Bemerkungen:

Wir erinnern uns an folgende Definitionen:

- Eine Funktion $f : U \to V$ heißt injektiv, wenn gilt:

$$(\forall x, y \in U)[x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)]$$

- Eine Funktion $f : U \to V$ heißt surjektiv, wenn gilt:

$$(\forall y \in V \exists x \in U)[y = f(x)]$$

- Eine Funktion $f : U \to V$ heißt bijektiv, wenn gilt:

  f ist sowohl injektiv als auch surjektiv.

Wir hätten auch sagen können (mit $x \in f^{-1}(y) \Leftrightarrow f(x) = y$):
Sei f eine totale Funktion von U nach V (d.h., $f(x)$ ist für alle $x \in U$ definiert). Dann gilt:

- f injektiv: $(\forall y \in V)\Big[\big|f^{-1}(y)\big| \leq 1\Big]$
- f surjektiv: $(\forall y \in V)\Big[\big|f^{-1}(y)\big| \geq 1\Big]$
- f bijektiv: $(\forall y \in V)\Big[\big|f^{-1}(y)\big| = 1\Big]$, d.h. injektiv und surjektiv
- Ist $f : U \rightarrow V$ eine Bijektion, dann ist auch f^{-1} eine bijektive Funktion.

Wir erinnern ebenso an folgende Festlegungen:
Seien $f : U \to V$ und $g : V \to W$ jeweils Funktionen.

- Das Urbild von $y \in V$: $f^{-1}(y) = \{x \in U; f(x) = y\}$.
- Schreibweisen: $(U' \subseteq U, V' \subseteq V)$
  - $f(U') = \bigcup_{u \in U'} \{f(u)\}$
  - $f^{-1}(V') = \bigcup_{y \in V'} f^{-1}(y)$

Also (Erklärung zu Beispiel 8):
$f \in F(U)$ hat genau dann ein Rechtsinverses, wenn f surjektiv ist.

$$f \circ f^{-1} = id$$

(Wähle für f^{-1} irgendeine Funktion g, so dass gilt: $g(x)$ wird von f auf x abgebildet.)
$f \in F(U)$ hat genau dann ein Linksinverses, wenn f injektiv ist.

$$f^{-1} \circ f = id$$

(Wähle für f^{-1} irgendeine Funktion g, so dass gilt: $f(x)$ wird von g auf x abgebildet.)

Satz 9

Falls c linkes Einselement ist und d rechtes Einselement (bezüglich des binären Operator $\circ$), dann ist

$$c = d\,.$$

Beweis:

$$d = c \circ d = c\,.$$

$\square$

Satz 10

Falls c linkes Nullelement und d rechtes Nullelement (bezüglich $\circ$) ist, dann ist

$$c = d\ .$$

Beweis:

$$c = c \circ d = d\ .$$

$\square$

Beispiel 11

Betrachte $\langle \{b, c\}, \{\bullet\} \rangle$ mit

$\bullet$	b	c
b	b	b
c	c	c

Es gilt: b und c sind linke Nullelemente, und b und c sind rechte Einselemente.

Abgeschlossenheit

Definition 12

Sei $\langle S, \Phi \rangle$ eine Algebra, T eine Teilmenge von S.

- T ist unter den Operatoren in Φ abgeschlossen (stabil), falls ihre Anwendung auf Elemente aus T wieder Elemente aus T ergibt.
- $\langle T, \Phi \rangle$ heißt Unteralgebra von $\langle S, \Phi \rangle$, falls $T \neq \emptyset$ und T unter den Operatoren $\in \Phi$ abgeschlossen ist.

Beispiel 13

- $\langle \mathbb{N}_0, + \rangle$ ist Unteralgebra von $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$
- $\langle \{0, 1\}, \ \cdot \ \rangle$ ist Unteralgebra von $\langle \mathbb{N}_0, \ \cdot \ \rangle$
- $\langle \{0, 1\}, + \rangle$ ist keine Unteralgebra von $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$, da sie nicht abgeschlossen ist $(1 + 1 = 2)$.

2.3 Vereinbarung

Wir verwenden die Wertesymbole "1" und "0" oder die Begriffe "wahr" und "falsch" bzw. "true" und "false".

2.4 Schreibweisen und Sprachgebrauch

In der Literatur existieren verschiedene Schreibweisen für die Booleschen Operatoren:

Negation	nicht a not a $\neg$a !a â $\overline{a}$
Konjunktion	(Und-Verknüpfung, entspricht Multiplikation) a und b a and b a$\cdot$b a*b a$\wedge$b ab
Disjunktion	(Oder-Verknüpfung, entspricht Addition) a oder b a or b a$+$b a$\vee$b

Die Operatoren werden in der Reihenfolge *nicht* - *und* - *oder* angewandt.

