Fortgeschrittene Netzwerk- und Graph-Algorithmen

Dr. Hanjo Täubig

Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
(Prof. Dr. Ernst W. Mayr)
Institut für Informatik
Technische Universität München

Wintersemester 2007/08

Übersicht

1 Zusammenhang
- k-Kanten-Zusammenhangskomponenten

k-Kanten-Zusammenhangskomponenten

David W. Matula: *k*-Components, Clusters, and Slicings in Graphs

- gegeben: ungewichteter, ungerichteter Graph $G = (V, E)$
- Wdh.: Eine k-Kanten-(Zusammenhangs-)Komponente von G ist ein maximaler k-kanten-zusammenhängender Teilgraph von G.
- Da wir in diesem Abschnitt nur über Kanten-Zusammenhangskomponenten sprechen, werden wir diese oft einfach als k-Komponenten bezeichnen.
- Graphen bzw. Komponenten bestehend aus einem einzelnen Knoten nennen wir *trivial*.

Vereinigung von Teilgraphen

Lemma

Seien $G_1, G_2, \ldots, G_n$ Teilgraphen von G, so dass $\bigcup_{i=1}^{n} G_i$ zusammenhängend ist, dann gilt:

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{n} G_i\right) \geq \min_{1 \leq i \leq n} \{\lambda(G_i)\}$$

Vereinigung von Teilgraphen

Beweis.

- Wenn $\bigcup_{i=1}^{n} G_i$ aus einem einzigen Knoten besteht, gilt die Behauptung (denn beide Seiten sind Null).
- Sei anderenfalls $C = (A, \bar{A})$ ein MinCut von $\bigcup_{i=1}^{n} G_i$.
- Dieser MinCut muss mindestens eine Kante enthalten, da $\bigcup_{i=1}^{n} G_i$ zusammenhängend und nicht trivial ist.
- Falls C eine Kante eines Teilgraphen G_j enthält, enthält sowohl A als auch $\bar{A}$ jeweils mindestens einen Knoten aus $V(G_j)$, d.h. C muss einen Cut für G_j enthalten.

$\Rightarrow$ Für mindestens ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt: $\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{n} G_i\right) \geq \lambda(G_j)$

□

Vereinigung von Teilgraphen

- Für die Teilgraphen $G_1, G_2, \ldots, G_n$ von G muss jeder Cut von $G\left[\bigcup_{i=1}^{n} V(G_i)\right]$ einen Cut von $\bigcup_{i=1}^{n} G_i$ enthalten, so dass gilt:

$$\lambda\left(G\left[\bigcup_{i=1}^{n} V(G_i)\right]\right) \geq \lambda\left(\bigcup_{i=1}^{n} G_i\right)$$

Folgerung

Wenn $G_1, G_2, \ldots, G_n$ Teilgraphen von G sind, so dass $\bigcup_{i=1}^{n} G_i$ zusammenhängend ist, dann gilt:

$$\lambda\left(G\left[\bigcup_{i=1}^{n} V(G_i)\right]\right) \geq \min_{1 \leq i \leq n}\{\lambda(G_i)\}$$

Vereinigung von Teilgraphen

- Man beachte, dass in der Folgerung die Bedingung, dass $\bigcup_{i=1}^{n} G_i$ zusammenhängend ist, nicht durch die abgeschwächte Forderung, dass $G\left[\bigcup_{i=1}^{n} V(G_i)\right]$ zusammenhängend ist, ersetzt werden kann.

  Bsp.: wenn G_1 und G_2 zwei disjunkte Kreise sind, die in G durch eine einzelne Kante verbunden sind, ist die Ungleichung in der Folgerung nicht erfüllt.
- Eine weitere Konsequenz des Lemmas ist die Tatsache, dass die k-Kanten-Komponenten jedes Graphen disjunkt sind. (Beweis siehe Abschnitt 'Fundamentale Sätze' am Anfang des Kapitels)

Die Kohäsion / Zusammenhangsfunktion

Definition

Für jedes Element (Knoten oder Kante) $x \in V(G) \cup E(G)$ eines Graphen G ist die Kohäsion (cohesiveness) bzw. die Zusammenhangsfunktion $h(x)$ definiert als maximaler Wert des Kantenzusammenhangs von allen Teilgraphen von G, die x enthalten.

