SS 2006

Einführung in die Informatik IV

Ernst W. Mayr

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2006SS/info4/

Sommersemester 2006

Definition 43

Seien $L_1,\ L_2 \subseteq \Sigma^*$. Dann ist der Rechtsquotient

$$L_1/L_2 := \{x \in \Sigma^*;\ (\exists y \in L_2)[xy \in L_1]\}\ .$$

Satz 44

Seien $R, L \subseteq \Sigma^*$, R regulär. Dann ist R/L regulär.

Beweis:

Sei A DFA mit $L(A) = R$, $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

$$\begin{aligned} F' &:= \{q \in Q;\ (\exists y \in L)[\delta(q, y) \in F\} \\ A' &:= (Q, \Sigma, \delta, q_0, F') \end{aligned}$$

Dann ist $L(A') = R/L$. $\square$

Lemma 45

Es gibt einen Algorithmus, der für zwei (nichtdeterministische, mit ϵ-Übergängen) endliche Automaten A_1 und A_2 entscheidet, ob sie äquivalent sind, d.h. ob

$$L(A_1) = L(A_2) \; .$$

Beweis:

Konstruiere einen endlichen Automaten für $(L(A_1) \setminus L(A_2)) \cup (L(A_2) \setminus L(A_1))$ (symmetrische Differenz). Prüfe, ob dieser Automat ein Wort akzeptiert. $\square$

Satz 46 (Pumping Lemma für reguläre Sprachen)

Sei $R \subseteq \Sigma^*$ *regulär. Dann gibt es ein* $n > 0$*, so dass für jedes* $z \in R$ *mit* $|z| \geq n$ *es* $u, v, w \in \Sigma^*$ *gibt, so dass gilt:*

1. $z = uvw$,
2. $|uv| \leq n$,
3. $|v| \geq 1$, *und*
4. $\forall i \geq 0: \; uv^iw \in R$.

Beweis:

Sei $R = L(A), A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

Sei $n = |Q|$. Sei nun $z \in R$ mit $|z| \geq n$.

Sei $q_0 = q^{(0)}, q^{(1)}, q^{(2)}, \ldots, q^{(|z|)}$ die beim Lesen von z durchlaufene Folge von Zuständen von A. Dann muss es $0 \leq i < j \leq n \leq |z|$ geben mit $q^{(i)} = q^{(j)}$.

Seien nun u die ersten i Zeichen von z, v die nächsten $j - i$ Zeichen und w der Rest.

$$\Rightarrow z = uvw, |v| \geq 1, |uv| \leq n, uv^l w \in R \quad \forall l \geq 0\,.$$

$\square$

Beispiel für die Anwendung des Pumping Lemmas:

Satz 47

$L = \{0^{m^2};\ m \geq 0\}$ *ist nicht regulär.*

Beweis:

Angenommen, L sei doch regulär.
Sei n wie durch das Pumping Lemma gegeben. Wähle $m \geq n$.
Dann gibt es ein r mit $1 \leq r \leq n$, so dass gilt:

$$0^{m^2+ir} \in L \text{ für alle } i \in \mathbb{N}_0\ .$$

Aber:

$$m^2 < m^2 + r \leq m^2 + m < m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2\ !$$

$\square$

Denkaufgabe:

$\{a^i b^i;\ i \geq 0\}$ ist nicht regulär.

Definition 48

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Definiere die Relation $\equiv_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ durch

$$x \equiv_L y \Leftrightarrow (\forall z \in \Sigma^*)[xz \in L \Leftrightarrow yz \in L]$$

Lemma 49

$\equiv_L$ *ist eine rechtsinvariante Äquivalenzrelation.*

Dabei bedeutet rechtsinvariant:

$$x \equiv_L y \Rightarrow xu \equiv_L yu \text{ für alle } u \,.$$

Beweis:

Klar! $\square$

Satz 50 (Myhill-Nerode)

Sei $L \subseteq \Sigma^*$. Dann sind äquivalent:

1. *L ist regulär*
2. *$\equiv_L$ hat endlichen* Index *(= Anzahl der Äquivalenzklassen)*
3. *L ist die Vereinigung einiger der endlich vielen Äquivalenzklassen von $\equiv_L$.*

Beweis:

(1)⇒(2):

Sei $L = L(A)$ für einen DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

Dann gilt

$$\hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, y) \quad \Rightarrow \quad x \equiv_L y \; .$$

Also gibt es höchstens so viele Äquivalenzklassen, wie der Automat A Zustände hat.

Beweis:
(2)⇒(3):

Sei $[x]$ die Äquivalenzklasse von x, $y \in [x]$ und $x \in L$.

