2.4 Quick-Sort

Beim Quick-Sort-Verfahren wird in jeder Phase ein Element p der zu sortierenden Folge als Pivot-Element ausgewählt (wie dies geschehen kann, wird noch diskutiert). Dann wird in situ und mit einer linearen Anzahl von Vergleichen die zu sortierende Folge so umgeordnet, dass zuerst alle Elemente $< p$, dann p selbst und schließlich alle Elemente $> p$ kommen. Die beiden Teilfolgen links und rechts von p werden dann mit Quick-Sort rekursiv sortiert (Quick-Sort ist also ein Divide-and-Conquer-Verfahren).

Quick-Sort benötigt im schlechtesten Fall, nämlich wenn als Pivot-Element stets das kleinste oder größte der verbleibenden Elemente ausgewählt wird,

$$\sum_{i=1}^{n-1}(n-i) = \binom{n}{2}$$

Vergleiche.

Satz 165

QuickSort *benötigt zum Sortieren eines Feldes der Länge* n *durchschnittlich nur*

$$2\ln(2) \cdot n \operatorname{ld}(n) + O(n)$$

viele Vergleiche.

Beweis:

Siehe Vorlesung Diskrete Strukturen II □

Entscheidend für die Laufzeit von Quick-Sort ist eine „gute“ Wahl des Pivotelements. U.a. werden folgende Varianten verwendet:

1. Nimm stets das letzte Element der (Teil-)Folge als Pivotelement
   Nachteil: sehr schlecht bei vorsortierten Arrays!
2. Median-of-3 Verfahren: Wähle den Median (das mittlere Element) des ersten, mittleren und letzten Elements des Arrays
   Analyse Übungsaufgabe!
3. Wähle ein zufälliges Element als Pivotelement
   liefert die o.a. durchschnittliche Laufzeit, benötigt aber einen Zufallsgenerator.

2.5 Heap-Sort

Definition 166

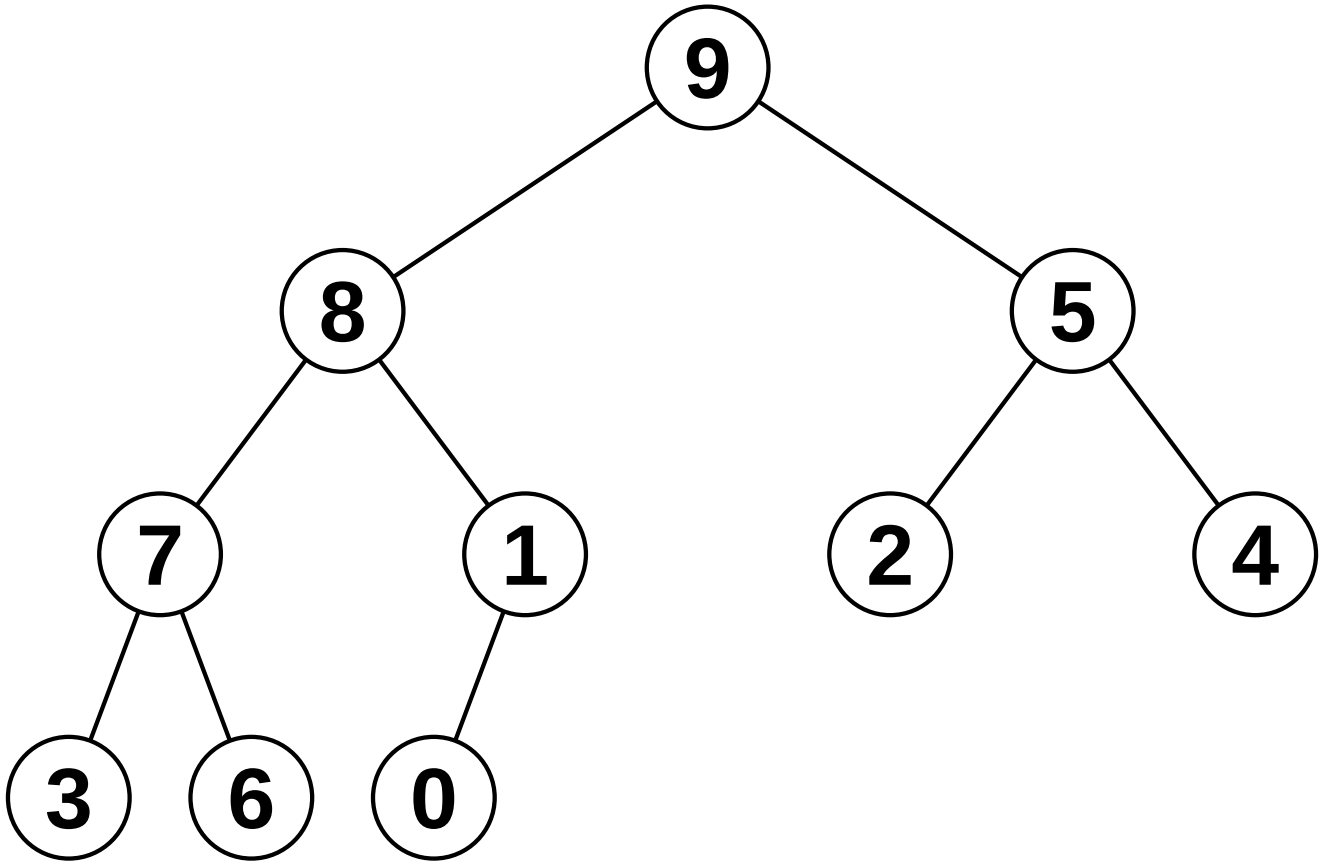
Ein Heap ist ein Binärbaum, an dessen Knoten Schlüssel gespeichert sind, so dass gilt:

