SS 2004

Diskrete Strukturen II

Ernst W. Mayr

Fakultät für Informatik

TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2004SS/ds/index.html.de

Die folgende Abschätzung ist nach Pavnuty Lvovich Chebyshev (1821–1894) benannt, der ebenfalls an der Staatl. Universität in St. Petersburg wirkte.

Satz 22: (Chebyshev-Ungleichung) Sei X eine Zufallsvariable, und sei $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$. Dann gilt

$$\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t] \;\leq\; \frac{\mathrm{Var}[X]}{t^2}\,.$$

Die folgende Abschätzung ist nach Pavnuty Lvovich Chebyshev (1821–1894) benannt, der ebenfalls an der Staatl. Universität in St. Petersburg wirkte.

Satz 22: (Chebyshev-Ungleichung) Sei X eine Zufallsvariable, und sei $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$. Dann gilt

$$\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t] \;\leq\; \frac{\mathrm{Var}[X]}{t^2}\,.$$

Äquivalent dazu:

$$\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t\sqrt{\mathrm{Var}[X]}] \;\leq\; 1/t^2\,.$$

Beweis: Wir stellen fest, dass

$$\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t] = \Pr[(X - \mathbb{E}[X])^2 \geq t^2] .$$

Beweis: Wir stellen fest, dass

$$\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t] \;=\; \Pr[(X - \mathbb{E}[X])^2 \geq t^2]\,.$$

Setze

$$Y := (X - \mathbb{E}[X])^2\,.$$

Beweis: Wir stellen fest, dass

$$\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t] \;=\; \Pr[(X - \mathbb{E}[X])^2 \geq t^2]\,.$$

Setze

$$Y := (X - \mathbb{E}[X])^2\,.$$

Dann gilt $\mathbb{E}[Y] = \mathrm{Var}[X]$, und damit mit der Markov-Ungleichung:

$$\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t] \;=\; \Pr[Y \geq t^2] \;\leq\; \frac{\mathbb{E}[Y]}{t^2} \;=\; \frac{\mathrm{Var}[X]}{t^2}\,.$$

q. e. d.

Beispiel: Wir werfen 1000-mal eine ideale Münze und ermitteln die Anzahl X der Würfe, in denen „Kopf“ fällt.

Beispiel: Wir werfen 1000-mal eine ideale Münze und ermitteln die Anzahl X der Würfe, in denen „Kopf“ fällt. X ist binomialverteilt mit $X \sim \mathrm{Bin}(1000, p = \frac{1}{2})$,also gilt

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2}n = 500 \text{ und } \mathrm{Var}[X] = \frac{1}{4}n = 250.$$

Beispiel: Wir werfen 1000-mal eine ideale Münze und ermitteln die Anzahl X der Würfe, in denen „Kopf" fällt. X ist binomialverteilt mit $X \sim \mathrm{Bin}(1000, p = \frac{1}{2})$,also gilt

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2}n = 500 \text{ und } \mathrm{Var}[X] = \frac{1}{4}n = 250.$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 550-mal „Kopf" fällt?

Beispiel: Wir werfen 1000-mal eine ideale Münze und ermitteln die Anzahl X der Würfe, in denen „Kopf“ fällt. X ist binomialverteilt mit $X \sim \mathrm{Bin}(1000, p = \frac{1}{2})$,also gilt

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2}n = 500 \text{ und } \mathrm{Var}[X] = \frac{1}{4}n = 250.$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 550-mal „Kopf“ fällt?

Chebyshev-Ungleichung:

$$\Pr[X \geq 550] \leq \Pr[|X - 500| \geq 50] \leq \frac{250}{50^2} = 0{,}1\,.$$

Beispiel: Wir werfen 1000-mal eine ideale Münze und ermitteln die Anzahl X der Würfe, in denen „Kopf“ fällt. X ist binomialverteilt mit $X \sim \mathrm{Bin}(1000, p = \frac{1}{2})$,also gilt

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2}n = 500 \text{ und } \mathrm{Var}[X] = \frac{1}{4}n = 250.$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 550-mal „Kopf“ fällt?

