3. Maximum Matchings in bipartiten Graphen

Sei $G = (U, V, E)$ ein bipartiter Graph, M ein Matching in G.

Zur Bestimmung der Länge eines kürzesten augmentierten Pfades bzgl. M führen wir eine simultane alternierende BFS durch, die von allen in M ungematchten Knoten in U aus startet.

for alle $v \in U \cup V$ **do** $label[v] := 0$ **od**

$R := \emptyset$; $l := 1$

for alle ungematchten Knoten $v \in U$ **do**

  for alle $\{v, w\} \in E$ **do** $label[w] := 1$; $R := R \cup \{w\}$ **od**

od

while $R \neq \emptyset$ **and** R enthält keinen ungematchten Knoten **do**

  $L := \emptyset$; $l{+}{+}$

  for $w \in R, \{v, w\} \in M$ **do** $L := L \cup \{v\}$; $label[v] := l$ **od**

  $R := \emptyset$; $l{+}{+}$

  for alle $v \in L, \{v, w\} \in E \setminus M$ **do**

    if $label[w] = 0$ **then**

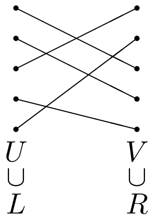
      $R := R \cup \{w\}$; $label[w] := l$

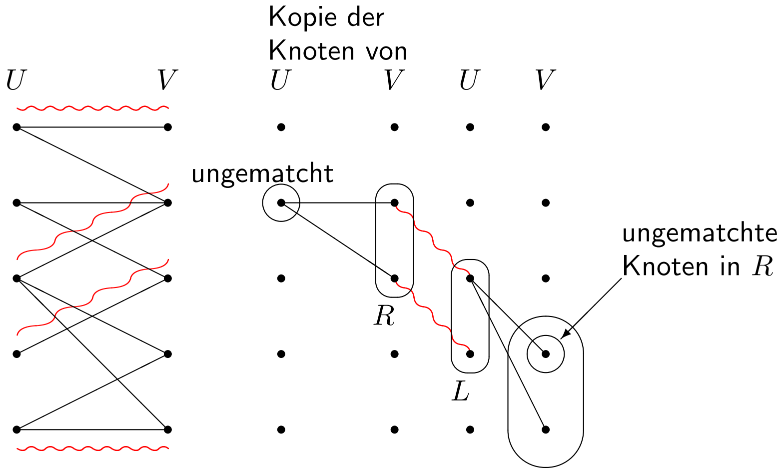
    fi

  od

od

$R :=$ Menge der ungematchten Knoten in R




Kopie der
Knoten von
U
V
U
V
U
V
ungematcht
R
L
ungematchte
Knoten in R

Nachdem wir die Länge l eines kürzesten augmentierenden Pfades bzgl. M ermittelt haben, führen wir nacheinander von jedem ungematchten Knoten in U aus eine (zwischen ungematchten und gematchten Kanten) alternierende DFS bis zur Tiefe l aus, wobei wir

1. wenn wir einen ungematchten Knoten (in Tiefe l) erreichen, einen kürzesten augmentierenden Pfad Q_i gefunden haben; für den weiteren Verlauf der DFSs markieren wir Q_i als gelöscht;
2. jede Kante, über die die DFS zurücksetzt, ebenfalls als gelöscht markieren.

Der Zeitaufwand für diese DFSs beträgt $\mathcal{O}(n + m)$, da wir jede Kante höchstens zweimal (einmal in der DFS vorwärts, einmal rückwärts) besuchen.

Lemma 146

Gegeben die Länge eines kürzesten augmentierenden Pfades, kann eine bzgl. „$\subseteq$“ maximale Menge kürzester augmentierender Pfade in Zeit $\mathcal{O}(n+m)$ gefunden werden.

Satz 147

In bipartiten Graphen kann ein Matching maximaler Kardinalität in Zeit

$$\mathcal{O}\left(n^{\frac{1}{2}}(n+m)\right)$$

gefunden werden.

