

SS 2004

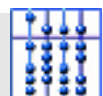
Diskrete Strukturen II

Ernst W. Mayr

Fakultät für Informatik

TU München

<http://www14.in.tum.de/lehre/2004SS/ds/index.html.de>



Definition: Zu einem Ereignis A heißt die Zufallsvariable

$$I_A := \begin{cases} 1 & \text{falls } A \text{ eintritt,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Indikatorvariable des Ereignisses A .



Definition: Zu einem Ereignis A heißt die Zufallsvariable

$$I_A := \begin{cases} 1 & \text{falls } A \text{ eintritt,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Indikatorvariable des Ereignisses A .

Beobachtung:

Für die Indikatorvariable I_A gilt nach Definition

$$\mathbb{E}[I_A] = 1 \cdot \Pr[A] + 0 \cdot \Pr[\bar{A}] = \Pr[A].$$



Definition: Zu einem Ereignis A heißt die Zufallsvariable

$$I_A := \begin{cases} 1 & \text{falls } A \text{ eintritt,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Indikatorvariable des Ereignisses A .

Beobachtung:

Für die Indikatorvariable I_A gilt nach Definition

$$\mathbb{E}[I_A] = 1 \cdot \Pr[A] + 0 \cdot \Pr[\bar{A}] = \Pr[A].$$

Ebenso gilt

$$\mathbb{E}[I_{A_1} \cdot \dots \cdot I_{A_n}] = \Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n],$$

da das Produkt von Indikatorvariablen genau dann gleich 1 ist, wenn alle entsprechenden Ereignisse eintreten.



Beispiel: (Forts.) Wir betrachten wieder das Beispiel der total betrunkenen Matrosen.

Sei A_i das Ereignis, dass der i -te Seemann im richtigen Bett liegt. Mit der Notation der Indikatorvariablen sei $X_i = I_{A_i}$. Dann gilt für beliebige $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$:

$$\mathbb{E}[X_i X_j] = \mathbb{E}[I_{A_i} I_{A_j}] = \Pr[A_i \cap A_j] = \frac{1}{n(n-1)},$$



Beispiel: (Forts.) Wir betrachten wieder das Beispiel der total betrunkenen Matrosen.

Sei A_i das Ereignis, dass der i -te Seemann im richtigen Bett liegt. Mit der Notation der Indikatorvariablen sei $X_i = I_{A_i}$. Dann gilt für beliebige $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$:

$$\mathbb{E}[X_i X_j] = \mathbb{E}[I_{A_i} I_{A_j}] = \Pr[A_i \cap A_j] = \frac{1}{n(n-1)},$$

sowie

$$\mathbb{E}[X_i^2] = 0^2 \cdot \Pr[\bar{A}_i] + 1^2 \cdot \Pr[A_i] = \Pr[A_i] = 1/n.$$



Daraus folgt wegen der Linearität des Erwartungswerts
für $X = X_1 + \cdots + X_n$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} X_i X_j \right] \\ &= n \cdot \frac{1}{n} + n(n-1) \cdot \frac{1}{n(n-1)} = 2.\end{aligned}$$

Daraus folgt wegen der Linearität des Erwartungswerts für $X = X_1 + \dots + X_n$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} X_i X_j \right] \\ &= n \cdot \frac{1}{n} + n(n-1) \cdot \frac{1}{n(n-1)} = 2.\end{aligned}$$

Für die Varianz erhalten wir somit den Wert

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = 2 - 1 = 1.$$

Einfacher Beweis für Satz 2 mit Hilfe von Indikatorvariablen:

Zur Erinnerung:

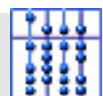
Satz 2 (Siebformel, Prinzip der Inklusion/Exklusion)

Für Ereignisse A_1, \dots, A_n ($n \geq 2$) gilt:

$$\begin{aligned} \Pr \left[\bigcup_{i=1}^n A_i \right] &= \sum_{i=1}^n \Pr[A_i] - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap A_{i_2}] + - \dots \\ &+ (-1)^{l-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_l}] + - \dots \\ &+ (-1)^{n-1} \cdot \Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n] . \end{aligned}$$

Beweis: Zur Erinnerung: Zu Ereignissen A_1, \dots, A_n wollen wir die Wahrscheinlichkeit $\Pr[B]$ des Ereignisses $B := A_1 \cup \dots \cup A_n$ ermitteln.