Das Maximum $\sigma(G)$ aller Kohäsionswerte des Graphen G wird als Stärke (strength) des Graphen bezeichnet, also $\sigma(G) = \max\{\lambda(G') : G' \text{ ist Teilgraph von } G\}$.

Die Kohäsionsmatrix

- Die Zusammenhangsfunktion kann durch die (symmetrische) Kohäsionsmatrix dargestellt werden.
- Zeilen und Spalten werden durch die Knoten des Graphen indiziert, und der Eintrag für Position v_i, v_j ist jeweils die Kohäsion der Kante $\{v_i, v_j\}$, falls sie existiert, und sonst Null.
- Die Kohäsion eines Knotens ist dann das Maximum der entsprechenden Zeile oder Spalte.
- Die Stärke von G ist das Maximum aller Matrixeinträge.

Die Kohäsionsmatrix

- Für $v \in V(G)$ gilt: $0 \leq h(v) \leq \deg(v)$.
- Falls $\{v_i, v_j\} \in E(G)$, gilt:
  $1 \leq h(\{v_i, v_j\}) \leq \min\{\deg(v_i), \deg(v_j)\}$
- $h(x) = 0$ gilt also nur, wenn x ein isolierter Knoten ist.
- $\sigma(G) = 0$ gilt nur, wenn G keine Kante enthält.
- $\sigma(G) = 1$ gilt genau dann, wenn G ein Wald mit mindestens einer Kante ist, denn jeder Kreis würde $\sigma(G) \geq 2$ implizieren.

Eindeutige Komponentenzuordnung

- Für $x \in V(G) \cup E(G)$ und $h(x) \geq 1$ muss es für jedes $k \in \{1, \ldots, h(x)\}$ einen k-kanten-zusammenhängenden Teilgraph geben, der x enthält.
- Insbesondere muss es auch einen maximalen solchen Teilgraph (also eine k-Kanten-Komponente) geben.
- Da die k-Kanten-Komponenten sich nicht überschneiden ist dieser maximale Teilgraph (die Komponente) eindeutig.

Folgerung

Für jeden Graphen G, jedes Element $x \in V(G) \cup E(G)$ und jede Zusammenhangszahl $k \in \{1, \ldots, h(x)\}$ existiert eine eindeutige k-Kanten-Zusammenhangskomponente in G, die x enthält.

Eindeutige Komponentenzuordnung

- Die eindeutige $h(x)$-Komponente, die x enthält, hat unter allen Maximum k-kantenzusammenhängenden Teilgraphen von G, die x enthalten, die größte Knotenanzahl und heißt $h(x)$-Komponente selektiert durch x (mit Symbol H_x).
- Die Kohäsion eines Elements kann aus dem Wissen über einen beliebigen Teilgraph maximalen Kantenzusammenhangs, der das Element enthält, abgeleitet werden.
- Aus der Kenntnis der k-Kanten-Komponenten von G für alle k kann man $h(x)$ für jedes Element x bestimmen.
- Aber man kann umgekehrt auch mit Hilfe der Zusammenhangsfunktion die Komponente H_x bestimmen.

Komponentenbestimmung

Satz

Sei x ein Element des Graphen G mit $h(x) \geq 1$. Sei M_x ein maximaler zusammenhängender Teilgraph von G, der x enthält und dessen Elemente alle Kohäsion mindestens $h(x)$ haben. Dann gilt $M_x = H_x$.

Beweis.

- Für $x \in V(G) \cup E(G)$ mit $h(x) \geq 1$ sei M_x definiert wie in dem Satz.
- Dann haben für jedes $y \in V(M_x) \cup E(M_x)$ alle Elemente von H_y Kohäsion mindestens $h(y) \geq h(x)$, so dass also gilt $H_y \cup M_x = M_x$.

Komponentenbestimmung

Beweis.

- Da jedes Element von M_x in einem H_y ist, gilt:

$$M_x = \bigcup \{H_y : y \in V(M_x) \cup E(M_x)\}$$

- Nach dem Lemma gilt daher

$$\lambda(M_x) \geq h(x)$$

- Da M_x selbst ein Teilgraph von G ist, der x enthält, gilt

$$\lambda(M_x) = h(x)$$

- Damit ist M_x ein $h(x)$-kanten-zusammenhängender Teilgraph von G und muss in der $h(x)$-Komponente selektiert durch x enthalten sein, also in H_x.

