SS 2004

Diskrete Strukturen II

Ernst W. Mayr

Fakultät für Informatik

TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2004SS/ds/index.html.de

4.2.4 Stationäre Verteilung

Reale dynamische Systeme laufen oft über eine lange Zeit. Für solche Systeme ist es sinnvoll, das Verhalten für $t \longrightarrow \infty$ zu berechnen.

Wir betrachten wieder die Markov-Kette aus unserem Beispiel. Wir hatten gezeigt, dass für die Übergangsmatrix P gilt:

$$P = B \cdot D \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$P^t = B \cdot D^t \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left(\frac{7}{10}\right)^t & 0 \\ 0 & 1^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

und für $t \longrightarrow \infty$ erhalten wir

$$\lim_{t\to\infty} P^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Für eine beliebige Startverteilung $q_0 = (a, 1-a)$ folgt

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} q_t &= \lim_{t\to\infty} q_0 \cdot P^t = (a, 1-a) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}(1-a),\ \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}(1-a)\right) = (\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}).\end{aligned}$$

Das System konvergiert also unabhängig vom Startzustand in eine feste Verteilung. Der zugehörige Zustandsvektor $\pi = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ hat eine interessante Eigenschaft:

$$\pi \cdot P = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = \pi.$$

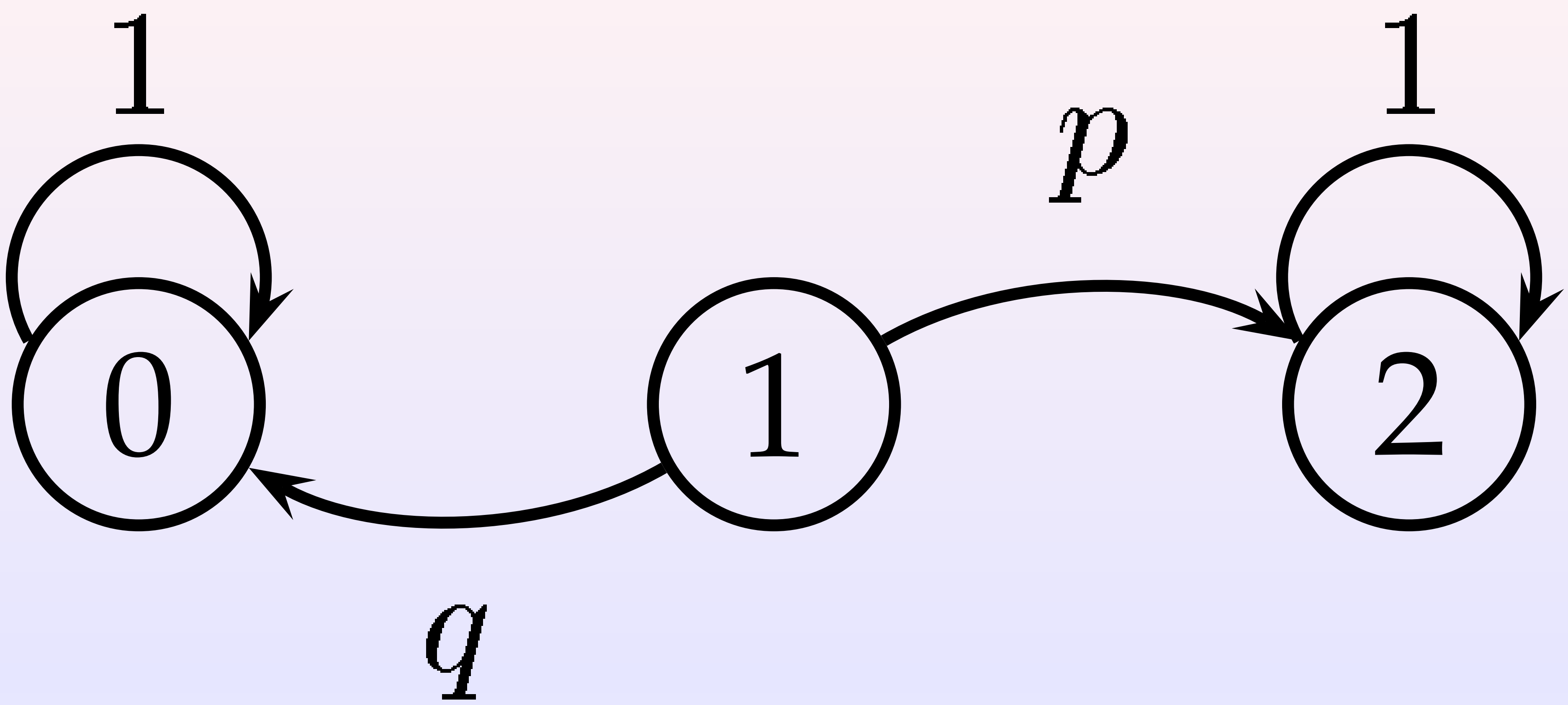
π ist also ein Eigenvektor der Matrix P zum Eigenwert 1 bezüglich Multiplikation von links. Dies bedeutet: Wenn die Kette einmal den Zustandsvektor π angenommen hat, so bleibt dieser bei allen weiteren Übergängen erhalten.