Wir betrachten die Indikatorvariablen $I_i := I_{A_i}$ der Ereignisse A_1, \dots, A_n und die Indikatorvariable $I_{\bar{B}}$ des Ereignisses \bar{B} .

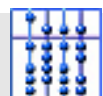


Beweis: Zur Erinnerung: Zu Ereignissen A_1, \dots, A_n wollen wir die Wahrscheinlichkeit $\Pr[B]$ des Ereignisses $B := A_1 \cup \dots \cup A_n$ ermitteln.

Wir betrachten die Indikatorvariablen $I_i := I_{A_i}$ der Ereignisse A_1, \dots, A_n und die Indikatorvariable $I_{\bar{B}}$ des Ereignisses \bar{B} .

Das Produkt $\prod_{i=1}^n (1 - I_i)$ ist genau dann gleich 1, wenn $I_1 = \dots = I_n = 0$, d.h. wenn B nicht eintritt. Somit gilt $I_{\bar{B}} = \prod_{i=1}^n (1 - I_i)$ und wir erhalten:

$$I_{\bar{B}} = 1 - \sum_{1 \leq i \leq n} I_i + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} I_{i_1} I_{i_2} - \dots + (-1)^n I_1 \cdot \dots \cdot I_n.$$



Wegen der Eigenschaften von Indikatorvariablen gilt

$$\Pr[B] = 1 - \Pr[\bar{B}] = 1 - \mathbb{E}[I_{\bar{B}}].$$

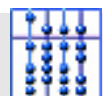
Mit Hilfe von Satz 16 und Satz 17 „verteilen“ wir den Erwartungswert auf die einzelnen Produkte von Indikatorvariablen. Wenn wir nun $\mathbb{E}[I_i]$ durch $\Pr[A_i]$ und allgemein $\mathbb{E}[I_{i_1} \cdot \dots \cdot I_{i_k}]$ durch $\Pr[A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}]$ ersetzen, haben wir Satz 2 (noch einmal) bewiesen. *q. e. d.*



Satz 18:

Für unabhängige Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n und $X := X_1 + \dots + X_n$ gilt

$$\text{Var}[X] = \text{Var}[X_1] + \dots + \text{Var}[X_n].$$

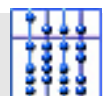


Satz 18:

Für unabhängige Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n und $X := X_1 + \dots + X_n$ gilt

$$\text{Var}[X] = \text{Var}[X_1] + \dots + \text{Var}[X_n].$$

Beweis: Wir betrachten nur den Fall $n = 2$ mit den Zufallsvariablen X und Y .



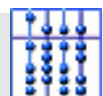
Satz 18:

Für unabhängige Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n und $X := X_1 + \dots + X_n$ gilt

$$\text{Var}[X] = \text{Var}[X_1] + \dots + \text{Var}[X_n].$$

Beweis: Wir betrachten nur den Fall $n = 2$ mit den Zufallsvariablen X und Y .

$$\mathbb{E}[(X + Y)^2] = \mathbb{E}[X^2 + 2XY + Y^2] = \mathbb{E}[X^2] + 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[Y^2]$$



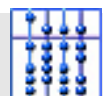
Satz 18:

Für unabhängige Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n und $X := X_1 + \dots + X_n$ gilt

$$\text{Var}[X] = \text{Var}[X_1] + \dots + \text{Var}[X_n].$$

Beweis: Wir betrachten nur den Fall $n = 2$ mit den Zufallsvariablen X und Y .

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X + Y)^2] &= \mathbb{E}[X^2 + 2XY + Y^2] = \mathbb{E}[X^2] + 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[Y^2] \\ \mathbb{E}[X + Y]^2 &= (\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y])^2 = \mathbb{E}[X]^2 + 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[Y]^2\end{aligned}$$



Satz 18:

Für unabhängige Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n und $X := X_1 + \dots + X_n$ gilt

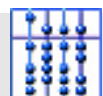
$$\text{Var}[X] = \text{Var}[X_1] + \dots + \text{Var}[X_n].$$

Beweis: Wir betrachten nur den Fall $n = 2$ mit den Zufallsvariablen X und Y .