Komponentenbestimmung

Beweis.

- Da wegen $M_x = \bigcup\{H_y : y \in V(M_x) \cup E(M_x)\}$ der Teilgraph H_x in M_x enthalten sein muss, gilt $M_x = H_x$.
- Der im Satz definierte Teilgraph M_x ist damit eindeutig und kann bestimmt werden, indem man ausgehend von x alle Elemente anhängt, die von x über einen Pfad erreichbar sind, dessen Elemente alle Kohäsion mindestens $h(x)$ aufweisen.

$\square$

Folgerung

Für jeden Graph G und eine beliebige Zahl $k \in \{1, \ldots, \sigma(G)\}$ bilden die Knoten und Kanten von G mit Kohäsion mindestens k einen Graph, dessen Komponenten die k-Komponenten von G sind.

Komponentenbestimmung

- Für jeden Graph G sind die $h(x)$-Komponenten selektiert durch $x \in V(G) \cup E(G)$ von besonderem Interesse. Es wird nun gezeigt, dass in dieser Menge alle k-Kanten-Komponenten von G (für alle $k \in \{1, \ldots, \sigma(G)\}$) enthalten sind.

Folgerung

Wenn G' eine k-Komponente (für ein $k \geq 1$) des Graphen G ist, dann gibt es ein $x \in V(G) \cup E(G)$, so dass $G' = H_x$ ist.

Komponentenbestimmung

Beweis.

- Sei G' eine k-Komponente von G.
- Dann gilt $1 \leq k \leq \lambda(G')$ und G' ist damit auch eine $\lambda(G')$-Komponente von G.
- Wähle $x \in V(G') \cup E(G')$ so, dass $h(x)$ minimal ist und sei M_x definiert wie im Satz. (Man beachte, dass G' in M_x als Teilgraph enthalten sein muss.)
- $M_x = H_x$ ist eine $h(x)$-Komponente und deshalb k-kanten-zusammenhängend (da $k \leq \lambda(G') \leq h(x)$).
- Da G' ein maximaler k-kanten-zusammenhängender Teilgraph ist, gilt $G' = H_x$.

□

Zusammenhangsvielfalt

Definition

Für einen Graphen G sei die Zusammenhangs(komponenten)vielfalt $\eta(G)$ definiert als

$$\eta(G) = |\{H : H \text{ ist eine } k\text{-Komponente von } G \text{ für ein } k \geq 1\}|$$

- Aus dem vorangegangenen Korollar folgt $\eta(G) \leq |V(G)| + |E(G)|$.
- Man kann die Schranke aber noch genauer angeben:

Satz

Für jeden Graph G gilt:

$$\eta(G) \leq \left\lfloor \frac{|V|}{2} \right\rfloor$$

Zusammenhangsvielfalt

Beweis.

- Um den Satz zu beweisen, wird folgende Ungleichung gezeigt:

$$\eta(G) \leq \lfloor [|V(G)| + 1 - \lambda(G)]/2 \rfloor$$

- Die Ungleichung ist klar für zusammenhängende Graphen auf ein oder zwei Knoten.
- Induktion: angenommen G ist ein zusammenhängender Graph auf $n \geq 3$ Knoten und die Ungleichung gilt für zusammenhängende Graphen auf weniger als n Knoten.
- Falls $\lambda(G) = \sigma(G)$, dann gilt $\eta(G) = 1$ und somit auch die Ungleichung.
- Anderenfalls sei G' der Teilgraph von G, den man aus G durch Löschen der Elemente mit Kohäsion $\lambda(G)$ erhält, d.h. G' ist ein Graph, dessen Komponenten die $(\lambda(G) + 1)$-Komponenten von G sind.

Zusammenhangsvielfalt

Beweis.

- Da die Kanten von G mit Kohäsion $\lambda(G)$ einen Cut von G beinhalten müssen, ist entweder G' nicht zusammenhängend oder G' hat weniger Knoten als G.
- In beiden Fällen müssen die Komponenten $G'_1, G'_2, \ldots, G'_j$ von G' alle weniger Knoten als G haben. Die Ungleichung lässt sich also per Induktionsvoraussetzung auf alle G'_i mit $i \in \{1, \ldots, j\}$ anwenden.
- Ebenso gilt $\lambda(G'_i) \geq \lambda(G) + 1$ für $i \in \{1, \ldots, j\}$.
- Eine k-Komponente von G' muss nun eine k-Komponente einer Komponente von G' sein und umgekehrt.