Definition:

P sei die Übergangsmatrix einer Markov-Kette. Einen Zustandsvektor π mit $\pi = \pi \cdot P$ nennen wir stationäre Verteilung der Markov-Kette.

Besitzen alle Markov-Ketten die Eigenschaft, dass sie unabhängig vom Startzustand in eine bestimmte stationäre Verteilung konvergieren?

Nein!



Eine Markov-Kette mit absorbierenden Zuständen

Die Abbildung zeigt die Kette aus dem „gamblers ruin problem“ für $m = 2$. Man sieht sofort, dass hier sowohl $\pi_1 = (1, 0, 0)$ als auch $\pi_2 = (0, 0, 1)$ stationäre Verteilungen sind. Die beiden Zustände 0 und 2 haben jeweils keine ausgehenden Kanten. Solche Zustände heißen absorbierend.

Definition:

Wir bezeichnen einen Zustand i als absorbierend, wenn aus ihm keine Übergänge herausführen, d.h. $p_{ij} = 0$ für alle $j \neq i$ und folglich $p_{ii} = 1$.

Ein Zustand i heißt transient, wenn $f_{ii} < 1$, d.h. mit positiver Wahrscheinlichkeit $1 - f_{ii} > 0$ kehrt der Prozess nach einem Besuch in i nie mehr dorthin zurück.

Ein Zustand i mit $f_{ii} = 1$ heißt rekurrent.

Definition:

Eine Markov-Kette heißt irreduzibel, wenn es für alle Zustandspaare $i, j \in S$ eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $p_{ij}^{(n)} > 0$.

Die Definition besagt anschaulich, dass jeder Zustand von jedem anderen Zustand aus mit positiver Wahrscheinlichkeit erreicht werden kann, wenn man nur genügend viele Schritte durchführt. Dies ist bei endlichen Markov-Ketten genau dann der Fall, wenn der gerichtete Graph des Übergangsdiagramms stark zusammenhängend ist.

Lemma 49:

Für irreduzible endliche Markov-Ketten gilt:
$f_{ij} = \Pr[T_{ij} < \infty] = 1$ für alle Zustände $i, j \in S$. Zusätzlich gilt auch, dass die Erwartungswerte $h_{ij} = \mathbb{E}[T_{ij}]$ alle existieren.

Beweis: Wir betrachten zunächst den Beweis für die Existenz von h_{ij}.

Für jeden Zustand k gibt es nach Definition der Irreduzibilität ein n_k, so dass $p_{kj}^{(n_k)} > 0$. Wir halten n_k fest und setzen $n := \max_k n_k$ und $p := \min_k p_{kj}^{(n_k)}$.

Von einem beliebigen Zustand aus gelangen wir nach höchstens n Schritten mit Wahrscheinlichkeit mindestens p nach j. Wir unterteilen die Zeit in Phasen zu n Schritten und nennen eine Phase erfolgreich, wenn während dieser Phase ein Besuch bei j stattgefunden hat. Die Anzahl von Phasen bis zur ersten erfolgreichen Phase können wir durch eine geometrische Verteilung mit Parameter p abschätzen. Die erwartete Anzahl von Phasen ist somit höchstens $1/p$ und wir schließen $h_{ij} \leq (1/p)n$. Daraus folgt sofort, dass auch $f_{ij} = \Pr[T_{ij} < \infty] = 1$. *q. e. d.*

Satz 50:

Eine irreduzible endliche Markov-Kette besitzt eine eindeutige stationäre Verteilung π und es gilt $\pi_j = 1/h_{jj}$ für alle $j \in S$.

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass es einen Vektor $\pi \neq 0$ mit $\pi = \pi P$ gibt. Sei $e := (1, \ldots, 1)^T$ der Einheitsvektor und I die Einheitsmatrix. Für jede Übergangsmatrix P gilt $P \cdot e = e$, da sich die Einträge der Zeilen von P zu Eins addieren. Daraus folgt $0 = Pe - e = (P - I)e$ und die Matrix $P - I$ ist somit singulär. Damit ist auch die transponierte Matrix $(P - I)^T = P^T - I$ singulär. Es gibt also einen (Spalten-)Vektor $\pi \neq 0$ mit $(P^T - I) \cdot \pi = 0$ bzw. $\pi^T P = \pi^T$. Wir betrachten zunächst den Fall, dass $\sum_i \pi_i \neq 0$. Dann können wir o.B.d.A. annehmen, dass π normiert ist, also dass $\sum_i \pi_i = 1$ gilt.

