SS 2004

Diskrete Strukturen II

Ernst W. Mayr

Fakultät für Informatik

TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2004SS/ds/index.html.de

Definition: Für $i \in \mathbb{N}$ bezeichne $h_i := \Pr[H_i]$ die Auftrittswahrscheinlichkeit im i-ten Zeitschritt. Wir setzen $h_0 := 1$ und erhalten die erzeugende Funktion der Auftrittswahrscheinlichkeiten gemäß

$$H(s) := \sum_{k=0}^{\infty} h_k s^k \,.$$

Ferner sei die erzeugende Funktion der Wartezeit Z gegeben durch

$$T(s) := \sum_{k=0}^{\infty} \Pr[Z = k] \cdot s^k \,.$$

Bemerkung:

$H(s)$ ist keine wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion im Sinne der Definition. So gilt i.a. nicht $H(1) = 1$.

Auch $T(s)$ stellt keine „echte“ wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion dar, da

$$\Pr[Z = \infty] = 1 - \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \Pr[Z = k] = 1 - T(1)$$

fehlt!

Satz 31:

Für rekurrente Ereignisse gilt

$$H(s) = \frac{1}{1 - T(s)}\,.$$

Beweis: [(Skizze)] Nach dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit gilt für die Auftrittswahrscheinlichkeit h_n ($n \in \mathbb{N}$)

$$h_n = \Pr[H_n] = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr[H_n \mid Z = k] \cdot \Pr[Z = k]\,.$$

Gemäß der Definition eines rekurrenten Ereignisses gilt für $k < n$

$$\Pr[H_n \mid Z = k] = \Pr[H_n \mid \bar{H}_1 \cap \ldots \cap \bar{H}_{k-1} \cap H_k] = \Pr[H_{n-k}]$$

sowie

$$\begin{aligned}\Pr[H_n \mid Z = n] &= 1\\ \Pr[H_n \mid Z = k] &= 0 \text{ für } k > n\,.\end{aligned}$$

Damit folgt für $n \in \mathbb{N}$

$$h_n = \sum_{k=1}^{n} h_{n-k} \cdot \Pr[Z = k] = \sum_{k=0}^{n} h_{n-k} \cdot \Pr[Z = k]\,.$$

Für $n = 0$ ergibt die rechte Seite dieser Gleichung 0. Damit entsteht durch Faltung der beiden Folgen $(h_0, h_1, \ldots)$ und $(\Pr[Z = 0], \Pr[Z = 1], \ldots)$ die Folge $(0, h_1, h_2, \ldots)$. Für die erzeugenden Funktionen gilt deshalb $H(s) - 1 = H(s)T(s)$.

q. e. d.

Beispiel: In dem einfachen Fall, dass die Ereignisse $H_1, H_2, \ldots$ unabhängig mit Wahrscheinlichkeit p eintreten, ist die Wartezeit geometrisch verteilt.

$$H(s) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} ps^k = 1 + \frac{sp}{1-s} = \frac{sp+1-s}{1-s}.$$

Daraus folgt

$$T(s) = 1 - \frac{1}{H(s)} = 1 - \frac{1-s}{sp+1-s} = \frac{sp}{1-(1-p)s}.$$

$T(s)$ ist also die w.e. Funktion der geometrischen Verteilung mit Erfolgswahrscheinlichkeit p.

Korollar 32: Für rekurrente Ereignisse gilt $\Pr[Z < \infty] = 1$ genau dann, wenn $H(1) = \infty$ ist, wenn also die Summe $\sum_{k=1}^{\infty} h_k$ der Auftrittswahrscheinlichkeiten divergiert.

Beweis: Nach Satz 31 gilt $T(s) = (H(s) - 1)/H(s)$. Daraus folgt

$$\Pr[Z < \infty] = T(1) = 1 - 1/H(1)\,.$$

q. e. d.

Beispiel:

Wir wenden Korollar 32 auf den Random Walk im $\mathbb{Z}^d$ an.

