Definition 226

3SAT ist die Menge der booleschen Formeln in konjunktiver Normalform, die in jeder Klausel höchstens drei Literale enthalten und die erfüllbar sind.

Satz 227

3SAT *ist* $\mathcal{NP}$*-vollständig.*

Beweis:

Offensichtlich ist 3SAT $\in \mathcal{NP}$.

Es bleibt zu zeigen, dass 3SAT $\mathcal{NP}$-schwer ist.

Wir tun dies, indem wir SAT polynomiell auf 3SAT reduzieren.

Beweis:

Sei F eine beliebige boolesche Formel in konjunktiver Normalform. Wir ersetzen jede Klausel

$$(x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_k)$$

(x_i bezeichnet hier ein beliebiges Literal) durch

$$(x_1 \vee x_2 \vee z_2) \wedge (\overline{z_2} \vee x_3 \vee z_3) \wedge \ldots \wedge (\overline{z_{k-2}} \vee x_{k-1} \vee x_k)\,,$$

wobei $z_2, \ldots, z_{k-2}$ neue Variable sind.

Es gibt eine Belegung für die z_i, so dass alle Klauseln erfüllt sind, gdw mindestens eines der Literale x_j wahr ist.

Die Größe der konstruierten Formel ist polynomiell in der Größe der Ausgangsklausel. Daraus folgt, dass die obige Umformung eine $\preceq_p$-Reduktion ist. □

Satz 228

3-COLORING *ist* $\mathcal{NP}$*-vollständig.*

Beweis:

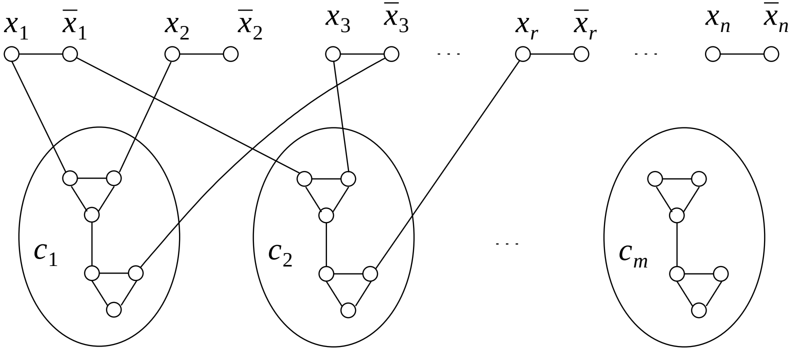
Es ist wiederum klar, dass 3-COLORING $\in \mathcal{NP}$.

Um zu zeigen, dass 3-COLORING $\mathcal{NP}$-schwer ist, reduzieren wir 3SAT auf 3-COLORING.

Sei also eine boolesche Formel mit den Literalen $x_1, \overline{x_1}, \ldots, x_n, \overline{x_n}$ und den Klauseln $c_1, \ldots, c_m$ gegeben.

Beweis:

Wir konstruieren dazu folgenden Graphen:



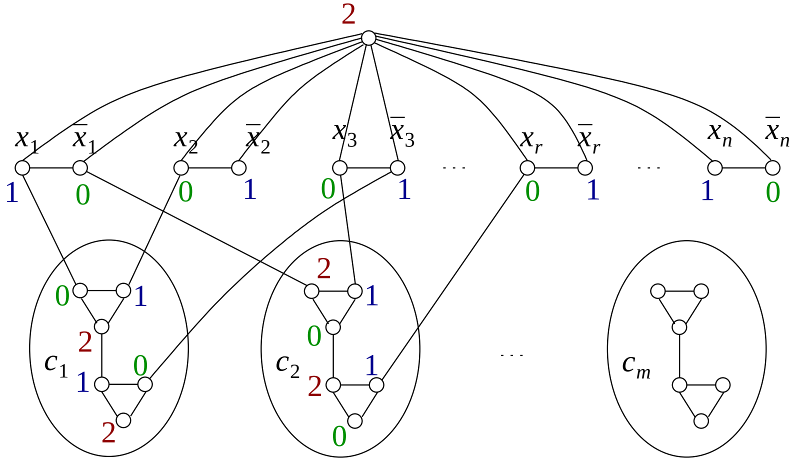
Die ersten beiden Klauseln sind hier

$$c_1 = x_1 \vee x_2 \vee \bar{x_3}$$

$$c_2 = \bar{x_1} \vee x_3 \vee x_r$$

Beweis:

Um zu erzwingen, dass alle Variablen nur mit Farben $\in \{0, 1\}$ gefärbt werden, verbinden wir alle "Literal"-Knoten mit einem zusätzlichen Knoten, der (per Vereinbarung) die Farbe 2 erhält.