Wegen Lemma 49 existieren die Erwartungswerte h_{ij}. Für jeden Zustand $j \in S$ gelten somit nach Lemma 48 die Gleichungen

$$\pi_i h_{ij} = \pi_i \Big(1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} h_{kj}\Big) \quad \text{für } i \in S.$$

Wir addieren diese Gleichungen und erhalten wegen $\sum_i \pi_i = 1$

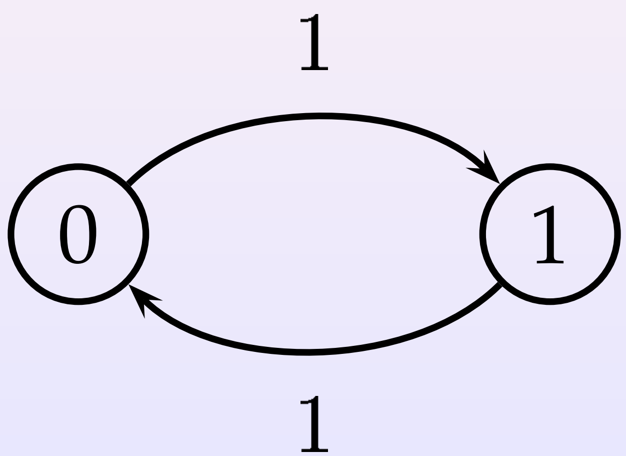
$$\begin{aligned} \pi_j h_{jj} + \sum_{i \neq j} \pi_i h_{ij} &= 1 + \sum_{i \in S} \sum_{k \neq j} \pi_i p_{ik} h_{kj} \\ &= 1 + \sum_{k \neq j} h_{kj} \sum_{i \in S} \pi_i p_{ik} = 1 + \sum_{k \neq j} \pi_k h_{kj}. \end{aligned}$$

Wegen $h_{jj} \geq 1$ ist auch $\pi_j = 1/h_{jj}$ positiv und π stellt somit einen zulässigen Zustandsvektor dar.

Für den Fall $\sum_i \pi_i = 0$ zeigt die selbe Rechnung wie zuvor, dass $\pi_j = 0$ für alle $j \in S$ gilt. Dies steht im Widerspruch zu $\pi \neq 0$.

q. e. d.

Auch wenn eine Markov-Kette irreduzibel ist und somit eine eindeutige stationäre Verteilung besitzt, so muss sie nicht zwangsläufig in diese Verteilung konvergieren.



Eine Markov-Kette mit periodischen Zuständen

Als Startverteilung nehmen wir $q_0 = (1, 0)$ an. Es gilt:

$$q_t = \begin{cases} (1,0) & \text{falls } t \text{ gerade,} \\ (0,1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Kette pendelt also zwischen den beiden Zustandsvektoren $(1, 0)$ und $(0, 1)$ hin und her.

Definition:

Die Periode eines Zustands j ist definiert als die größte Zahl $\xi \in \mathbb{N}$, so dass gilt:

$$\{n \in \mathbb{N}_0 \mid p_{jj}^{(n)} > 0\} \subseteq \{i \cdot \xi \mid i \in \mathbb{N}_0\}$$

Ein Zustand mit Periode $\xi = 1$ heißt aperiodisch. Wir nennen eine Markov-Kette aperiodisch, wenn alle Zustände aperiodisch sind.

Für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt $p_{ii}^{(n)} > 0$ genau dann, wenn es im Übergangsdiagramm einen geschlossenen Weg von i nach i der Länge n gibt.

Damit folgt insbesondere:
Ein Zustand $i \in S$ einer endlichen Markov-Kette ist sicherlich dann aperiodisch, wenn er im Übergangsdiagramm

- eine Schleife besitzt (also $p_{ii} > 0$) oder
- auf mindestens zwei geschlossenen Wegen W_1 und W_2 liegt, deren Längen l_1 und l_2 teilerfremd sind (für die also $\mathrm{ggT}(l_1, l_2) = 1$ gilt).

Lemma 51:

Ein Zustand $i \in S$ ist genau dann aperiodisch, falls gilt: Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $p_{ii}^{(n)} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$.