Aus der Stirlingformel folgt

$$n! = \Theta(\sqrt{n}(n/e)^n)$$

und damit für $d = 1$

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad = \quad \Theta\left(\frac{\sqrt{2n}(2n)^{2n}}{e^{2n}} \cdot \left(\frac{e^n}{\sqrt{n}n^n}\right)^2\right)$$

$$= \quad \Theta\left(\frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}\right).$$

Also

$$H(1) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} 2^{-2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \Theta(k^{-1/2}) = \infty,$$

da die Summe $\sum_{k=0}^{\infty} 1/k^{\alpha}$ für $\alpha \leq 1$ divergiert. Nach Korollar 32 kehrt das Partikel also mit Wahrscheinlichkeit 1 immer wieder zum Ausgangspunkt zurück.

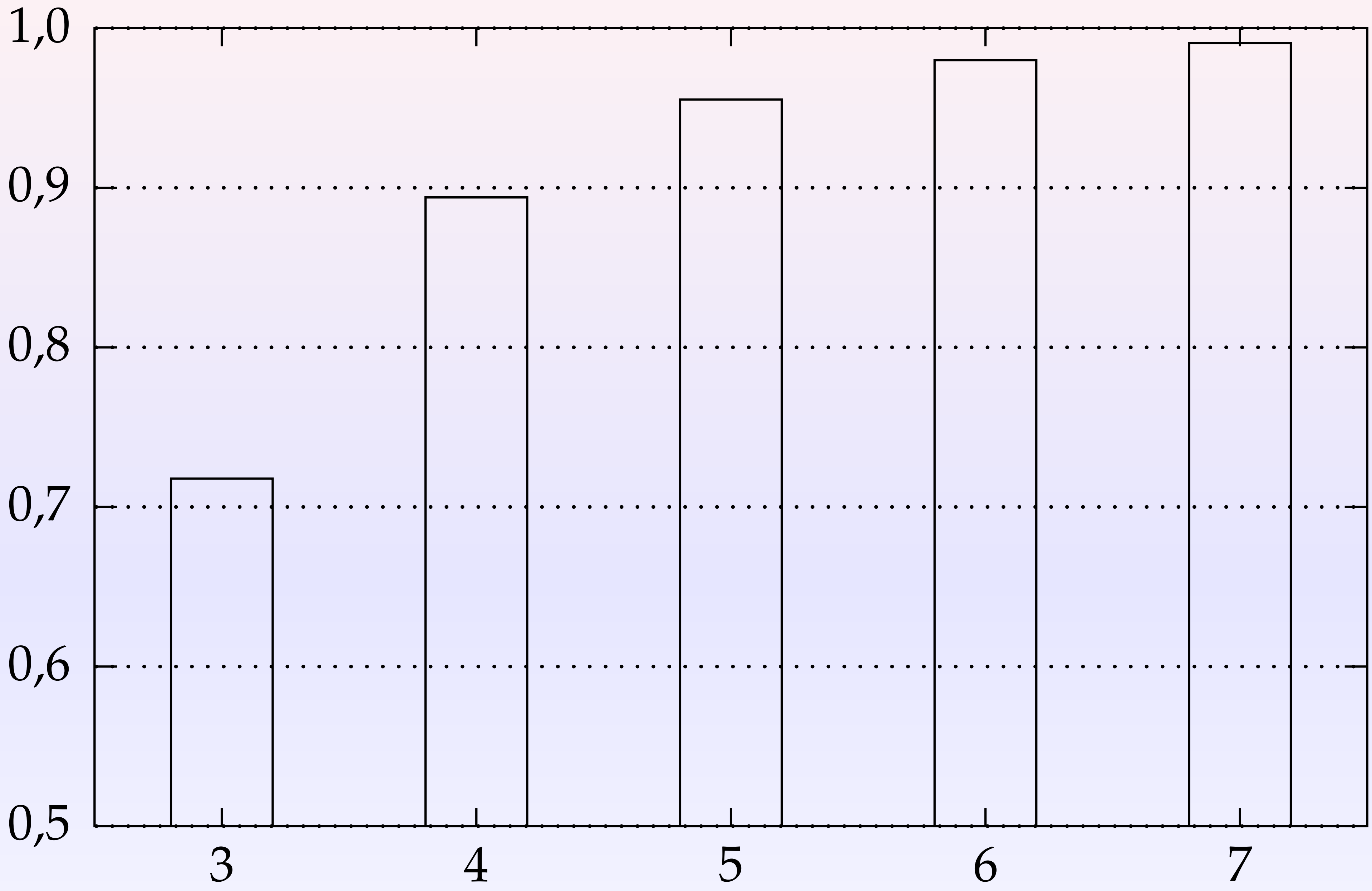
Für $d \in \mathbb{N}$ gilt allgemein

$$H(1) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k = \sum_{k=0}^{\infty} \Theta(k^{-(1/2)d}).$$

Für $d = 1$ und $d = 2$ divergiert diese Summe, während sie für $d \geq 3$ konvergiert. Das Partikel kehrt also im ein- und im zweidimensionalen Raum mit Wahrscheinlichkeit 1 zum Ausgangspunkt zurück, im drei- oder höherdimensionalen Raum jedoch nicht mehr.

Im dreidimensionalen Fall gilt

$$\begin{aligned} & \Pr[\text{„Partikel kehrt nie zum Ausgangspunkt zurück“}] \\ = \;& \Pr[Z = \infty] = 1/H(1) = 1/\sum_{k=0}^{\infty}\left(\binom{2k}{k} 2^{-2k}\right)^3 \\ \approx \;& 0{,}7178\,. \end{aligned}$$



WS(„Keine Rückkehr zum Anfang“) für den Random Walk in $\mathbb{Z}^d$

1.8 Formelsammlung

Gesetze zum Rechnen mit Ereignissen

Im Folgenden seien A und B, sowie $A_1, \ldots, A_n$ Ereignisse. Die Notation $A \uplus B$ steht für $A \cup B$ und zugleich $A \cap B = \emptyset$ (disjunkte Vereinigung). $A_1 \uplus \ldots \uplus A_n = \Omega$ bedeutet also, dass die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ eine Partition der Ergebnismenge Ω bilden.

