Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Christian Scheideler
Jonas Pfoh

Wintersemester 2007/2008
Übungsblatt 2
02. November 2007

Randomisierte Algorithmen

Abgabetermin: 09.11.2007 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1

Betrachte ein beliebiges Entscheidungsproblem P (d.h. alle Eingaben mit Ausgabe "YES" sind in P und alle anderen nicht). Angenommen, wir haben einen randomisierten Algorithmus A für P mit der folgenden Eigenschaft:

$\forall_{x \in P} Pr[A(x) = \text{“}NO''] \leq \frac{1}{3}$
$\forall_{x \notin P} Pr[A(x) = \text{“}YES''] \leq \frac{1}{3}$

Zeigen Sie, dass man durch Mehrfachausführung von A die Fehlerwahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$ auf $\frac{1}{n}$ drücken kann.

Aufgabe 2

Abschnitt 1.3 aus der Vorlesung beschreibt eine randomisierte Methode für Textsuche. Das gegebene Alphabet ist binär.
Zeigen Sie wie man die Algorithmen und ihre Analysen für ein Alphabet mit beliebiger konstantes Länge anpassen kann.

Aufgabe 3

Seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige Indikatorvariablen.
Sei $X = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$
Sei Y eine Zufallsvariable, die X stochastisch dominiert (siehe Kapitel 1, Seite 4 im Skript), und sei $\mu = E[Y]$.
Dann gilt für alle $\delta \geq 0$, dass

$$Pr[X \geq (1+\delta)\mu] \leq \left(\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^{\mu} \leq e^{-\delta^2\mu/(2(1+\delta/3))}$$

Sei nun Y eine Zufallsvariable, die von X stochastisch dominiert wird, und sei $\mu = E[Y]$.
Dann gilt für alle $0 < \delta < 1$, dass

$$Pr[X \leq (1-\delta)\mu] \leq \left(\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}}\right)^{\mu} \leq e^{-\delta^2\mu/2}$$

Beweisen Sie die zwei Ungleichungen.

Aufgabe 4

Indikatorvariablen $X_1, ..., X_n$ heißen *negativ korreliert*, falls für alle Teilmengen $S \subseteq \{1, ..., n\}$ gilt

$E[\prod_{i \in S} X_i] \leq \prod_{i \in S} E[X_i]$

Bzw. Indikatorvariablen $X_1, ..., X_n$ heißen *positiv korreliert*, falls für alle Teilmengen $S \subseteq \{1, ..., n\}$ gilt

$E[\prod_{i \in S} X_i] \geq \prod_{i \in S} E[X_i]$

Verwenden Sie diese Eigenschaften in dem Beweis der Chernoff Schranken, um die folgenden Schranken zu zeigen:

Für $\mu = E[X]$ gilt

$$Pr[X \geq (1+\delta)\mu] \leq \left(\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}} \right)^{\mu} \leq e^{-\delta^2 \mu / (2(1+\delta/3))}$$

Und gilt

$$Pr[X \leq (1-\delta)\mu] \leq \left(\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}} \right)^{\mu} \leq e^{-\delta^2 \mu / 2}$$