Fortgeschrittene Netzwerk- und Graph-Algorithmen

Dr. Hanjo Täubig

Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
(Prof. Dr. Ernst W. Mayr)
Institut für Informatik
Technische Universität München

Wintersemester 2009/10

Zirkuläre Partitionen

Crossing Cuts in $G = (V, E)$ partitionieren V in vier Teile
Allgemeiner:

Definition

Eine zirkuläre Partition ist eine Partition von V in $k \geq 3$ disjunkte Mengen $V_1, V_2, \ldots, V_k$, so dass

- $w(V_i, V_j) = \begin{cases} \lambda/2 & \text{falls } |i - j| = 1 \mod k \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$
- Falls S ein Minimum Cut ist, dann ist
  - S oder $\bar{S}$ eine echte Teilmenge einer Menge V_i oder
  - die zirkuläre Partition ist eine Verfeinerung der Partition, die durch den Minimum Cut S definiert wird.
    (S ist die Vereinigung einiger Mengen der zirkulären Partition.)

Zirkuläre Partitionen

- Seien $V_1, V_2, \ldots, V_k$ die disjunkten Mengen einer zirkulären Partitionierung.
- Dann ist für alle a, b mit $1 \leq a \leq b < k$ die Menge $S = \bigcup_{i=a}^{b} V_i$ (zusammen mit $\bar{S}$) ein Minimum Cut.
- Diese Minimum Cuts bezeichnen wir als Circular Partition Cuts.
- Insbesondere ist jedes V_i $(1 \leq i \leq k)$ ein Minimum Cut.
- Betrachte einen Minimum Cut S, so dass weder S noch $\bar{S}$ in einer Menge der zirkulären Partition enthalten ist. Da S zusammenhängend ist, ist S oder $\bar{S}$ gleich $\bigcup_{i=a}^{b} V_i$ für ein Paar a, b mit $1 \leq a < b < k$
- Für alle V_i einer zirkulären Partitionierung existiert kein Minimum Cut S, so dass $\langle V_i, S \rangle$ ein Crossing Cut ist.

Kompatibilität zirkulärer Partitionen

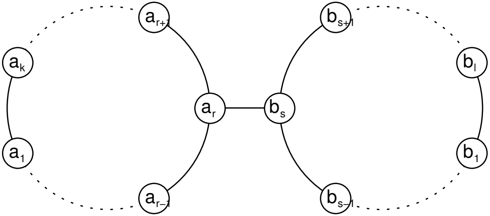
Definition

Zwei verschiedene zirkuläre Partitionen $P = \{U_1, \ldots, U_k\}$ und $Q = \{V_1, \ldots, V_l\}$ sind kompatibel, wenn es eindeutige Zahlen r und s $(1 \leq r, s \leq k)$ gibt, so dass

- $\forall i \neq r : \quad U_i \subseteq V_s$ und
- $\forall j \neq s : \quad V_j \subseteq U_r$.

Kompatibilität zirkulärer Partitionen

Beispiel:



$$P = \{\{a_1\}, \ldots, \{a_{r-1}\}, \{a_r, b_1, \ldots b_l\}, \{a_{r+1}\}, \ldots \{a_k\}\}$$

$$Q = \{\{b_1\}, \ldots, \{b_{s-1}\}, \{b_s, a_1, \ldots a_k\}, \{b_{s+1}\}, \ldots \{b_l\}\}$$

Lemma

Alle verschiedenen zirkulären Partitionen sind paarweise kompatibel.

Kompatibilität zirkulärer Partitionen

Beweis.

- Betrachte zwei zirkuläre Partitionen P und Q in $G = (V, E)$.
- Alle Mengen der Partitionen sind Minimum Cuts.
- Annahme: eine Menge $S \in P$ ist die Vereinigung von mindestens zwei, aber nicht von allen Mengen von Q.
- Genau zwei Mengen $A, B \in Q$, die in S enthalten sind, sind durch mindestens eine Kante zu den Knoten in $V \setminus S$ verbunden.
- Sei T die Menge, die man durch Ersetzen von $A \subset S$ durch ein Element von Q erhält, das zu B verbunden, aber nicht in S enthalten ist.