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X + Y)^2] &= \mathbb{E}[X^2 + 2XY + Y^2] = \mathbb{E}[X^2] + 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[Y^2] \\ \mathbb{E}[X + Y]^2 &= (\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y])^2 = \mathbb{E}[X]^2 + 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[Y]^2\end{aligned}$$

Wir ziehen die zweite Gleichung von der ersten ab und erhalten

$$\mathbb{E}[(X + Y)^2] - \mathbb{E}[X + Y]^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 + \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2.$$



Satz 18:

Für unabhängige Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n und $X := X_1 + \dots + X_n$ gilt

$$\text{Var}[X] = \text{Var}[X_1] + \dots + \text{Var}[X_n].$$

Beweis: Wir betrachten nur den Fall $n = 2$ mit den Zufallsvariablen X und Y .

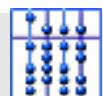
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X + Y)^2] &= \mathbb{E}[X^2 + 2XY + Y^2] = \mathbb{E}[X^2] + 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[Y^2] \\ \mathbb{E}[X + Y]^2 &= (\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y])^2 = \mathbb{E}[X]^2 + 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[Y]^2\end{aligned}$$

Wir ziehen die zweite Gleichung von der ersten ab und erhalten

$$\mathbb{E}[(X + Y)^2] - \mathbb{E}[X + Y]^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 + \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2.$$

Mit Hilfe von Satz 11 folgt die Behauptung.

q. e. d.



Für abhängige Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n gilt Satz 18 im Allgemeinen nicht. Als Beispiel funktioniert wiederum der Fall $X = -Y$:

$$\text{Var}[X + Y] = 0 \neq 2 \cdot \text{Var}[X] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y].$$



1.5 Wichtige diskrete Verteilungen

Wir diskutieren nun einige wichtige diskrete Verteilungen. Bei diesen Verteilungen handelt es sich um Funktionen, die von gewissen Parametern abhängen. Eigentlich betrachten wir also immer eine ganze Familie von ähnlichen Verteilungen.



1.5.1 Bernoulli-Verteilung

Eine Zufallsvariable X mit $W_X = \{0, 1\}$ und der Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} p & \text{für } x = 1, \\ 1 - p & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

heißt Bernoulli-verteilt. Den Parameter p nennen wir Erfolgswahrscheinlichkeit.



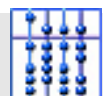
1.5.1 Bernoulli-Verteilung

Eine Zufallsvariable X mit $W_X = \{0, 1\}$ und der Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} p & \text{für } x = 1, \\ 1 - p & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

heißt Bernoulli-verteilt. Den Parameter p nennen wir Erfolgswahrscheinlichkeit.

Eine solche Verteilung erhält man z.B. bei einer einzelnen Indikatorvariablen.



1.5.1 Bernoulli-Verteilung

Eine Zufallsvariable X mit $W_X = \{0, 1\}$ und der Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} p & \text{für } x = 1, \\ 1 - p & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

heißt Bernoulli-verteilt. Den Parameter p nennen wir Erfolgswahrscheinlichkeit.

Eine solche Verteilung erhält man z.B. bei einer einzelnen Indikatorvariablen.

Es gilt mit $q := 1 - p$

$$\mathbb{E}[X] = p \text{ und } \text{Var}[X] = pq,$$

wegen $\mathbb{E}[X^2] = p$ und $\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = p - p^2$.



Der Name der Bernoulli-Verteilung geht zurück auf den Schweizer Mathematiker Jakob Bernoulli (1654–1705). Wie viele andere Mathematiker seiner Zeit hätte auch Bernoulli nach dem Wunsch seines Vaters ursprünglich Theologe werden sollen. Sein Werk *ars conjectandi* stellt eine der ersten Arbeiten dar, die sich mit dem Teil der Mathematik beschäftigen, den wir heute als Wahrscheinlichkeitstheorie bezeichnen.