1. alle inneren Knoten bis auf maximal einen haben genau zwei Kinder;
2. alle Knoten mit weniger als zwei Kindern (also insbesondere die Blätter) befinden sich auf der untersten oder der zweituntersten Schicht;
3. die unterste Schicht ist von links nach rechts aufgefüllt;
4. für jeden Knoten (mit Ausnahme der Wurzel) gilt, dass sein Schlüssel kleiner ist als der seines Vaters (Heap-Bedingung).

Bemerkungen:

1. Die hier definierte Variante ist ein max-Heap.
2. Die Bezeichnung heap wird in der Algorithmentheorie auch allgemeiner für Prioritätswarteschlangen benutzt!

Beispiel 167



Der Algorithmus HeapSort besteht aus zwei Phasen.

1. In der ersten Phase wird aus der unsortierten Folge von n Elementen ein Heap gemäß Definition aufgebaut.
2. In der zweiten Phase wird dieser Heap ausgegeben, d.h. ihm wird n-mal jeweils das größte Element entnommen (das ja an der Wurzel steht), dieses Element wird in die zu sortierende Folge aufgenommen und die Heap-Eigenschaften wird wieder hergestellt.

Betrachten wir nun zunächst den Algorithmus REHEAP zur Korrektur der Datenstruktur, falls die Heap-Bedingung höchstens an der Wurzel verletzt ist.

Algorithmus REHEAP

sei v die Wurzel des Heaps;
while Heap-Eigenschaft in v nicht erfüllt **do**
  sei v' das Kind von v mit dem größeren Schlüssel
  vertausche die Schlüssel in v und v'
  $v := v'$
od

Zweite Phase von HeapSort

for $i := n$ **downto** 1 do
  sei r die Wurzel des Heaps
  sei k der in r gespeicherte Schlüssel
  $A[i] := k$
  sei b das rechteste Blatt in der untersten Schicht des Heaps
  kopiere den Schlüssel von b in die Wurzel r
  entferne das Blatt b
  Reheap
od