$\Rightarrow$ Dann ist $\langle S, T \rangle$ ein Crossing Cut (Widerspruch)

$\Rightarrow$ Jede Menge von P oder ihr Komplement ist in einer Menge von Q enthalten.

Kompatibilität zirkulärer Partitionen

Beweis.

- Annahme: zwei Mengen von P sind in zwei verschiedenen Mengen von Q enthalten.
- Da jedes Komplement der verbleibenden Mengen von P nicht in *einer* Menge von Q enthalten sein kann, muss jede übrige Menge von P in einer Teilmenge von Q enthalten sein.

$\Rightarrow$ $P = Q$ (Widerspruch)

- Annahme: alle Mengen von P sind in einer Menge Y von Q

$\Rightarrow$ $Y = V$ (Widerspruch)

- Da die Vereinigung von zwei Komplementen von Mengen aus P gleich V ist und Q mindestens drei Mengen enthält, kann nur ein Komplement in einer Menge von Q enthalten sein.

$\Rightarrow$ Es gibt genau eine Menge X in P, die nicht in Y von Q enthalten ist, aber $\bar{X} \subset Y$.

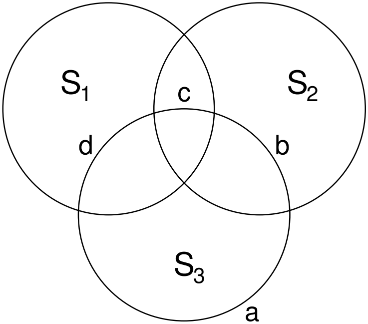
□

Paarweise Disjunktheit von Crossing Cuts

Lemma

Wenn S_1, S_2 und S_3 paarweise Crossing Cuts sind, dann gilt:

$$S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \emptyset$$



Paarweise Disjunktheit von Crossing Cuts

Beweis.

- Annahme: Lemma falsch, also Schnittmenge nicht leer
- Definiere
  - $b = w\left((S_2 \cap S_3) \setminus S_1, S_2 \setminus (S_1 \cup S_3)\right)$
  - $c = w\left(S_1 \cap S_2 \cap S_3, (S_1 \cap S_2) \setminus S_3\right)$
  - $d = w\left((S_1 \cap S_3) \setminus S_2, S_1 \setminus (S_2 \cup S_3)\right)$
- Einerseits ist $S_1 \cap S_2$ ein Minimum Cut. $\Rightarrow \quad c \geq \frac{\lambda}{2}$
- Andererseits ist $c + b = c + d = \frac{\lambda}{2}$.

$\Rightarrow$ $b = d = 0$ und $(S_1 \cap S_3) \setminus S_2 = (S_2 \cap S_3) \setminus S_1 = \emptyset$

- Da es keine diagonalen Kanten im Crossing Cut $\langle S_1, S_2 \rangle$ gibt (siehe früheres Lemma), sind $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ und $S_3 \setminus (S_1 \cup S_2)$ nicht verbunden. (Widerspruch weil aufgrund der Crossing Cuts $\langle S_1, S_3 \rangle$ und $\langle S_2, S_3 \rangle$ der Schnittwert $\lambda/2$ sein müsste)

$\square$

Weitere Sätze

Satz

In einem Graphen $G = (V, E)$ gibt es für jede einem Crossing Cut entsprechende Partition P von V in 4 disjunkte Mengen eine zirkuläre Partition in G, die eine Verfeinerung von P ist.

Satz

Ein Graph $G = (V, E)$ hat $\mathcal{O}\left(\binom{|V|}{2}\right)$ viele Minimum Cuts (und diese Schranke ist scharf).