Dann gilt nach der Definition von $\equiv_L$:

$$y \in L$$

Beweis:

(3)⇒(1):

Definiere $A' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ mit

$$
\begin{aligned}
Q' &:= \{[x];\ x \in \Sigma^*\} && (Q' \text{ endlich!}) \\
q_0' &:= [\epsilon] \\
\delta'([x], a) &:= [xa] \quad \forall x \in \Sigma^*, a \in \Sigma && (\text{konsistent!}) \\
F' &:= \{[x];\ x \in L\}
\end{aligned}
$$

Dann gilt:

$$L(A') = L$$

□

3.9 Konstruktion minimaler endlicher Automaten

Satz 51

Der nach dem Satz von Myhill-Nerode konstruierte deterministische endliche Automat hat unter allen DFA's für L eine minimale Anzahl von Zuständen.

Beweis:

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit $L(A) = L$. Dann liefert

$$x \equiv_A y :\Leftrightarrow \delta(q_0, x) = \delta(q_0, y)$$

eine Äquivalenzrelation, die $\equiv_L$ verfeinert.
Also gilt: $|Q| = \text{index}(\equiv_A) \geq \text{index}(\equiv_L) =$ Anzahl der Zustände des Myhill-Nerode-Automaten. $\square$

Algorithmus zur Konstruktion eines minimalen FA

Eingabe: $A(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ DFA $\quad (L = L(A))$

Ausgabe: Äquivalenzrelation auf Q.

0. Entferne aus Q alle überflüssigen, d.h. alle von q_0 aus nicht erreichbaren Zustände. Wir nehmen nun an, dass Q keine überflüssigen Zustände mehr enthält.
1. Markiere alle Paare $\{q_i, q_j\} \in Q^2$ mit

$$q_i \in F \text{ und } q_j \notin F \text{ bzw. } q_i \notin F \text{ und } q_j \in F \ .$$

2. **for** alle unmarkierten Paare $\{q_i, q_j\} \in Q^2$, $q_i \neq q_j$ **do**
    if $(\exists a \in \Sigma)[\{\delta(q_i, a), \delta(q_j, a)\}$ ist markiert$]$ **then**
        markiere $\{q_i, q_j\}$;
        markiere alle $\{q, q'\}$ in $\{q_i, q_j\}$'s Liste und
        rekursiv alle Paare in der Liste von $\{q, q'\}$ usw.
    else
        for alle $a \in \Sigma$ **do**
            if $\delta(q_i, a) \neq \delta(q_j, a)$ **then**
                trage $\{q_i, q_j\}$ in die Liste von $\{\delta(q_i, a), \delta(q_j, a)\}$ ein
            fi
        od
    fi
  od
3. Ausgabe: q äquivalent zu $q' \Leftrightarrow \{q, q'\}$ *nicht* markiert.

Satz 52

Obiger Algorithmus liefert einen minimalen DFA für $L(A)$.

Beweis:

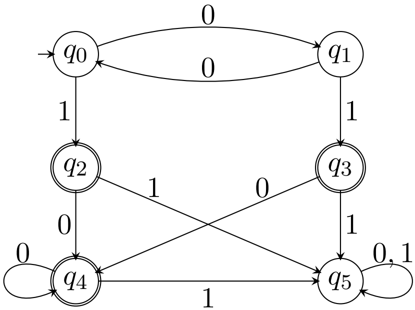
Sei $A' = (Q', \Sigma', \delta', q'_0, F')$ der konstruierte Äquivalenzklassenautomat.
Offensichtlich ist $L(A) = L(A')$.
Es gilt: $\{q, q'\}$ wird markiert gdw

$$(\exists\, w \in \Sigma^*)[\delta(q, w) \in F \wedge \delta(q', w) \notin F \text{ oder umgekehrt}],$$

wie man durch einfach Induktion über $|w|$ sieht.
Also: Die Anzahl der Zustände von A' (nämlich $|Q'|$) ist gleich dem Index von $\equiv_L$. $\square$

Beispiel 53

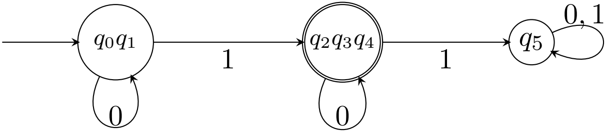
Automat A:



	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
q_0	/	/	/	/	/	/
q_1		/	/	/	/	/
q_2	$\times$	$\times$	/	/	/	/
q_3	$\times$	$\times$		/	/	/
q_4	$\times$	$\times$			/	/
q_5	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	/

Automat A'

$L(A') = 0^*10^*$



Satz 54

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ *ein DFA. Der Zeitaufwand des obigen Minimalisierungsalgorithmus ist* $O(|Q|^2|\Sigma|)$*.*

Beweis:

Für jedes $a \in \Sigma$ muss jede Position in der Tabelle nur konstant oft besucht werden. $\square$