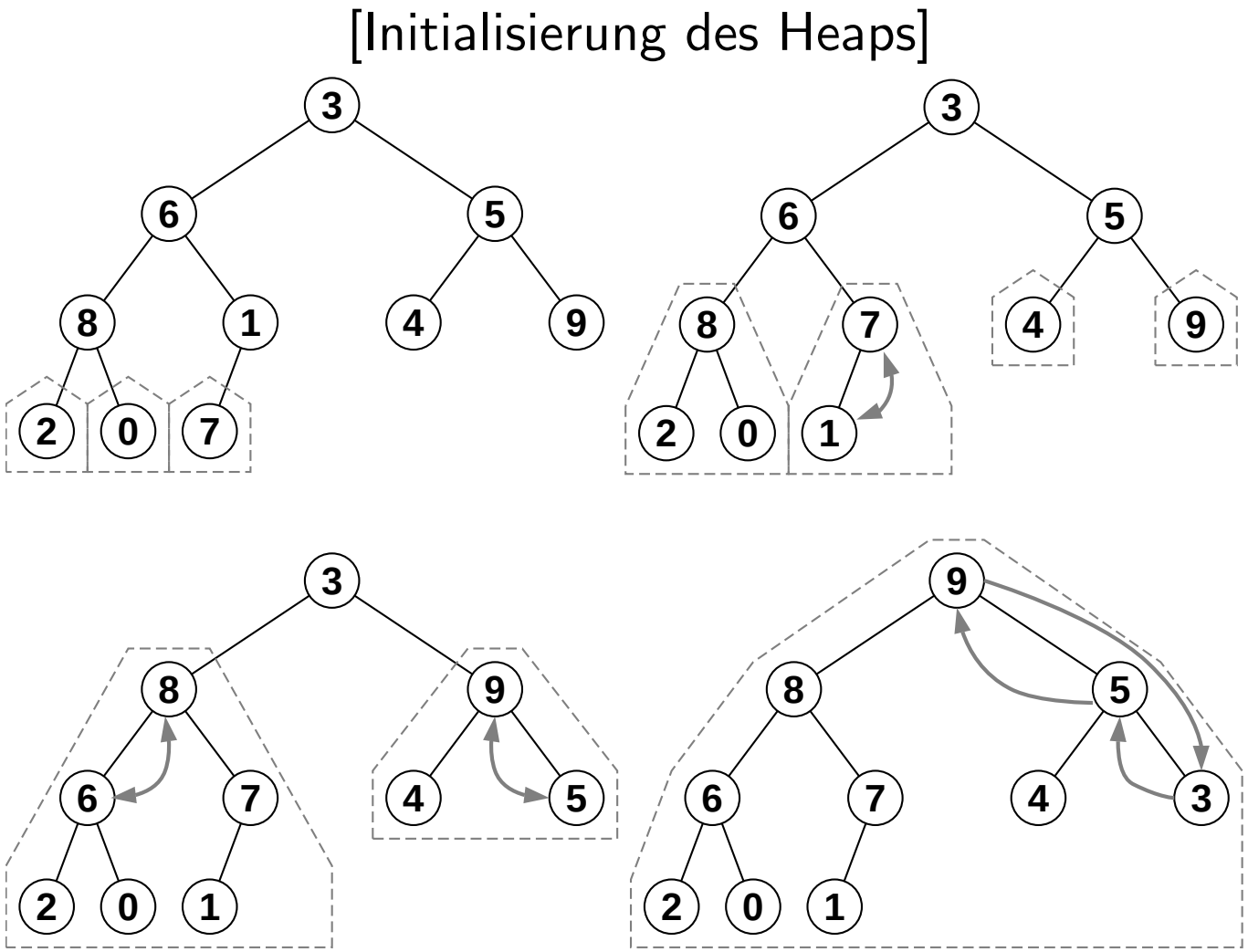
Nach Beendigung der zweiten Phase von HeapSort ist das Feld $A[1..n]$ aufsteigend sortiert.

Mit geeigneten (kleinen) Modifikationen kann HeapSort in situ implementiert werden. Die Schichten des Heaps werden dabei von oben nach unten und von links nach rechts im Feld A abgespeichert.

In der ersten Phase von HeapSort müssen wir mit den gegebenen n Schlüsseln einen Heap erzeugen.

Wir tun dies iterativ, indem wir aus zwei bereits erzeugten Heaps und einem weiteren Schlüssel einen neuen Heap formen, indem wir einen neuen Knoten erzeugen, der die Wurzel des neuen Heaps wird. Diesem neuen Knoten ordnen wir zunächst den zusätzlichen Schlüssel zu und und machen die beiden alten Heaps zu seinen Unterbäumen. Damit ist die Heap-Bedingung höchstens an der Wurzel des neuen Baums verletzt, was wir durch Ausführung der Reheap-Operation korrigieren können.

Beispiel 168



Lemma 169

Die Reheap-Operation erfordert höchstens $O($Tiefe des Heaps$)$ Schritte.

Beweis:

Reheap führt pro Schicht des Heaps nur konstant viele Schritte aus. □

Lemma 170

Die Initialisierung des Heaps in der ersten Phase von HeapSort *benötigt nur $O(n)$ Schritte.*

Beweis:

Sei d die Tiefe (Anzahl der Schichten) des (n-elementigen) Heaps. Die Anzahl der Knoten in Tiefe i ist $\leq 2^i$ (die Wurzel habe Tiefe 0). Wenn ein solcher Knoten beim inkrementellen Aufbau des Heaps als Wurzel hinzugefügt wird, erfordert die Reheap-Operation $\leq d - i$ Schritte, insgesamt werden also

$$\leq \sum_{i=0}^{d-1} (d-i)2^i = O(n)$$

Schritte benötigt. □

Satz 171

HeapSort *benötigt maximal* $O(n \log n)$ *Schritte.*

Beweis:

In der zweiten Phase werden $< n$ Reheap-Operationen auf Heaps der Tiefe $\leq \log n$ durchgeführt. □

Bemerkung:

1. Eine genauere Analyse ergibt eine Schranke von $2n \operatorname{ld}(n) + o(n)$.
2. Carlsson hat eine Variante von HeapSort beschrieben, die mit $n \operatorname{ld} n + O(n \log \log n)$ Vergleichen auskommt:

Svante Carlsson:
A variant of heapsort with almost optimal number of comparisons.
Inf. Process. Lett., **24**(4):247–250, 1987