Kaktus-Vorbereitung: Laminare Mengen

Definition

Eine Menge $\mathcal{S}$ von Mengen heißt laminar, wenn für jedes Paar von Mengen $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ gilt, dass entweder S_1 und S_2 disjunkt sind, oder eine der beiden Menge die andere enthält.

- Jede laminare Menge $\mathcal{S}$ kann als Baum repräsentiert werden.
- Jeder Knoten repräsentiert eine Menge in $\mathcal{S}$.
- Die Blätter des Baums repräsentieren die Mengen von $\mathcal{S}$, die keine anderen Mengen enthalten.
- Der Vater eines zur Menge T gehörigen Knotens repräsentiert die (eindeutige) kleinste Übermenge von T.
- Die Konstruktion liefert eine Menge von Bäumen, deren Wurzelknoten Mengen repräsentieren, die in keiner anderen Menge von $\mathcal{S}$ enthalten sind.

Kaktus-Vorbereitung: Laminare Mengen

- Hinzufügen eines künstlichen Wurzelknotens, der mit allen eigentlichen Wurzeln verbunden ist, liefert einen Baum.

⇒ Die Knoten eines Baums repräsentieren alle Mengen von $\mathcal{S}$, wobei die Wurzel die zugrundeliegende Gesamtmenge (Vereinigung aller Mengen) repräsentiert.

- Wenn diese Vereinigung n Elemente enthält, kann der Baum höchstens n Blätter bzw. $2n - 1$ Knoten haben.

Kaktus

Definition

Ein zusammenhängender Graph heißt Kaktus, falls jedes Paar von einfachen Kreisen höchstens einen Knoten gemeinsam hat.
Ein Graph bestehend aus einem einzelnen Knoten wird als *trivialer Kaktus* bezeichnet.

Ein Graph ist ein Kaktus genau dann, wenn jede Zweifachzusammenhangskomponente entweder ein einfacher Kreis oder eine einzelne Kante (Brücke) ist.

Hinweis: Oft wird in der Definition auch einfach verlangt, dass jede Kante zu genau einem (knoten-disjunkten) Kreis gehört, wobei eine Doppelkante zwischen zwei Knoten einen Kreis der Länge 2 darstellt.
Man kann einen Kaktus nach dieser Definition erhalten, indem man die Brücken durch Doppelkanten ersetzt.

Kaktus-Repräsentation von Minimum Cuts

- Betrachte
  - einen Graph G,
  - einen ungewichteten Kaktus $\mathcal{R}$ und
  - eine Abbildung φ der Graphknoten in die Menge der Kaktusknoten $\varphi : \; V(G) \to V(\mathcal{R})$.

- Die Menge $V(\mathcal{R})$ kann einen Knoten x enthalten, der nicht in der Bildmenge der Abbildung φ enthalten ist, für den also $V(G)$ keinen Knoten v mit $\varphi(v) = x$ enthält.
  Ein solcher Knoten wird *leerer Knoten* genannt.

- Für jeden nichttrivialen (ungewichteten) Kaktus $\mathcal{R}$ gilt $\lambda(\mathcal{R}) \leq 2$ bzw. $\lambda(\mathcal{R}) = 2$ (je nach Definition).

Kaktus-Repräsentation von Minimum Cuts

Sei $\mathcal{C}(\mathcal{R})$ die Menge aller Minimum Cuts vom Kaktus $\mathcal{R}$.
D.h. $\{S, V(\mathcal{R}) \setminus S\} \in \mathcal{C}(\mathcal{R})$ gilt genau dann, wenn $E(S, V(\mathcal{R}) \setminus S; R)$ eine Menge von zwei Kanten ist, die zum gleichen Kreis in $\mathcal{R}$ gehören.

