Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Theoretische Informatik und
Grundlagen der Künstlichen Intelligenz
Prof. Dr. Dr. h. c. Wilfried Brauer

SS 2005
Übungsblatt 08
24. Juni 2005
Dr. Werner Meixner

Diskrete Strukturen II

Aufgabe 1

Seien $\{X_1, \ldots, X_n\}$ unabhängige mit Parameter 1 exponentialverteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass

$$\Pr\left[\max_{1 \le i \le n} X_i \le \log n + x\right] = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n .$$

Was passiert für $n \to \infty$?
(Hinweis: Überlegen Sie sich: Was muss für *jedes* X_i gelten, damit die geforderte Bedingung für das Maximum erfüllt ist?)

Aufgabe 2

Seien X und Y kontinuierliche positivwertige Zufallsvariablen. Drücken Sie die Dichtefunktion $f_Z = f_{X/Y}$ von X/Y durch die Dichtefunktionen f_X und f_Y von X und Y aus.
(Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Verteilungsfunktion von Z durch Bildung eines Integrals über $\{(x, y) \mid y \ge x/z\}$.)

Aufgabe 3

Ein Krankenhaus steht in einer Strasse der Länge $\ell < 1$ am Punkt $a \in [0, \ell]$.

a) Wenn alle Notfälle gleichverteilt an einem Punkt in $[0, \ell]$ vorkommen, wo soll das Krankenhaus stehen, damit die erwartete Fahrzeit des Rettungsdienstes minimal ist?

b) Sei nun $\ell = \infty$ und die Notfälle vom Punkt 0 an exponentialverteilt mit Parameter λ. Wo sollte das Krankenhaus jetzt idealerweise stehen?

Aufgabe 4

Angenommen, zwei Zufallsvariablen haben die gemeinsame Dichtefunktion $f(x, y) = \frac{e^{-y}}{y}$ für $0 < x < y$ und $0 < y < \infty$, sonst 0. Berechnen Sie $\mathbb{E}[X^3 \mid Y = y]$.

Aufgabe 5

Versicherungen benutzten manchmal die Funktion

$$h(t) = 0.027 + 0.0025(t - 40)^2$$

um die 'Ausfallrate"[1] durch Lungenkrebs eines t Jahre alten männlichen Kettenrauchers abzuschätzen. Angenommen, ein 40 Jahre alter Raucher hat keine anderen Risiken, wie groß ist nach der Formel die Wahrscheinlichkeit, dass er bis zu seinem 50-ten Lebensjahr nicht erkrankt?

Aufgabe 6

Manche Leute glauben, die tägliche Preisänderung am Aktienmarkt sei eine Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 und Varianz σ^2. Genauer ist der Preis Y_n einer Aktie am n-ten Tag durch

$$Y_n = Y_{n-1} + X_n \quad (n \ge 1)$$

gegeben, wobei $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und identisch verteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz σ^2 sind. Angenommen, heute kostet eine Aktie 100€ und $\sigma^2 = 1$, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Aktie in 30 Tagen mehr als 112€ wert ist? (Hinweis: Verwenden Sie den zentralen Grenzwertsatz)

[1]In diesem Fall ist die englische Bezeichnung *hazard rate* unverfänglicher.