6.4 Splay-Trees als Suchbäume

In diesem Abschnitt untersuchen wir Splay-Trees, eine Datenstruktur, die den MFR-Ansatz auf Bäume überträgt:

> *Wird auf ein Element durch eine Operation zugegriffen, so wird dieses im Splay-Tree in geeigneter Weise zur Wurzel befördert, um, sollten weitere Zugriffe auf dieses Element folgen, diese zu beschleunigen.*

Wir untersuchen hier Splay-Trees als Suchbäume, d.h. die Schlüssel stammen aus einem total geordneten Universum, und innerhalb des Splay-Trees soll die Invariante

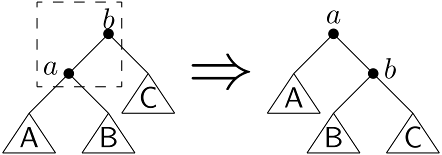
$$\text{“Knoten im lUb} \leq k(x) \leq \text{Knoten im rUb“}$$

gelten.

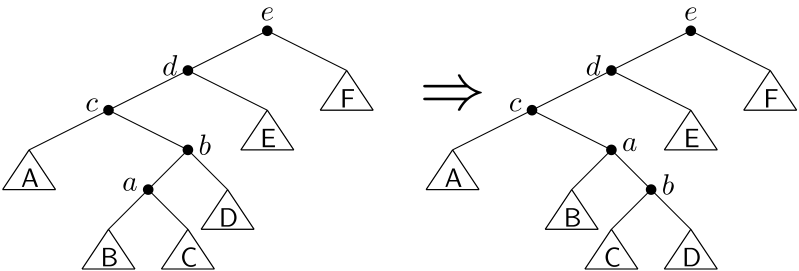
Ansonsten ist ein Splay-Tree ein interner binärer Suchbaum.

Wir benutzen Rotationen, um unter Beibehaltung der Invariante einen Schlüssel näher zur Wurzel zu bewegen, und zwar Einfach- und Doppelrotationen.