$\Pr[\emptyset] = 0$
$0 \leq \Pr[A] \leq 1$
$\Pr[\bar{A}] = 1 - \Pr[A]$
$A \subseteq B \implies \Pr[A] \leq \Pr[B]$

$\forall i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset \implies$ $\Pr\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right] = \sum_{i=1}^n \Pr[A_i]$	Additionssatz
$\Pr[A \cup B] =$ $\Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B]$ allgemeine Form: siehe Satz 2	Inklusion/Exklusion, Siebformel
$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right] \leq \sum_{i=1}^n \Pr[A_i]$	Boolesche Ungleichung
$\Pr[A \mid B] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}$ für $\Pr[B] > 0$	Def. bedingte Ws.
$B \subseteq A_1 \uplus \ldots \uplus A_n \implies$ $\Pr[B] = \sum_{i=1}^n \Pr[B \mid A_i] \cdot \Pr[A_i]$	Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

$\Pr[B] > 0$, $B \subseteq A_1 \uplus \ldots \uplus A_n \implies$ $\Pr[A_i \mid B] = \frac{\Pr[B \mid A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{i=1}^{n} \Pr[B \mid A_i] \cdot \Pr[A_i]}$	Satz von Bayes
$\Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n] =$ $\Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2 \mid A_1] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_n \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}]$	Multiplikationssatz
A und B unabhängig $\iff$ $\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$	Definition Unabhängigkeit

Erwartungswert und Varianz diskreter Zufallsvariablen

Sei X eine diskrete Zufallsvariable. Für Erwartungswert und Varianz gelten die folgenden Formeln (sofern $\mathbb{E}[X]$ und $\mathrm{Var}[X]$ existieren).