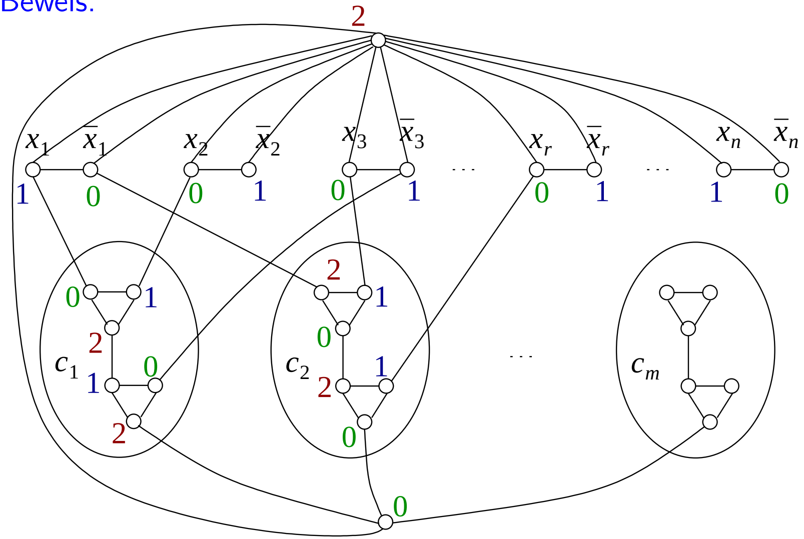
Beweis:

Wie am Beispiel der Klausel c_2 ersichtlich, muss der unterste Knoten (der *Ausgang*) der Klausel die Farbe 0 erhalten, falls alle Literale der Klausel die Farbe 0 haben.

Falls nicht alle Literale einer Klausel die Farbe 0 haben, kann der Ausgang der Klausel, wie am Beispiel von c_1 ersichtlich, mit der Farbe 2 gefärbt werden.

Wir führen nun noch einen weiteren Hilfsknoten ein, der (per Vereinbarung) mit der Farbe 0 gefärbt wird (ansonsten werden die Farben entsprechend umbenannt). Damit ergibt sich:

Beweis:



und es gilt: F erfüllbar $\Longleftrightarrow$ G mit 3 Farben färbbar. $\square$

2.1 Weitere Varianten von SAT

Auch die folgenden Varianten von 3SAT sind $\mathcal{NP}$-vollständig:

- UNIQUE 3SAT
  - Instanz: Ausdruck in 3CNF-Form
  - Frage: Gibt es eine Belegung, so dass in jeder Klausel genau ein Literal wahr wird?
- NOT-ALL-EQUAL 3SAT
  - Instanz: Ausdruck in 3CNF-Form
  - Frage: Gibt es eine Belegung, so dass in jeder Klausel mindestens ein wahres und mindestens ein falsches Literal vorkommt?

Definition 229

Sei F ein boolescher Ausdruck in CNF. Der zu F gehörige Klauselgraph enthält einen Knoten x_i für jede Variable (!) x_i und einen Knoten C_j für jede Klausel C_j in F. Die Kante $\{x_i, C_j\}$ existiert genau dann, wenn C_j das Literal x_i oder $\overline{x_i}$ enthält.

Und noch einige $\mathcal{NP}$-vollständige Varianten von 3SAT:

- PLANAR 3SAT
  - Instanz: Ausdruck in 3CNF-Form, dessen Klauselgraph planar ist
  - Frage: Ist der Ausdruck erfüllbar?
- R-3SAT (restricted 3SAT)
  - Instanz: Ausdruck in 3CNF-Form, in dem jede Variable höchstens 5 mal auftritt
  - Frage: Ist der Ausdruck erfüllbar?

2.2 Weitere NP-vollständige Probleme

Definition 230

Das Clique-Problem ist

- Instanz: Graph $G = (V, E)$, $k \in \mathbb{N}$
- Frage: Enthält G einen vollständigen (knoteninduzierten) Teilgraphen mit mindestens k Knoten?

Definition 231

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine Knotenmenge $I \subseteq V$ heißt unabhängig (in G), falls $I \times I \cap E = \emptyset$.

Definition 232

Das Independent Set-Problem ist

- Instanz: Graph $G = (V, E)$, $k \in \mathbb{N}$
- Frage: Enthält G eine unabhängige Teilmenge I der Knoten mit $|I| \geq k$?

Satz 233

Die Probleme CLIQUE und INDEPENDENT-SET sind $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis:

siehe z.B.

Garey, Michael R. and David S. Johnson:
Computers and intractability. A guide to the theory of NP-completeness.
W.H. Freeman and Company:New York-San Francisco, 1979

$\square$

Beobachtung: G hat eine Clique $\geq k$ gdw der Komplementärgraph $\bar{G}$ eine unabhängige Knotenmenge der Größe $\geq k$ hat.

Die folgenden Entscheidungsprobleme sind $\mathcal{NP}$-vollständig:

- HAMILTONSCHER KREIS (HC)
  - Instanz: Graph $G = (V, E)$ (oder Digraph)
  - Frage: Gibt es in G einen Kreis, der jeden Knoten genau einmal enthält?
- VERTEX-COVER (VC)
  - Instanz: Graph $G = (V, E)$, $k \in \mathbb{N}$
  - Frage: Gibt es eine Teilmenge $V' \subseteq V$ der Knoten, $|V'| \leq k$, so dass jede Kante in G zu einem Knoten in V' inzident ist?

Ebenso sind $\mathcal{NP}$-vollständig:

- 3-PARTITION
  - Instanz: $3n$ (nicht notwendig paarweise verschiedene) Zahlen $a_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, 3n$
  - Frage: Können die $3n$ Zahlen so in n Tripel partitioniert werden, dass alle Tripelsummen gleich sind?
- PARTITION
  - Instanz: $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$
  - Frage: Gibt es $I \subset \{1, \ldots, n\}$ mit

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \notin I} a_i \ ?$$

- (0-1) KNAPSACK
  - Instanz: $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{N}$
  - Frage: Gibt es $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit

$$\sum_{i \in I} a_i = b \ ?$$