Beweis:

Gemäß Korollar 145 genügen $\mathcal{O}(n^{\frac{1}{2}})$ Phasen, in denen jeweils mittels einer simultanen BFS und einer sequentiellen DFS (beide in Zeit $\mathcal{O}(n+m)$) eine maximale Menge kürzester augmentierender Pfade bestimmt wird. $\square$

John Hopcroft, Richard Karp:
An $n^{5/2}$ algorithm for maximum matchings in bipartite graphs
SIAM J. Comput. **2**(4), pp. 225–231 (1973)

4. Maximum Matchings in allgemeinen Graphen

In einem allgemeinen (nicht unbedingt bipartiten) Graphen können wir in Zeit $\mathcal{O}(n+m)$ jeweils einen kürzesten augmentierenden Pfad finden und erhalten damit

Satz 148

In einem Graph $G=(V,E)$ kann ein Matching maximaler Kardinalität in Zeit

$$\mathcal{O}(n \cdot m)$$

gefunden werden.

Für Maximum-Matching-Algorithmen in allgemeinen Graphen mit Laufzeit $\mathcal{O}(n^{\frac{1}{2}}(n+m))$ verweisen wir auf die Literatur:

Silvio Micali, Vijay V. Vazirani:

An $O(\sqrt{|V|} \cdot |E|)$ algorithm for finding maximum matching in general graphs

Proceedings of the 21st Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, FOCS'80 (Syracuse, NY, October 13–15, 1980), pp. 17–27 (1980)

Vijay V. Vazirani:

A theory of alternating paths and blossoms for proving correctness of the $O(\sqrt{V}E)$ general graph maximum matching algorithm

Combinatorica **14**(1), pp. 71–109 (1994)

Norbert Blum:

A new approach to maximum matching in general graphs

Proceedings of the 17th International Colloquium on Automata, Languages and Programming, ICALP'90 (Warwick University, England, July 16–20, 1990), LNCS **443**, pp. 586–597 (1990)

5. Matchings in gewichteten bipartiten Graphen

5.1 Zerlegung doppelt stochastischer Matrizen

Sei M eine $n \times n$-Matrix mit reellen Einträgen $m_{ij} \geq 0$, so dass alle Zeilen- und alle Spaltensummen $= r > 0$ sind. Wir assoziieren mit M den bipartiten Graphen $G = G_M = (U, V, E)$, wobei $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ die n Zeilen und $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ die n Spalten von M repräsentiert. G enthält die Kante $\{u_i, v_j\}$ gdw $m_{ij} > 0$.

Ein Matching in G entspricht einer Menge von Einträgen $m_{ij} > 0$, die alle in verschiedenen Zeilen und Spalten vorkommen. Wir nennen eine solche Menge von Positionen eine Diagonale der Matrix M.

Ein Träger von M ist eine Menge von Zeilen und Spalten, die zusammen alle Matrixeinträge > 0 enthalten.

Beispiel 149

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{2} & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & \mathbf{2} \\ 3 & \mathbf{1} & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \mathbf{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} & 3 \end{array}$$

Die markierten Elemente bilden eine Diagonale der Größe $n = 5$.

Annahme: M hat keine Diagonale der Größe n. Dann gibt es nach Satz 137 z Zeilen und s Spalten von M mit $z + s < n$, die alle Einträge > 0 von M bedecken. Damit wäre aber

$$r \cdot n = \sum m_{ij} \leq r \cdot (z + s) < r \cdot n$$

Widerspruch.

Also existiert eine Diagonale der Größe n und ein entsprechendes perfektes Matching M_1 von G. Die Adjazenzmatrix P_1 von $G_1 = (V, M_1)$ enthält in jeder Zeile und Spalte genau eine 1, ist also eine so genannte Permutationsmatrix (alle anderen Einträge sind 0). Sei nun

$$m_1 := \min\{m_{ij};\ \{u_i, v_j\} \in M_1\}.$$

Die Matrix $M - m_1 M_1$ hat wiederum konstante Zeilen- und Spaltensummen (nämlich $r - m_1$) und strikt mehr Einträge $= 0$ als M.