2.5 Beispiele für Axiome einer Algebra

Für alle $a, b, c \in S$ gilt:

Kommutativität	$a \cdot b = b \cdot a$ $a + b = b + a$
Assoziativität	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ $(a + b) + c = a + (b + c)$
Distributivität	$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) = a \cdot b + a \cdot c$ $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$
Neutrales Element $n, e \in S$	$a \cdot e = e \cdot a = a$ $a + n = n + a = a$

2.6 Boolescher Verband

Unter einem Verband versteht man eine Algebra mit zwei binären Operatoren (z.B. $\cap$, $\cup$), die kommutativ und assoziativ sind.

Existieren in einem Verband die neutralen Elemente n und e (bzw. 0 und 1, oder $\emptyset$ und U) und zu jedem Element das komplementäre Element, so spricht man von einem komplementären Verband.

Besitzt ein komplementärer Verband auch die Eigenschaft der Distributivität, so ist dies ein Boolescher Verband bzw. eine Boolesche Algebra.

2.7 Boolesche Algebren

Eine Boolesche Algebra ist eine Algebra

$$\langle U, \oplus, \otimes, \sim, 0, 1 \rangle,$$

$\oplus, \otimes$ sind binäre, $\sim$ ist ein unärer Operator, 0 und 1 sind Konstanten. Es gilt:

1. $\oplus$ und $\otimes$ sind assoziativ und kommutativ.
2. 0 ist Einselement für $\oplus$, 1 ist Einselement für $\otimes$.
3. für $\sim$ gilt (Komplementarität):

$$\begin{aligned} b \oplus \sim b &= 1 \\ b \otimes \sim b &= 0 \quad \forall b \in U. \end{aligned}$$

4. Distributivgesetz:

$$\begin{aligned} b \otimes (c \oplus d) &= (b \otimes c) \oplus (b \otimes d) \\ b \oplus (c \otimes d) &= (b \oplus c) \otimes (b \oplus d) \end{aligned}$$

Absorption	$a \cdot (a + b) = a$ $a + (a \cdot b) = a$
Involution	$\overline{\overline{a}} = a$
Idempotenz	$a \cdot a = a$ $a + a = a$
De Morgan	$\overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}$ $\overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$
Dominanz	$a \cdot 0 = 0$ $a + 1 = 1$
0- und 1-Komplemente	$\overline{0} = 1$ $\overline{1} = 0$
Dualitätsprinzip	gleichzeitiges Vertauschen von $+$ und $\cdot$ und von 0 und 1 ergibt neues Gesetz der Booleschen Algebra $\rightarrow$ s. De Morgan

In 1838 De Morgan defined and introduced the term 'mathematical induction' putting a process that had been used without clarity on a rigorous basis.

Auguste de Morgan
(1806–1871)

De Morgan was always interested in numerical curiosities! Thus, he was

$$n \text{ years old in the year } n^2 \text{ (for } n = 43).$$

2.8 Boolesche Ausdrücke und Funktionen

Boolescher Ausdruck durch logische Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ verbundene Variablen (auch in negierter Form)

Boolesche Umformung Anwendung der booleschen Gesetze auf boolesche Ausdrücke

Jede n-stellige boolesche Funktion bildet alle Kombinationen der Werte der n Eingangsgrößen auf einen Funktionswert aus $\{0, 1\}$ ab.

$$f\ : \mathbb{B}^n \ni (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{B}$$

Beobachtung: Da $|\mathbb{B}| = 2$, gibt es genau 2^n verschiedene Tupel in $\mathbb{B}^n$.

Da wir für jedes dieser Tupel den Funktionswert beliebig $\in \mathbb{B}$ wählen können, gibt es genau 2^{2^n} verschiedene (totale) Boolesche Funktionen mit n Argumenten.

2.8.1 Boolesche Funktionen mit einem Argument

Nach der Formel aus 8 gibt es $2^{2^1} = 4$ boolesche Funktionen mit einem Argument:

x	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

f_1: "falsch"-Funktion

f_2: "wahr"-Funktion

f_3: Identität

f_4: Negation

2.8.2 Boolesche Funktionen mit zwei Argumenten

Nach der Formel aus 8 gibt es $2^{2^2} = 16$ boolesche Funktionen mit zwei Argumenten:

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Bezeichnungen für einige dieser Funktionen:

f_2:	AND	$a \cdot b$
f_8:	OR	$a + b$
f_9:	NOR	$\overline{a + b}$
f_{15}:	NAND	$\overline{a \cdot b}$
f_7:	XOR	$(a + b) \cdot \overline{a \cdot b}$
f_{10}:	Äquivalenz	$(a \cdot b) + \overline{a + b}$
f_{14}:	Implikation	a impliziert b: $\overline{a} + b$
f_{12}:	Replikation	b impliziert a: $a + \overline{b}$

3. Normalformen boolescher Funktionen

- Jeder boolesche Ausdruck kann durch (äquivalente) Umformungen in gewisse Normalformen gebracht werden!