Definition

Für eine gegebene Teilmenge $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}(G)$ von Minimum Cuts, nennt man ein Paar $(\mathcal{R}, \varphi)$, das aus einem Kaktus $\mathcal{R}$ und einer Knotenabbildung φ besteht, Kaktus-Repräsentation für $\mathcal{C}'$ falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Für einen beliebigen Kaktus-MinCut $\{S, V(\mathcal{R}) \setminus S\} \in \mathcal{C}(\mathcal{R})$ gehört der Cut $\{X, \bar{X}\}$ mit $X = \{u \in V(G) \mid \varphi(u) \in S\}$ und $\bar{X} = \{u \in V(G) \mid \varphi(u) \in V(\mathcal{R}) \setminus S\}$ zu $\mathcal{C}'$.
2. Für jeden MinCut $\{X, \bar{X}\} \in \mathcal{C}'$ existiert ein Kaktus-MinCut $\{S, V(\mathcal{R}) \setminus S\} \in \mathcal{C}(\mathcal{R})$ mit $X = \{u \in V(G) \mid \varphi(u) \in S\}$ und $\bar{X} = \{u \in V(G) \mid \varphi(u) \in V(\mathcal{R}) \setminus S\}$.

Kaktus-Repräsentation aller Minimum Cuts

Fallunterscheidung:

1. Graph ohne zirkuläre Partitionen
2. Graph mit genau einer zirkulären Partition
3. Graph mit mehreren zirkulären Partitionen $P_1, \ldots, P_z$

Kaktus-Repräsentation aller Minimum Cuts

1. Fall: Graph ohne zirkuläre Partitionen
   - Wenn es Crossing (Minimum) Cuts geben würde, müsste es laut Lemma auch eine zirkuläre Partition geben, die eine Verfeinerung der 4 entsprechenden disjunkten Mengen ist.

$\Rightarrow$ Es kann in diesem Fall keine Crossing Cuts geben.

$\Rightarrow$ Die Minimum Cuts sind laminar.

$\Rightarrow$ Die Minimum Cuts können durch einen Baum T_G repräsentiert werden.

Kaktus-Repräsentation aller Minimum Cuts

(Fortsetzung 1. Fall: Graph ohne zirkuläre Partitionen)
Die Minimum Cuts können durch folgenden Baum T_G repräsentiert werden:

- Betrachte die jeweils kleinere Knotenmenge jedes Minimum Cuts und bezeichne die Menge dieser Knotenmengen mit Λ (wähle bei gleicher Kardinalität irgendeine von beiden).
- Repräsentiere jede Menge von Λ durch einen Knoten in T_G.
- Zwei Baumknoten, die zu den MinCut-Mengen A und B im Graphen gehören, sollen genau dann verbunden sein, wenn $A \subset B$ gilt und es keinen MinCut C mit $A \subset C \subset B$ gibt (der echte Obermenge von A und echte Teilmenge von B ist).
- Die Wurzeln der resultierenden Bäume repräsentieren die MinCuts in Λ, die in keiner anderen MinCut-Menge von Λ enthalten sind.
- Hinzufügen eines künstlichen Wurzelknotens und Verbinden mit den Wurzeln aller Bäume resultiert in einem Baum (T_G).

Kaktus-Repräsentation aller Minimum Cuts

(Fortsetzung 1. Fall: Graph ohne zirkuläre Partitionen)

- Definiere Abbildung:
  - Jeder Knoten des Graphen G auf den Knoten des Baums T_G abgebildet, der zu dem MinCut mit kleinster Kardinalität gehört, der diesen Knoten enthält.
  - Jeder nicht zugeordnete Knoten wird der Wurzel zugeordnet.
- Für jeden Minimum Cut S von G werden die Knoten von S einer Menge X von Baumknoten zugeordnet, so dass es eine Kante gibt, die beim Entfernen die Baumknoten X vom Rest des Baums trennt.
- Andererseits zerfällt beim Entfernen einer Kante aus T_G die Menge der Baumknoten so in zwei Teile, dass die Menge der Knoten, die in dem einen Teil zugeordnet werden, die eine Seite eines Minimum Cuts bilden.

