Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Theoretische Informatik und
Grundlagen der Künstlichen Intelligenz
Prof. Dr. Dr. h. c. Wilfried Brauer

SS 2005
Übungsblatt 06
3. Juni 2005
Dr. Werner Meixner

Diskrete Strukturen II

Aufgabe 1

Die hungrige Monsterspinne benötigt sehr viele Kalorien! Daher muss sie innerhalb der nächsten 10 Stunden 500 Fliegen fangen. Genau 100 Fliegen passieren ihr Nest pro Stunde, davon sind 60 klein und werden mit einer Wahrscheinlichkeit von jeweils 1/6 gefangen. Die anderen 40 sind groß und bleiben mit Wahrscheinlichkeit 3/4 im Netz hängen.

a) Wir bereiten zunächst die Wahrscheinlichkeitsräume vor, in denen die Berechnungen stattfinden.

- Definieren Sie Wahrscheinlichkeitsräume (Ω_k, Pr_k) bzw. (Ω_g, Pr_g), die jeweils das Experiment beschreiben, dass eine kleine bzw. grosse Fliege das Netz passiert und dabei ev. gefangen wird!
- Definieren Sie Wahrscheinlichkeitsräume (Ω_K, Pr_K) bzw. (Ω_G, Pr_G), die jeweils das Experiment beschreiben, dass 600 kleine bzw. 400 grosse Fliegen unabhängig voneinander das Netz passieren und dabei ev. gefangen werden!
- Stellen Sie die Anzahl X bzw. Y der gefangenen kleinen bzw. grossen Fliegen als Summe von unabhängigen Indikatorvariablen dar!
- Bestimmen Sie die Dichtefunktionen f_X bzw. f_Y von X bzw. Y!
- Bestimmen Sie $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathrm{Var}[X]$, $\mathrm{Var}[Y]$!
- Definieren Sie nun die Gesamtzahl der unabhängig gefangenen grossen oder kleinen Fliegen als Zufallsvariable Z auf dem Produkt (Ω, Pr) der Wahrscheinlichkeitsräume (Ω_K, Pr_K) und (Ω_G, Pr_G)!
- Bestimmen Sie $\mathbb{E}(Z)$ und $\mathrm{Var}[Z]$!

b) Wie hätten Markov, Chebyshev und Chernoff die Wahrscheinlichkeit $\Pr[Z \geq 500]$ abgeschätzt, dass also die Spinne nicht verhungert?

Diskutieren Sie die Unterschiedlichkeit der erhaltenen Abschätzungen!

Aufgabe 2

Wir starten mit einem Euro Kapital $X_0 = 1$ und spielen folgendes Spiel mit einer fairen Münze: Wir setzen jedes Mal die Hälfte unseres Kapitals und werfen die Münze. Fällt Kopf, verlieren wir den Einsatz. Fällt Zahl, erhalten wir unseren Einsatz zurück und zusätzlich 4/3 des Einsatzes als Gewinn.

a) Welchen Gewinn X_n erwarten wir bei n Würfen?

Gegen welchen Grenzwert strebt der erwartete Gewinn $\mathbb{E}(X_n)$ für $n \to \infty$?

b) Zeigen Sie $X_n \leq \exp(\mu n/2)$ mit Wahrscheinlichkeit gegen 1 für grosses n, d. h.

$$\Pr[\frac{\ln X_n}{n} \leq \frac{\mu}{2}] \to 1.$$

c) Interpretieren Sie die Ergebnisse! Erklären Sie insbesondere den scheinbaren Widerspruch eines erwarteten unendlichen Gewinns und der Wahrscheinlichkeit, daß der Gewinn gegen Null strebt!

Aufgabe 3

Wir haben in der Vorlesung festgestellt, dass die Poisson-Verteilung ein Grenzwert der Bernoulli-Verteilung ist. Beweisen Sie, dass die in der Vorlesung vorgestellte Chernoff-Schranke (wie wir intuitiv vermuten können) auch für Poisson-verteilte Zufallsvarablen gilt.

Aufgabe 4

Auf einem Blatt Papier sind im Abstand von 4cm horizontale Linien aufgemalt. Wir werfen eine Münze mit einem Radius von 1cm auf diese Blatt Papier. Dabei treffen wir immer das Papier und werfen nicht daneben.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit berührt die Münze eine Linie?

b) Wir werfen nun eine 2cm lange Nadel anstatt der Münze. Mit welcher Wahrscheinlichkeit berührt diese die Linie? (Hinweis: Nehmen Sie an, dass Winkel und Ort der Nadel unabhängig sind)