Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2006
Übungsblatt 9
30. Juni 2006

Diskrete Strukturen II

Abgabetermin: 7. Juli 2006 **vor** *der Zentralübung*

Aufgabe 1

Sei $X = \sum_{i=1}^{2000} X_i$ die Summe der Augenzahlen, wenn man 2000-mal mit einem idealen Würfel würfelt.

1. Berechnen Sie näherungsweise $\Pr[7000 \leq X \leq 7100]$!
2. Wie groß muss man Δ wählen, damit $\Pr[7000 - \Delta \leq X \leq 7000 + \Delta] \approx \frac{1}{2}$ gilt?

Approximieren Sie die gesuchten Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes.

Aufgabe 2

Die tatsächlich benötigte CPU-Zeit einer Benutzersitzung an einer Workstation werde als eine Zufallsvariable mit unbekanntem Erwartungswert μ und der Varianz $\sigma^2 = 6{,}25$ [sec^2] angenommen.
Seien X_i unabhängige Stichproben der CPU-Zeit und $\bar{X}$ das arithmetische Mittel der X_i. Wie viele unabhängige Stichproben sollten mindestens gemessen werden, damit

$$\Pr[|\bar{X} - \mu| < 0,1] \geq 0{,}9$$

gilt. Man verwende zur Beantwortung der Frage

1. die Ungleichung von Chebyshev,
2. den Zentralen Grenzwertsatz.

Aufgabe 3

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Stichproben einer Zufallsvariablen X, und seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$. Wir benutzen $Y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i$ als Schätzer für $\mathbb{E}[X]$.

1. Zeigen Sie, dass Y erwartungstreu ist.
2. Y hängt ab von der Wahl der Parameter λ_i. Zeigen Sie, dass Y dann die höchste Effizienz besitzt innerhalb der Wahlmöglichkeiten der Parameter, falls $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n$ gilt.

Aufgabe 4

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Stichproben einer Zufallsvariablen X und sei $\bar{X}$ das arithmetische Mittel der X_i. Wir verwenden die Zufallsvariable

$$V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

als Schätzer für die Varianz von X.
Berechnen Sie den Bias von V! Welche Aussage gilt für $n \to \infty$?