Chebyshev-Ungleichung:

$$\Pr[X \geq 550] \leq \Pr[|X - 500| \geq 50] \leq \frac{250}{50^2} = 0{,}1\,.$$

Setze nun $n = 10000$ und betrachte wieder eine maximal 10%-ige Abweichung vom Erwartungswert:

$$\mathbb{E}[X] \;=\; 5000 \text{ und } \mathrm{Var}[X] = 2500$$

Beispiel: Wir werfen 1000-mal eine ideale Münze und ermitteln die Anzahl X der Würfe, in denen „Kopf“ fällt. X ist binomialverteilt mit $X \sim \mathrm{Bin}(1000, p = \frac{1}{2})$,also gilt

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2}n = 500 \text{ und } \mathrm{Var}[X] = \frac{1}{4}n = 250.$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 550-mal „Kopf“ fällt?

Chebyshev-Ungleichung:

$$\Pr[X \geq 550] \leq \Pr[|X - 500| \geq 50] \leq \frac{250}{50^2} = 0{,}1\,.$$

Setze nun $n = 10000$ und betrachte wieder eine maximal 10%-ige Abweichung vom Erwartungswert:

$$\mathbb{E}[X] \;=\; 5000 \text{ und } \mathrm{Var}[X] = 2500, \text{ und damit}$$

$$\Pr[X \geq 5500] \;\leq\; \Pr[|X - 5000| \geq 500] \leq \frac{2500}{500^2} = 0{,}01\,.$$

1.6.2 Gesetz der großen Zahlen

Wir haben diskutiert, wie Wahrscheinlichkeiten als Grenzwerte von relativen Häufigkeiten aufgefasst werden können.

1.6.2 Gesetz der großen Zahlen

Wir haben diskutiert, wie Wahrscheinlichkeiten als Grenzwerte von relativen Häufigkeiten aufgefasst werden können.

Satz 23: (Gesetz der großen Zahlen) Gegeben sei eine Zufallsvariable X. Ferner seien $\varepsilon, \delta > 0$ beliebig aber fest. Dann gilt für alle $n \geq \frac{\mathrm{Var}[X]}{\varepsilon\delta^2}$:

Sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit derselben Verteilung wie X und setzt man

$$Z := \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n},$$

so gilt

$$\Pr[|Z - \mathbb{E}[X]| \geq \delta] \;\leq\; \varepsilon.$$

Beweis: Für Z gilt

$$\mathbb{E}[Z] = \frac{1}{n} \cdot (\mathbb{E}[X_1] + \ldots + \mathbb{E}[X_n]) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X],$$

Beweis: Für Z gilt

$$\mathbb{E}[Z] = \frac{1}{n} \cdot (\mathbb{E}[X_1] + \ldots + \mathbb{E}[X_n]) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X],$$

sowie

$$\mathrm{Var}[Z] = \frac{1}{n^2} \cdot (\mathrm{Var}[X_1] + \ldots + \mathrm{Var}[X_n]) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \mathrm{Var}[X] = \frac{\mathrm{Var}[X]}{n}.$$

Beweis: Für Z gilt

$$\mathbb{E}[Z] = \frac{1}{n} \cdot (\mathbb{E}[X_1] + \ldots + \mathbb{E}[X_n]) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X],$$

sowie

$$\mathrm{Var}[Z] = \frac{1}{n^2} \cdot (\mathrm{Var}[X_1] + \ldots + \mathrm{Var}[X_n]) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \mathrm{Var}[X] = \frac{\mathrm{Var}[X]}{n}.$$

Mit der Chebyshev-Ungleichung erhalten wir

$$\Pr[|Z - \mathbb{E}[X]| \geq \delta] = \Pr[|Z - \mathbb{E}[Z]| \geq \delta] \leq \frac{\mathrm{Var}[Z]}{\delta^2} = \frac{\mathrm{Var}[X]}{n\delta^2} \leq \varepsilon,$$

nach Wahl von n. *q. e. d.*

Wahrscheinlichkeit und relative Häufigkeit.

Sei X eine Indikatorvariable für ein Ereignis A, $\Pr[A] = p$. Somit ist X Bernoulli-verteilt mit $\mathbb{E}[X] = p$.