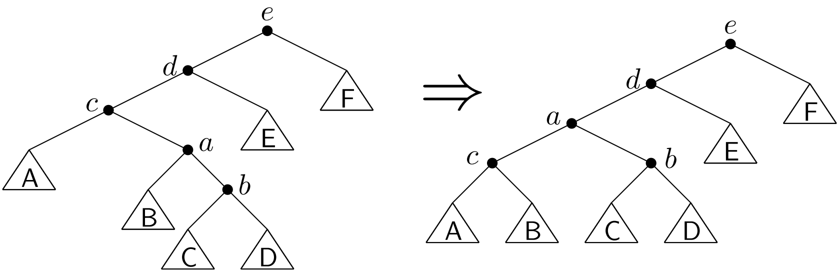
Beispiel 55



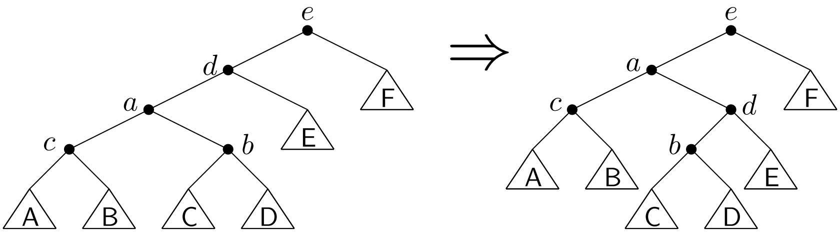
Beispiel 55



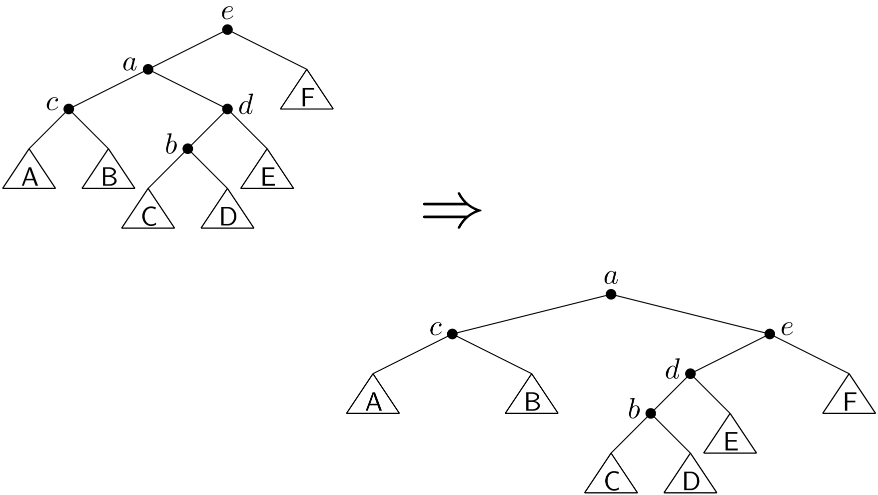
Beispiel 55



Beispiel 55



Beispiel 55

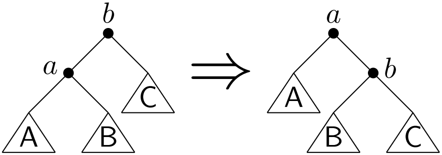


6.4.1 Die Splaying-Operation

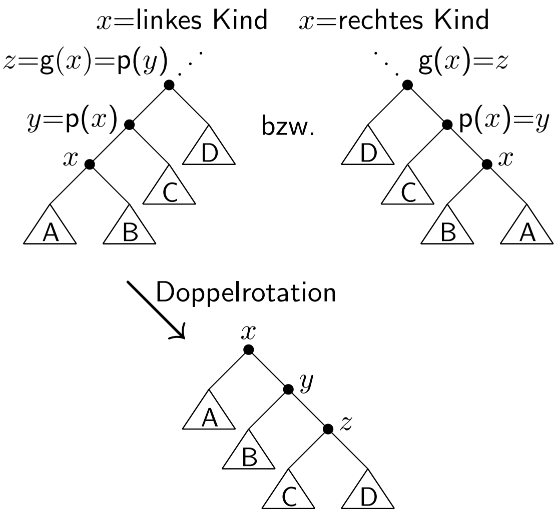
Ein Knoten, auf den zugegriffen wird (Splay(x, T)), wird durch eine Folge von einfachen und doppelten Rotationen an die Wurzel bewegt.

Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

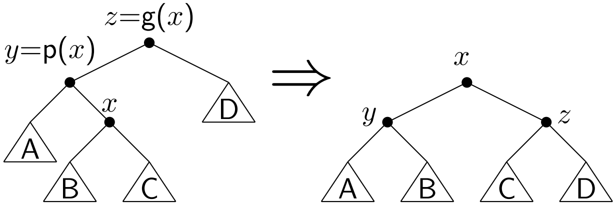
1. (zig): x ist Kind der Wurzel von T: einfache Rotation



2. (zig-zig): x hat Großvater g(x) und Vater p(x); x und p(x) sind jeweils linke (bzw. rechte) Kinder ihres Vaters.

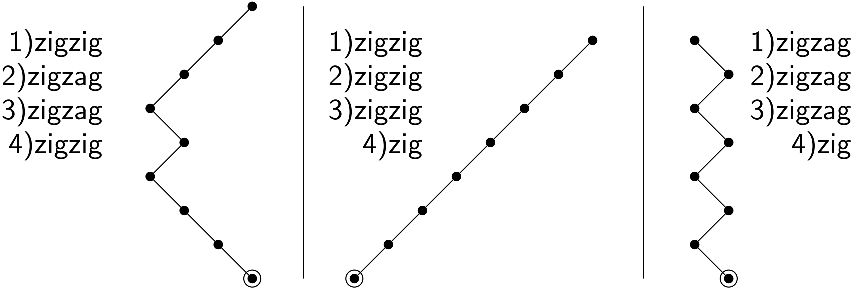


3. (zig-zag): x hat Großvater g(x) und Vater p(x), x ist linkes (rechtes) Kind von p(x), p(x) ist rechtes (linkes) Kind von g(x).



Beispiel 56

Führe die Splaying-Operation jeweils mit dem eingekreisten Element durch:



6.4.2 Amortisierte Kostenanalyse der Splay-Operation

Jeder Knoten habe ein Gewicht $w(x) > 0$. Das Gewicht $tw(x)$ des Unterbaums mit Wurzel x ist die Summe der Gewichte aller Knoten im Unterbaum. