ ein Polynom gibt, dessen Grad kleiner als $q_i(x)$ ist und das gleichzeitig $q_i(x)$ ohne Rest teilt.

b) Faktorisieren Sie $p(x) := x^2 + 1$ für jeden der folgenden drei Fälle $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ und $p(x) \in GF(2)[x]$ Für $GF(2)$ sollten die Koeffizienten Ihrer Lösung > 0 sein.

c) Führen Sie Aufgabe b) nochmal durch, diesmal mit dem Polynom $p(x) = x^3 - 1$

5. Finalkombinatorik [1+2+3+5 = 11 Punkte]

a) 15 Punkte liegen in einer Ebene, keine drei davon auf einer gemeinsamen Geraden. Wie viele Geraden werden durch sie bestimmt? (Formel genügt.)

b) Bei einer Klausur haben sie 12 Aufgaben zu lösen. Wie viele Möglichkeiten für die Reihenfolge Ihres Vorgehens gibt es grundsätzlich? Wie viele gibt es, wenn sie vier (fest vorgegebene, unterscheidbare) Aufgaben lösen wollen, bevor sie mit dem Rest weitermachen? (Formeln genügen.)

c) Sei $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und B eine Menge. Wenn es 6720 injektive Funktionen $f : A \to B$ gibt, wie groß ist $|B|$? (Begründen Sie Ihre Antwort.)

d) Ein Chemiker hat unterscheidbare 5 Laboranten für ein Forschungsprojekt engagiert. Es sind 8 verschiedene Syntheseexperimente durchzuführen. wie viele Möglichkeiten hat der Chemiker, die Laboranten mit den Synthesen zu betrauen, wenn keiner unbeschäftigt sein soll? (Bitte genauen Wert angeben, Rechenweg muss klar erkennbar sein.)
(Hinweis: Man kann 6 unterscheidbare Objekte auf 65 Arten in 4 nichtleere Mengen partitionieren, bei 7 Objekten und 5 Mengen geht das auf 140 Arten. Für 5 Objekte und 3 Arten gibt es wiederum nur 25 Möglichkeiten)