Durch Iteration ergibt sich damit

Satz 150 (Birkhoff, von Neumann)

Sei M eine doppelt-stochastische Matrix (d.h. alle Zeilen- und Spaltensummen sind $= 1$, alle Einträge sind reell und ≥ 0), dann gibt es eine Darstellung

$$M = \sum_{i=1}^{k} m_i P_i \,,$$

wobei die P_i Permutationsmatrizen und die $m_i \in \mathbb{R}$, mit $m_i > 0$ und $\sum_{i=1}^{k} m_i = 1$.

Bemerkung: Jede doppelt-stochastische Matrix ist also eine Konvexkombination von endlich vielen Permutationsmatrizen.

5.2 Matchings in knotengewichteten bipartiten Graphen

Sei $G = (U, V, E)$ ein bipartiter Graph mit einer Gewichtsfunktion $w : U \to \mathbb{R}^+$. Wir suchen ein Matching M in G, so dass die Summe der Gewichte der gematchten Knoten in U maximiert wird. Eine Teilmenge $T \subseteq U$, die durch ein Matching in G gematcht werden kann, heißt auch Transversale.

Sei $\mathcal{T}$ die Menge der Transversalen von G (beachte: $\emptyset \in \mathcal{T}$).

Satz 151

Die Menge $\mathcal{T}$ der Transversalen von G bildet ein Matroid.

Beweis:

Es ist klar, dass $\emptyset \in \mathcal{T}$ und dass $\mathcal{T}$ unter Teilmengenbildung abgeschlossen ist. Seien T und T' Transversalen $\in \mathcal{T}$ mit $|T'| = |T| + 1$, und seien M bzw. M' zugehörige Matchings. Dann gibt es bzgl. M einen augmentierenden Pfad P. Ein Endknoten von P liegt in U. Augmentieren wir M mittels P, erhalten wir also eine Transversale der Kardinalität $|T| + 1$. $\square$

Das greedy-Paradigma lässt sich also anwenden, um in Zeit $\mathcal{O}(n \cdot m)$ eine Transversale maximalen Gewichts zu konstruieren.

5.3 Matchings in kantengewichteten bipartiten Graphen

Sei nun $G = (U, V, E)$ ein bipartiter Graph mit einer Gewichtsfunktion w von den Kanten in die nichtnegativen reellen Zahlen. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $|U| = |V|$ $(= n)$ und dass $G = K_{n,n}$, indem wir geeignet Knoten sowie Kanten mit Gewicht 0 hinzunehmen.

Damit können wir auch o.B.d.A. voraussetzen, dass jedes Matching maximalen oder minimalen Gewichts in G perfekt ist.

Indem wir $w(u_i, v_j)$ durch $w_{max} - w(u_i, v_j)$ ersetzen (wobei w_{max} das größte auftretende Gewicht ist), reduziert sich das Problem, ein Matching maximalen/minimalen Gewichts zu finden, auf das, eines minimalen/maximalen Gewichts zu finden.

Wir betrachten daher o.B.d.A. das Problem, in G ein perfektes Matching minimalen Gewichts zu finden.

Wir suchen also eine Diagonale der Größe n mit minimalem Gewicht. Sei W die Gewichtsmatrix. Verändern wir das Gewicht eines jeden Elements einer Zeile/Spalte von W um einen festen Betrag δ, so ändert sich das Gewicht einer jeden Diagonale ebenfalls um δ (da diese ja genau ein Element aus jeder Zeile bzw. aus jeder Spalte enthält), und eine Diagonale minimalen Gewichts bleibt minimal.

Durch Subtraktion geeigneter Konstanten von den Zeilen bzw. Spalten der Matrix W können wir daher eine äquivalente Gewichtsmatrix W' erhalten, die in jeder Zeile und Spalte mindestens eine 0 enthält, während alle Werte noch immer ≥ 0 sind.