Wahrscheinlichkeit und relative Häufigkeit.

Sei X eine Indikatorvariable für ein Ereignis A, $\Pr[A] = p$. Somit ist X Bernoulli-verteilt mit $\mathbb{E}[X] = p$.

$Z = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$ gibt die relative Häufigkeit an, mit der A bei n Wiederholungen des Versuchs eintritt, denn

$$Z = \frac{\text{Anzahl der Versuche, bei denen } A \text{ eingetreten ist}}{\text{Anzahl aller Versuche}}.$$

Wahrscheinlichkeit und relative Häufigkeit.

Sei X eine Indikatorvariable für ein Ereignis A, $\Pr[A] = p$. Somit ist X Bernoulli-verteilt mit $\mathbb{E}[X] = p$.

$Z = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$ gibt die relative Häufigkeit an, mit der A bei n Wiederholungen des Versuchs eintritt, denn

$$Z = \frac{\text{Anzahl der Versuche, bei denen } A \text{ eingetreten ist}}{\text{Anzahl aller Versuche}}.$$

Mit Hilfe des obigen Gesetzes der großen Zahlen folgt

$$\Pr[|Z - p| \geq \delta] \leq \varepsilon,$$

für genügend großes n.

Wahrscheinlichkeit und relative Häufigkeit.

Sei X eine Indikatorvariable für ein Ereignis A, $\Pr[A] = p$. Somit ist X Bernoulli-verteilt mit $\mathbb{E}[X] = p$.

$Z = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$ gibt die relative Häufigkeit an, mit der A bei n Wiederholungen des Versuchs eintritt, denn

$$Z = \frac{\text{Anzahl der Versuche, bei denen } A \text{ eingetreten ist}}{\text{Anzahl aller Versuche}}.$$

Mit Hilfe des obigen Gesetzes der großen Zahlen folgt

$$\Pr[|Z - p| \geq \delta] \leq \varepsilon,$$

für genügend großes n.

Also nähert sich die relative Häufigkeit von A bei hinreichend vielen Wiederholungen des Experiments mit beliebiger Sicherheit beliebig nahe an die „wahre“ Wahrscheinlichkeit p an.

Die obige Variante eines Gesetzes der großen Zahlen geht auf Jakob Bernoulli zurück, der den Satz in seinem Werk ars conjectandi zeigte.

Die obige Variante eines Gesetzes der großen Zahlen geht auf Jakob Bernoulli zurück, der den Satz in seinem Werk ars conjectandi zeigte.

Es soll betont werden, dass das Gesetz der großen Zahlen die

$$\text{relative Abweichung } \left|\frac{1}{n}\sum_i X_i - p\right|$$

und nicht die

$$\text{absolute Abweichung } \left|\sum_i X_i - np\right|$$

abschätzt!

1.6.3 Chernoff-Schranken

Chernoff-Schranken für Summen von 0–1–Zufallsvariablen

Die hier betrachtete Art von Schranken ist nach Herman Chernoff (*1923) benannt. Sie finden in der komplexitätstheoretischen Analyse von Algorithmen eine sehr häufige Verwendung.

1.6.3 Chernoff-Schranken

Chernoff-Schranken für Summen von 0–1–Zufallsvariablen

Die hier betrachtete Art von Schranken ist nach Herman Chernoff (*1923) benannt. Sie finden in der komplexitätstheoretischen Analyse von Algorithmen eine sehr häufige Verwendung.

Satz 24:

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen mit $\Pr[X_i = 1] = p_i$ und $\Pr[X_i = 0] = 1 - p_i$. Dann gilt für $X := \sum_{i=1}^n X_i$ und $\mu := \mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n p_i$, sowie jedes $\delta > 0$, dass

$$\Pr[X \geq (1+\delta)\mu] \leq \left(\frac{e^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}} \right)^\mu .$$

