5.6 Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen

Satz 76

Seien $R_1, R_2 \subseteq \Sigma^*$ reguläre Sprachen. Dann sind auch

$$R_1R_2, R_1 \cup R_2, R_1^*, \Sigma^* \setminus R_1 (=: \bar{R_1}), R_1 \cap R_2$$

reguläre Sprachen.

Beweis:

$R_1R_2, R_1 \cup R_2, R_1^*$ klar.

$\Sigma^* \setminus R_1$	:	Sei $R_1 = L(A), A$ DFA, $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, δ vollständig. Betrachte $A' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q \setminus F)$. Dann ist $L(A') = \Sigma^* \setminus L(A)$
$R_1 \cap R_2$	:	De Morgan

□

Definition 77

Substitution (mit regulären Mengen) ist eine Abbildung, die jedem $a \in \Sigma$ eine reguläre Sprache $h(a)$ zuordnet. Diese Abbildung wird kanonisch auf Σ^* erweitert.
Ein Homomorphismus ist eine Substitution mit $\forall a \in \Sigma : |h(a)| = 1$, d.h. jedes $a \in \Sigma$ wird durch ein Wort $h(a)$ $(\in \Delta^*)$ ersetzt.

Satz 78

Reguläre Sprachen sind unter (regulärer) Substitution, Homomorphismus und inversem Homomorphismus abgeschlossen.

Beweis:

Wir zeigen (nur) die Behauptung für den inversen Homomorphismus.

Sei $h : \Delta \to \Sigma^*$ ein Homomorphismus, und sei $R \subseteq \Sigma^*$ regulär.

Zu zeigen: $h^{-1}(R) \subseteq \Delta^*$ ist regulär.

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F), L(A) = R$.

Betrachte $A' = (Q, \Delta, \delta', q_0, F)$, mit

$$\delta'(q, a) = \delta(q, h(a)) \quad \forall q \in Q, a \in \Delta \ ,$$

wobei wir nunmehr der Einfachheit halber statt $\hat{\delta}$ nur δ schreiben.

Also gilt

$$\delta'(q_0, w) = \delta(q_0, h(w)) \in F \Leftrightarrow h(w) \in R \Leftrightarrow w \in h^{-1}(R)$$

$\square$

Definition 79

Seien $L_1,\ L_2 \subseteq \Sigma^*$. Dann ist der Rechtsquotient

$$L_1/L_2 := \{x \in \Sigma^*;\ (\exists y \in L_2)[xy \in L_1]\}\ .$$

Satz 80

Seien $R, L \subseteq \Sigma^*$, R regulär. Dann ist R/L regulär.

Beweis:

Sei A DFA mit $L(A) = R$, $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

$$\begin{aligned} F' &:= \{q \in Q;\ (\exists y \in L)[\hat{\delta}(q, y) \in F]\} \\ A' &:= (Q, \Sigma, \delta, q_0, F') \end{aligned}$$

Dann ist $L(A') = R/L$. $\square$

Lemma 81

Es gibt einen Algorithmus, der für zwei (nichtdeterministische, mit ϵ-Übergängen) endliche Automaten A_1 und A_2 entscheidet, ob sie äquivalent sind, d.h. ob

$$L(A_1) = L(A_2) \ .$$

Beweis:

Konstruiere einen endlichen Automaten für $(L(A_1) \setminus L(A_2)) \cup (L(A_2) \setminus L(A_1))$ (symmetrische Differenz). Prüfe, ob dieser Automat ein Wort akzeptiert. $\square$

Satz 82 (Pumping Lemma für reguläre Sprachen)

Sei $R \subseteq \Sigma^*$ regulär. Dann gibt es ein $n > 0$, so dass für jedes $z \in R$ mit $|z| \geq n$ es $u, v, w \in \Sigma^*$ gibt, so dass gilt:

1. $z = uvw$,
2. $|uv| \leq n$,
3. $|v| \geq 1$, *und*
4. $\forall i \geq 0: \; uv^i w \in R$.

Beweis:

Sei $R = L(A), A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

Sei $n = |Q|$. Sei nun $z \in R$ mit $|z| \geq n$.

Sei $q_0 = q^{(0)}, q^{(1)}, q^{(2)}, \ldots, q^{(|z|)}$ die beim Lesen von z durchlaufene Folge von Zuständen von A. Dann muss es $0 \leq i < j \leq n \leq |z|$ geben mit $q^{(i)} = q^{(j)}$.

Seien nun u die ersten i Zeichen von z, v die nächsten $j - i$ Zeichen und w der Rest.

$$\Rightarrow z = uvw, |v| \geq 1, |uv| \leq n, uv^l w \in R \quad \forall l \geq 0 \,.$$

□

Beispiel für die Anwendung des Pumping Lemmas:

Satz 83

$L = \{0^{m^2};\ m \geq 0\}$ *ist nicht regulär.*

Beweis:

Angenommen, L sei doch regulär.
Sei n wie durch das Pumping Lemma gegeben. Wähle $m \geq n$.
Dann gibt es ein r mit $1 \leq r \leq n$, so dass gilt:

$$0^{m^2+ir} \in L \text{ für alle } i \in \mathbb{N}_0\ .$$

Aber (für $i = 1$):

$$m^2 < m^2 + r \leq m^2 + m < m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2$$

und damit Widerspruch! $\square$

Denkaufgabe:

$\{a^i b^i;\ i \geq 0\}$ ist nicht regulär.