Beweis: Da je zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen teilerfremd sind, folgt aus der Existenz eines n_0 mit der im Lemma angegebenen Eigenschaft sofort die Aperiodizität des Zustands. Nehmen wir daher umgekehrt an, dass der Zustand i aperiodisch ist. Mit Hilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus kann man die folgende Aussage zeigen. Für je zwei natürliche Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass gilt: Bezeichnet $d := \mathrm{ggT}(a, b)$ den größten gemeinsamen Teiler von a und b, so gibt es für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ nichtnegative Zahlen $x, y \in \mathbb{N}_0$ mit $nd = xa + yb$.

Wegen $p_{ii}^{(xa+yb)} \geq (p_{ii}^{(a)})^x \cdot (p_{ii}^{(b)})^y$ folgt daraus unmittelbar: Gilt für $a, b \in \mathbb{N}$, dass sowohl $p_{ii}^{(a)}$ als auch $p_{ii}^{(b)}$ positiv sind, so gilt auch $p_{ii}^{(nd)} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

Aus der Aperiodizität des Zustand i folgt andererseits, dass es Werte $a_0, \ldots, a_k$ geben muss mit $p_{ii}^{(a_i)} > 0$ und der Eigenschaft, dass für $d_1 = \mathrm{ggT}(a_0, a_1)$ und $d_i := \mathrm{ggT}(d_{i-1}, a_i)$ für $i = 2, \ldots, k$ gilt $d_1 > d_2 > \cdots > d_k = 1$.

Aus beiden Beobachtungen zusammen folgt die Behauptung.

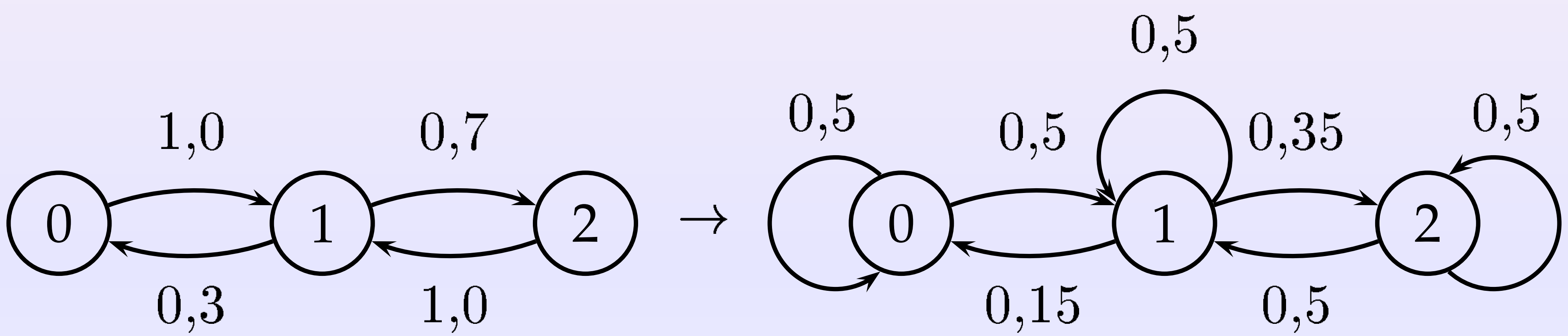
q. e. d.

Korollar 52:

Für irreduzible, aperiodische endliche Markov-Ketten gilt: Es gibt ein $t \in \mathbb{N}$, so dass unabhängig vom Startzustand $(q_t)_i > 0$ für alle $i \in S$.

Beweis: Aus der Irreduzibilität folgt, dass die Markov-Kette jeden Zustand $i \in S$ irgendwann besuchen wird. Wegen Lemma 51 wissen wir ferner, dass die Kette hinreichend viele Schritte nach dem ersten Besuch in i in jedem folgenden Zeitschritt mit positiver Wahrscheinlichkeit zu i zurückkehren wird. Da die Kette endlich ist, gibt es daher ein n_0, so dass die Kette sich unabhängig vom Startzustand für alle $n \geq n_0$ in jedem Zustand $i \in S$ mit positiver Wahrscheinlichkeit aufhält. *q. e. d.*

Die Aperiodizität einer irreduziblen Markov-Kette kann auf einfache Weise sichergestellt werden. Man fügt an alle Zustände so genannte Schleifen an. Diese versieht man mit der Übergangswahrscheinlichkeit $p = 1/2$ und halbiert die Wahrscheinlichkeiten an allen übrigen Kanten.



Einführung von Schleifen

Bei irreduziblen Ketten genügt es, eine einzige Schleife einzuführen, um die Aperiodizität der Kette sicherzustellen.

Definition: Irreduzible, aperiodische Markov-Ketten nennt man ergodisch.