Beweis: Für $t > 0$ gilt

$$\Pr[X \geq (1+\delta)\mu] = \Pr[e^{tX} \geq e^{t(1+\delta)\mu}]\,.$$

Beweis: Für $t > 0$ gilt

$$\Pr[X \geq (1+\delta)\mu] = \Pr[e^{tX} \geq e^{t(1+\delta)\mu}].$$

Mit der Markov-Ungleichung folgt

$$\Pr[X \geq (1+\delta)\mu] = \Pr[e^{tX} \geq e^{t(1+\delta)\mu}] \leq \frac{\mathbb{E}[e^{tX}]}{e^{t(1+\delta)\mu}}.$$

Beweis: Für $t > 0$ gilt

$$\Pr[X \geq (1+\delta)\mu] = \Pr[e^{tX} \geq e^{t(1+\delta)\mu}]\,.$$

Mit der Markov-Ungleichung folgt

$$\Pr[X \geq (1+\delta)\mu] = \Pr[e^{tX} \geq e^{t(1+\delta)\mu}] \leq \frac{\mathbb{E}[e^{tX}]}{e^{t(1+\delta)\mu}}.$$

Wegen der Unabhängigkeit der Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ gilt

$$\mathbb{E}[e^{tX}] = \mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{i=1}^{n} tX_i\right)\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} e^{tX_i}\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}[e^{tX_i}].$$

Beweis: Für $t > 0$ gilt

$$\Pr[X \geq (1+\delta)\mu] = \Pr[e^{tX} \geq e^{t(1+\delta)\mu}] .$$

Mit der Markov-Ungleichung folgt

$$\Pr[X \geq (1+\delta)\mu] = \Pr[e^{tX} \geq e^{t(1+\delta)\mu}] \leq \frac{\mathbb{E}[e^{tX}]}{e^{t(1+\delta)\mu}}.$$

Wegen der Unabhängigkeit der Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ gilt

$$\mathbb{E}[e^{tX}] = \mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{i=1}^{n} tX_i\right)\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} e^{tX_i}\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}[e^{tX_i}].$$

Weiter ist für $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\mathbb{E}[e^{tX_i}] = e^{t\cdot 1}p_i + e^{t\cdot 0}(1-p_i) = e^t p_i + 1 - p_i = 1 + p_i(e^t - 1) ,$$

und damit

$$\Pr[X \geq (1+\delta)\mu] \quad \leq \quad \frac{\prod_{i=1}^{n}(1+p_i(e^t-1))}{e^{t(1+\delta)\mu}}$$

und damit

$$\begin{aligned}\Pr[X \geq (1+\delta)\mu] &\leq \frac{\prod_{i=1}^{n}(1+p_i(e^t-1))}{e^{t(1+\delta)\mu}}\\ &\leq \frac{\prod_{i=1}^{n}\exp(p_i(e^t-1))}{e^{t(1+\delta)\mu}}\end{aligned}$$

und damit

$$
\begin{aligned}
\Pr[X \geq (1+\delta)\mu] &\leq \frac{\prod_{i=1}^{n}(1+p_i(e^t-1))}{e^{t(1+\delta)\mu}} \\
&\leq \frac{\prod_{i=1}^{n}\exp(p_i(e^t-1))}{e^{t(1+\delta)\mu}} \\
&= \frac{\exp(\sum_{i=1}^{n}p_i(e^t-1))}{e^{t(1+\delta)\mu}} = \frac{e^{(e^t-1)\mu}}{e^{t(1+\delta)\mu}} =: f(t)\,.
\end{aligned}
$$

und damit

$$\begin{aligned}
\Pr[X \geq (1+\delta)\mu] &\leq \frac{\prod_{i=1}^{n}(1+p_i(e^t-1))}{e^{t(1+\delta)\mu}} \\
&\leq \frac{\prod_{i=1}^{n}\exp(p_i(e^t-1))}{e^{t(1+\delta)\mu}} \\
&= \frac{\exp(\sum_{i=1}^{n} p_i(e^t-1))}{e^{t(1+\delta)\mu}} = \frac{e^{(e^t-1)\mu}}{e^{t(1+\delta)\mu}} =: f(t)\,.
\end{aligned}$$

