Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2007
Übungsblatt 11
2. Juli 2007

Einführung in die Theoretische Informatik

Abgabetermin: 9. Juli 2007 **vor** *der Vorlesung*

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Wir nehmen an, dass es WHILE-Programme gibt zur Berechnung von $x_i := x_j + x_k$, $x_i := x_j \dot{-} x_k$, $x_i := x_j * x_k$ und der ganzzahligen Division $x_i := x_j / x_k$.
Geben Sie ein WHILE-Programm an, das den größten gemeinsamen Teiler zweier natürlicher Zahlen $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ berechnet.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Wir betrachten GOTO-Programme.
Entwerfen Sie ein GOTO-Unterprogramm mit folgender Bedeutung:
Falls $x_i \neq x_j$, dann wird die Berechnung in der mit M markierten Anweisung fortgeführt. Andernfalls wird die nächste Anweisung ausgeführt.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Wir betrachten die Ackermann-Funktion $a : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$.

1. Berechnen Sie $a(2, 1)$!
2. Beweisen Sie für alle $x, y \in \mathbb{N}_0$ die Ungleichung $a(x, y+1) \leq a(x+1, y)$.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Wir betrachten die Operationen $x \dot{-} y$ und $x \bmod y$ für $x, y \in \mathbb{N}_0$.

1. Definieren Sie beide Funktionen entprechend der Definition primitiv rekursiver Funktionen.
2. Geben Sie zur Berechnung beider Funktionen entsprechende LOOP-Programme an.

__Hinweis:__ Die als Vorbereitung *bezeichneten Aufgaben werden nicht bewertet und dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben, die ebenfalls nicht bewertet werden. Die Abgabe einer Bearbeitung der Vorbereitungsaufgaben zusammen mit der Bearbeitung der Hausaufgaben wird empfohlen. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet.*

Vorbereitung 1

Ein WHILE-Programm P wird stets auf einer endlichen Menge von k Variablen $x_1, \dots, x_k$ ausgeführt. Sei $h : N_0^k \to \mathbb{N}_0^k$ eine komponentenweise primitiv rekursive Funktion, die das Ergebnis der Ausführung von P auf den Variablen $x_1, \dots, x_k$ darstellt.

Geben Sie eine (komponentenweise) primitiv rekursive Funktion $f : N_0^{k+1} \to \mathbb{N}_0^k$ an, so dass $f(n, x_1, \dots, x_k)$ die n-malige Ausführung der Funktion h auf $x_1, \dots, x_k$ bedeutet.

Vorbereitung 2

Für jedes WHILE-Programm `WHILE` $x_i \neq 0$ `DO` P `END` ist die Anzahl n der Ausführungen von P auf der entsprechenden Menge von Variablen $x_1, \dots, x_k$ wohlbestimmt, falls P endlich oft ausgeführt wird. Geben Sie eine μ-rekursive Funktion $f : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$ an, die n liefert oder undefiniert ist, falls das WHILE-Programm nicht terminiert.

Tutoraufgabe 1

Beweisen Sie für alle Funktionen $f : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$:

f ist μ-rekursiv genau dann, wenn f WHILE-berechenbar ist.

Tutoraufgabe 2

Zeigen Sie, dass die Sprache

$$H_I := \{w\,;\, M_w \text{ gibt für jede Eingabe } y \text{ wieder } y \text{ als Ausgabe aus}\}$$

nicht entscheidbar ist.

Geben Sie weitere Prädikate $P(M)$ für Turingmaschinen M an, so dass die Sprache $H_P = \{w\,;\, P(M_w)\}$ nicht entscheidbar ist.