$\Rightarrow$ Wenn der Graph keine zirkulären Partitionen enthält, dann ist der Baum T_G der Kaktus C_G des Graphen G und die Anzahl seiner Knoten ist durch $2|V|-1$ beschränkt.

Kaktus-Repräsentation aller Minimum Cuts

2. Fall: Graph mit genau einer zirkulären Partition $V_1, \ldots, V_k$.
   - Die Circular Partition Cuts können durch einen Kreis mit k Knoten repräsentiert werden.
   - Die Knoten jedes Partitionsteils V_i $(1 \leq i \leq k)$ werden so durch einen Knoten N_i des Kreises repräsentiert, dass zwei Teile V_i und V_{i+1} durch zwei adjazente Knoten repräsentiert werden.
   - Bemerkung: Für jeden Minimum Cut S, der kein Circular Partition Cut ist, ist entweder S oder $\bar{S}$ eine echte Teilmenge eines Teils V_i (folgt direkt aus der Definition).

Kaktus-Repräsentation aller Minimum Cuts

(Fortsetzung 2. Fall: Graph mit genau einer zirkulären Partition)

- Man kann den Baum $T_{(V_i,E)}$ für alle Minimum Cuts konstruieren, die Teilmenge von V_i sind, aber mit der Beschränkung, dass nur die Knoten von V_i diesem Baum zugeordnet werden.
- Die Wurzel von $T_{(V_i,E)}$ entspricht genau der Menge V_i.

$\Rightarrow$ Knoten N_i des Kreises kann mit der Wurzel von $T_{(V_i,E)}$ verschmolzen werden ($\forall i : 1 \leq i \leq k$).

- Dieser mit allen Bäumen verbundene Kreis ist der Kaktus C_G für G.
- Anzahl Knoten: Summe der Anzahl der Knoten aller Bäume

$\Rightarrow$ wieder beschränkt durch $2|V| - 1$ und wieder Korrespondenz zwischen Minimum Cuts in G und Separation in C_G.

Kaktus-Repräsentation aller Minimum Cuts

3. Fall: Graph mit zirkulären Partitionen $P_1, \ldots, P_z$

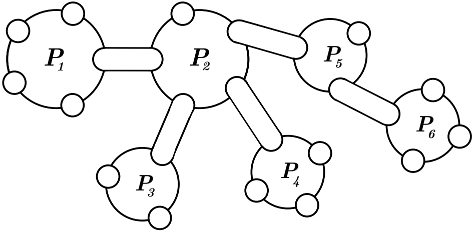
- Betrachte alle zirkulären Partitionen als Menge von Mengen
- Konstruiere den Kaktus, der die Circular Partition Cuts repräsentiert:
  - Die Knoten jeder Menge $F \in \mathcal{F}_{\boldsymbol{P_1} \cup \ldots \cup \boldsymbol{P_z}}$ werden einem Knoten zugeordnet.
  - Zwei Knoten sind verbunden, wenn für ihre Mengen F_1 und F_2 gilt: $w(F_1, F_2) > 0$.

  $\Rightarrow$ Jede zirkuläre Partition erzeugt einen Kreis in C_G.
  - Da alle zirkulären Partitionen paarweise kompatibel sind, sind die Kreise durch Kanten verbunden, die nicht Teil eines Kreises sind.
  - Der Kaktus C_G ist jetzt ein baumartiger Graph.

Kaktus-Repräsentation aller Minimum Cuts

(Fortsetzung 3. Fall: Graph mit zirkulären Partitionen $P_1, \ldots, P_z$)

- Bsp.: Kaktus für die Circular Partition Cuts von 6 Circular Partitions



- Repräsentiere die Minimum Cuts, die nicht Teil einer zirkulären Partition sind (analog zum 2. Fall)
- Man erhält den Kaktus T_C von G.
- Die Anzahl Knoten ist wieder beschränkt durch $2|V| - 1$

Beispiel für Kaktus-Repräsentation