Beispiel 152

$$\begin{pmatrix} 9 & 11 & 12 & 11 \\ 6 & 3 & 8 & 5 \\ 7 & 6 & 13 & 11 \\ 9 & 10 & 10 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & \mathbf{0} & 4 & 5 \\ 2 & 3 & \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}$$

Enthält die Matrix W' eine 0-Diagonale der Größe n (also eine Diagonale, deren Elemente alle $= 0$ sind), so geben die Positionen dieser Diagonale auch die Kanten eines perfekten Matchings minimalen Gewichts im Graphen G mit der ursprünglichen Gewichtsfunktion w an, und wir sind fertig.

Andernfalls ist die maximale Länge einer 0-Diagonale in W' kleiner als n. Wir nennen eine Menge von Zeilen und Spalten einer Matrix W' eine 0-Überdeckung von W', falls diese Zeilen und Spalten alle Einträge $= 0$ der Matrix beinhalten.

Im vorhergehenden Beispiel

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bilden z.B. die Zeilen 1 und 4 zusammen mit der Spalte 2 eine 0-Überdeckung der Größe 3.

Aus Satz 137 wissen wir, dass die maximale Größe einer 0-Diagonale gleich der minimalen Größe einer 0-Überdeckung ist.

Falls W' also eine 0-Überdeckung der Größe $< n$ hat, ändern wir die Gewichtsmatrix W' zu einer Gewichtsmatrix W'' so, dass die Einträge ≥ 0 und minimale perfekte Matchings solche bleiben.

Es existiere also eine 0-Überdeckung von W', die z Zeilen und s Spalten enthalte, mit $z + s < n$. Sei w_{min} das Minimum der nicht überdeckten Einträge von W'. Also ist $w_{min} > 0$.

Um aus W' die Matrix W'' zu erhalten, verfahren wir wie folgt:

1. subtrahiere w_{min} von jedem Element der $n - z$ nicht überdeckten Zeilen (dadurch können vorübergehend negative Einträge entstehen);
2. addiere w_{min} zu allen Elementen der s überdeckten Spalten.

Damit ergibt sich für die Einträge w''_{ij} von W''

$$w''_{ij} = \begin{cases} w'_{ij} - w_{min} & \text{falls } w'_{ij} \text{ nicht überdeckt ist} \\ w'_{ij} & \text{falls } w'_{ij} \text{ entweder von einer Zeile oder von} \\ & \text{einer Spalte überdeckt ist} \\ w'_{ij} + w_{min} & \text{falls } w'_{ij} \text{ von einer Zeile und von einer} \\ & \text{Spalte überdeckt ist} \end{cases}$$

Es sind also insbesondere alle w''_{ij} wieder ≥ 0.

Für unsere Beispielsmatrix ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & \mathbf{0} & 2 \\ 2 & \mathbf{0} & 1 & 1 \\ \mathbf{0} & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad =: W''$$

Die Anzahl der in W' sowohl durch eine Zeile als auch durch eine Spalte überdeckten Einträge ist $s \cdot z$, die der überhaupt nicht überdeckten Einträge $n^2 - n(s+z) + sz$.

Damit ergibt sich für die Gesamtgewichtsveränderung

$$\begin{aligned}\sum_{ij}(w''_{ij} - w'_{ij}) &= ((sz) - (n^2 - n(s+z) + sz)) \cdot w_{min}\\ &= (n(s+z) - n^2) \cdot w_{min}\\ &< 0\end{aligned}$$

Da die Kantengewichte als ganzzahlig ≥ 0 vorausgesetzt sind, kann die Transformation $W' \Rightarrow W''$ nur endlich oft wiederholt werden, und der Algorithmus terminiert.

Man kann zeigen:

Satz 153

In einem kantengewichteten bipartiten Graphen mit ganzzahligen Kantengewichten ≥ 0 *kann ein gewichtsmaximales (bzw. ein gewichtsminimales perfektes) Matching in Zeit*

$$\mathcal{O}(n^3)$$

bestimmt werden.