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] \\
&= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \Pr[\omega] \\
\Bigg(&= \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[X \geq i], \quad \text{falls } W_X \subseteq \mathbb{N}_0 \Bigg)
\end{aligned}$$

Erwartungswert

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[X] &= \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] \\ &= \sum_{x \in W_X} \Pr[X=x]\cdot(x-\mathbb{E}[X])^2\end{aligned}$$

Varianz

Gesetze zum Rechnen mit Zufallsvariablen

Seien a, b, a_1, . . . , $a_n \in \mathbb{R}$, $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$X_1, \ldots, X_n$ unabhängig $\iff$ für alle $a_1, \ldots, a_n$

$$\begin{aligned}&\Pr[X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n] \\ &= \Pr[X_1 = a_1] \cdot \ldots \cdot \Pr[X_n = a_n]\end{aligned}$$

$X_1, \ldots, X_n$ unabhängig $\implies$ $f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$ unabhängig	
$\mathbb{E}[a \cdot X + b] = a \cdot \mathbb{E}[X] + b$	
$X(\omega) \leq Y(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega \implies$ $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$	Monotonie des Erwartungswerts
$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X \mid A_i] \cdot \Pr[A_i]$	
$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$	
$\mathrm{Var}[a \cdot X + b] = a^2 \cdot \mathrm{Var}[X]$	

$\mathbb{E}[a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n]$ $= a_1 \mathbb{E}[X_1] + \ldots + a_n \mathbb{E}[X_n]$	Linearität des Erwartungswerts
$X_1, \ldots, X_n$ unabhängig $\Longrightarrow$ $\mathbb{E}[X_1 \cdot \ldots \cdot X_n] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}[X_n]$	Multiplikativität des Erwartungswerts
$X_1, \ldots, X_n$ unabhängig $\Longrightarrow$ $\mathrm{Var}[X_1 + \ldots + X_n] =$ $\mathrm{Var}[X_1] + \ldots + \mathrm{Var}[X_n]$	Varianz einer Summe
$X \geq 0 \Longrightarrow \Pr[X \geq t] \leq$ $\mathbb{E}[X]/t$ für $t > 0$	Markov
$\Pr[\lvert X - \mathbb{E}[X] \rvert \geq t] \leq$ $\mathrm{Var}[X]/t^2$ für $t > 0$	Chebyshev

siehe Satz 23	Gesetz der großen Zahlen

2 Kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsräume

2.1 Einführung

2.1.1 Motivation

Interpretation der Poisson-Verteilung als Grenzwert der Binomialverteilung.

Beispiel:

Wir betrachten nochmals das Szenario aus Abschnitt 2: Bei einem Druckerserver kommen Aufträge in einer Warteschlange an, die alle $1/n$ Zeiteinheiten vom Server abgefragt wird. Der Server nimmt also zu den diskreten Zeitpunkte $1/n, 2/n, 3/n, \ldots$ neue Aufträge entgegen. Durch den Grenzwert $n \to \infty$ „verschmelzen" diese diskreten Zeitpunkte zu einer kontinuierlichen Zeitachse und für die Zufallsvariable T, welche die Zeitspanne bis zum Eintreffen des nächsten Auftrags misst, reicht eine diskrete Wertemenge W_T nicht mehr aus.

2.1.2 Kontinuierliche Zufallsvariablen

Definition: Eine kontinuierliche oder auch stetige Zufallsvariable X und ihr zugrunde liegender kontinuierlicher (reeller) Wahrscheinlichkeitraum sind definiert durch eine integrierbare Dichte(-funktion) $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ mit der Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \,\mathrm{d}\, x = 1.$$

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$, die durch Vereinigung $A = \bigcup_k I_k$ abzählbar vieler paarweise disjunkter Intervalle beliebiger Art (offen, geschlossen, halboffen, einseitig unendlich) gebildet werden kann, heißt Ereignis. Ein Ereignis A tritt ein, wenn X einen Wert aus A annimmt. Die Wahrscheinlichkeit von A ist bestimmt durch

$$\Pr[A] = \int_A f_X(x) \,\mathrm{d}\, x = \sum_k \int_{I_k} f_X(x) \,\mathrm{d}\, x.$$