Zusammenhangsvielfalt

Beweis.

- Deshalb gilt

$$\begin{aligned}\eta(G') = \sum_{i=1}^{j} \eta(G_i') &\leq \sum_{i=1}^{j} \lfloor [|V(G_i')| + 1 - \lambda(G_i')]/2 \rfloor \\ &\leq \lfloor [|V(G')| - j\lambda(G)]/2 \rfloor\end{aligned}$$

- Jetzt gilt entweder $|V(G')| \leq |V(G)| - 1$ oder G' ist nicht zusammenhängend, so dass $j \geq 2$ und $j\lambda(G) \geq \lambda(G) + 1$.
- In jedem Fall gilt:

$$\eta(G') \leq \lfloor [|V(G)| - 1 - \lambda(G)]/2 \rfloor$$

- G selbst ist eine k-Komponente von G für $k = \lambda(G)$, und $\eta(G) = \eta(G') + 1$.

Zusammenhangsvielfalt

Beweis.

- Damit gilt:

$$\eta(G) \leq \lfloor [|V(G)| + 1 - \lambda(G)]/2 \rfloor$$

- Ungleichung aus dem Satz:
  - Die Ungleichung aus dem Satz ist für triviale Graphen klar.
  - Für nichttriviale zusammenhängende Graphen folgt sie aus der verschärften Form.
  - Für beliebige Graphen folgt sie aus der Summation über die nichttrivialen Komponenten.

□

Cluster und Subcluster

- Die Zusammenhangsfunktion eines Graphen G hat ein Plateau über jeder $\sigma(G)$-Komponente und evt. auch noch an anderen Stellen.
- Diese Plateaus markieren bestimmte Gebiete von (lokal) optimalem Zusammenhang. Es sind k-Komponenten, die völlig disjunkt zu $(k+1)$-Komponenten sind.

Definition

Jeder isolierte Knoten und für $k \geq 1$ jede k-Komponente von G, die keine $(k+1)$-Komponente enthält, ist ein Cluster von G.
Der Graph G ist ein Cluster, falls $\sigma(G) = \lambda(G)$.

Cluster und Subcluster

- Es ist klar, dass verschiedene Cluster keine gemeinsamen Knoten enthalten können (folgt aus Disjunktheit von k-Komponenten).
- Die Cluster von G lassen sich aus der Zusammenhangsfunktion bestimmen.

Definition

Ein induzierter Teilgraph $K[A]$ eines Clusters K des Graphen G mit $\lambda(K[A]) = \lambda(K)$ heißt Subcluster von G.

Subcluster repräsentieren also induzierte Teilgraphen von lokal maximalem Kantenzusammenhang, die nicht unbedingt inklusions-maximal sind.

Cluster und Subcluster

- Wenn $G[A]$ und $G[B]$ Subcluster von G sind, für die gilt $A \cap B = \emptyset$, dann ist $A \cup B$ ein Subcluster von G.
- Die Subcluster eines Graphen bilden unter der Relation "ist echter Teilgraph von" eine partielle Ordnung mit Clustern als maximalen Elementen.
- Die partielle Ordnung der Subcluster in einem bestimmten Cluster ist ein beschränkter Verband.
- Da alle Cluster eines Graphen disjunkt sind, ist die vollständige partielle Ordnung eine Vereinigung von disjunkten beschränkten Verbänden.

Schnitt von Subclustern

Satz

Seien $G[A]$ und $G[B]$ Subcluster eines Clusters K in G, so dass $A \cap B \neq \emptyset$. Wenn es einen MinCut von $G[A] \cup G[B]$ gibt, der die Knoten in $A - B$ von den Knoten in $B - A$ separiert und der mindestens eine Kante aus $G[A \cap B]$ enthält, dann ist $G[A \cap B]$ ein Subcluster von K in G.

Beweis.

siehe D. Matula, SIAM J. Appl. Math. 22(3), 1972. □