Wir wählen nun t so, dass $f(t)$ minimiert wird, nämlich

$$t = \ln(1+\delta)\,.$$

und damit

$$
\begin{aligned}
\Pr[X \geq (1+\delta)\mu] &\leq \frac{\prod_{i=1}^{n}(1+p_i(e^t-1))}{e^{t(1+\delta)\mu}} \\
&\leq \frac{\prod_{i=1}^{n}\exp(p_i(e^t-1))}{e^{t(1+\delta)\mu}} \\
&= \frac{\exp(\sum_{i=1}^{n} p_i(e^t-1))}{e^{t(1+\delta)\mu}} = \frac{e^{(e^t-1)\mu}}{e^{t(1+\delta)\mu}} =: f(t)\,.
\end{aligned}
$$

Wir wählen nun t so, dass $f(t)$ minimiert wird, nämlich

$$t = \ln(1+\delta)\,.$$

Damit wird

$$f(t) = \frac{e^{(e^t-1)\mu}}{e^{t(1+\delta)\mu}} = \frac{e^{\delta\mu}}{(1+\delta)^{(1+\delta)\mu}}\,.$$

q. e. d.

Beispiel: Wir betrachten wieder das Beispiel, dass wir eine faire Münze n-mal werfen und abschätzen wollen, mit welcher Wahrscheinlichkeit „Kopf“

$$\frac{n}{2}(1 + 10\%)$$

oder öfter fällt.

Beispiel: Wir betrachten wieder das Beispiel, dass wir eine faire Münze n-mal werfen und abschätzen wollen, mit welcher Wahrscheinlichkeit „Kopf“

$$\frac{n}{2}(1+10\%)$$

oder öfter fällt.

n	Chebyshev	Chernoff
1000	$0{,}1$	$0{,}0889$
10000	$0{,}01$	$0{,}308 \cdot 10^{-10}$

Beispiel: Wir betrachten wieder das Beispiel, dass wir eine faire Münze n-mal werfen und abschätzen wollen, mit welcher Wahrscheinlichkeit „Kopf“

$$\frac{n}{2}(1 + 10\%)$$

oder öfter fällt.

n	Chebyshev	Chernoff
1000	$0{,}1$	$0{,}0889$
10000	$0{,}01$	$0{,}308 \cdot 10^{-10}$
n	$\frac{\frac{1}{4}n}{(0{,}1 \cdot \frac{1}{2}n)^2}$	$\left(\frac{e^{0{,}1}}{(1+0{,}1)^{1+0{,}1}}\right)^n$

Satz 25: Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen mit $\Pr[X_i = 1] = p_i$ und $\Pr[X_i = 0] = 1 - p_i$. Dann gilt für $X := \sum_{i=1}^{n} X_i$ und $\mu := \mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} p_i$, sowie jedes $0 < \delta < 1$, dass

$$\Pr[X \leq (1-\delta)\mu] \leq \left(\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}} \right)^{\mu}.$$

Satz 25: Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen mit $\Pr[X_i = 1] = p_i$ und $\Pr[X_i = 0] = 1 - p_i$. Dann gilt für $X := \sum_{i=1}^n X_i$ und $\mu := \mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n p_i$, sowie jedes $0 < \delta < 1$, dass

$$\Pr[X \leq (1-\delta)\mu] \leq \left(\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}} \right)^{\mu}.$$

Beweis: Analog zum Beweis von Satz 24. *q. e. d.*

Satz 25: Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen mit $\Pr[X_i = 1] = p_i$ und $\Pr[X_i = 0] = 1 - p_i$. Dann gilt für $X := \sum_{i=1}^n X_i$ und $\mu := \mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n p_i$, sowie jedes $0 < \delta < 1$, dass

$$\Pr[X \leq (1-\delta)\mu] \leq \left(\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}}\right)^{\mu}.$$

Beweis: Analog zum Beweis von Satz 24. *q. e. d.*

Bemerkung: Abschätzungen, wie sie in Satz 24 und Satz 25 angegeben sind, nennt man auch tail bounds, da sie Schranken für die tails, also die vom Erwartungswert weit entfernten Bereiche angeben. Man spricht hierbei vom upper tail (vergleiche Satz 24) und vom lower tail (vergleiche Satz 25).

Die Chernoff-Schranken hängen exponentiell von μ ab!