3.1 Vollkonjunktion und disjunktive Normalform (DNF)

Eine Vollkonjunktion ist ein boolescher Ausdruck,

- in dem **alle** Variablen **einmal** vorkommen (jeweils als negiertes oder nicht negiertes Literal),
- alle Literale durch Konjunktionen $\cdot$ ("und") verbunden sind.

Die disjunktive ("oder") Verbindung von Vollkonjunktionen nennt man disjunktive Normalform (DNF).

$$f(a,b,c) = \underbrace{\underbrace{(a \cdot b \cdot \overline{c})}_{\textit{Vollkonjunktion}} + \underbrace{(\overline{a} \cdot b \cdot \overline{c})}_{\textit{Vollkonjunktion}} + \underbrace{(\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot c)}_{\textit{Vollkonjunktion}}}_{\textit{disjunktive Verknüpfung der Vollkonjunktionen}}$$

3.2 Ableitung der disjunktiven Normalform aus einer Wertetabelle

- jede Zeile der Wertetabelle entspricht einer Vollkonjunktion
- Terme mit Funktionswert "0" tragen nicht zum Funktionsergebnis bei ("oder" von 0)

a	b	f(a,b)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- bilde Vollkonjunktionen für Zeilen mit Funktionswert "1" $\rightarrow$ Zeilen 2 und 3 ("0" in Tabelle = Negation der Variable)
- Zeile 2: $\overline{a} \cdot b$
- Zeile 3: $a \cdot \overline{b}$
- disjunktive Verknüpfung der Vollkonjunktionen: $f(a,b) = \overline{a} \cdot b + a \cdot \overline{b}$

3.3 Volldisjunktion und konjunktive Normalform (KNF/CNF)

Eine Volldisjunktion ist ein boolescher Ausdruck,

- in dem **alle** Variablen **einmal** vorkommen (in Form eines negierten oder nicht negierten Literals),
- alle Variablen durch eine Disjunktion $+$ ("oder") verbunden sind.

Die konjunktive ("und") Verbindung von Volldisjunktionen nennt man konjunktive Normalform, kurz KNF (engl.: CNF).

$$f(a,b,c) = \underbrace{\underbrace{(a+b+\overline{c})}_{\textit{Volldisjunktion}} \cdot \underbrace{(\overline{a}+b+\overline{c})}_{\textit{Volldisjunktion}} \cdot \underbrace{(\overline{a}+\overline{b}+c)}_{\textit{Volldisjunktion}}}_{\textit{konjunktive Verknüpfung der Volldisjunktionen}}$$

3.4 Ableitung der konjunktiven Normalenform aus einer Wertetabelle

- jede Zeile der Wertetabelle entspricht einer Volldisjunktion
- Terme mit Funktionswert "1" tragen nicht zum Funktionsergebnis bei ("und" mit 1)

a	b	$f(a,b,c)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- bilde Volldisjunktionen für Zeilen mit Funktionswert "0" $\longrightarrow$ Zeilen 1 und 4 ("1" in Tabelle = Negation der Variable)
- Zeile 1: $a + b$
- Zeile 4: $\overline{a} + \overline{b}$
- konjunktive Verknüpfung der Volldisjunktionen:
- $f(a,b) = (a+b) \cdot (\overline{a} + \overline{b})$

3.5 Vergleich von DNF und KNF

	DNF	**KNF**
wähle Zeilen mit Funktionswert	1	0
Bildung der Teil-Terme	Negation der "0" Einträge Verknüpfung der Variablen mit "und"	Negation der "1" Einträge Verknüpfung der Variablen mit "oder"
Verknüpfung der Teil-Terme	mit "oder"	mit "und"

Bemerkungen:

1. Beim Entwurf digitaler Schaltungen ist man oft daran interessiert, eine zu implementierende Funktion in einer Normalform (oder dazu ähnlichen Form) möglichst geringer Größe darzustellen.
2. Dazu dienen z.B. die Verfahren von Karnaugh-Veitch und Quine und McCluskey, die aber nicht Gegenstand dieser Vorlesung sind.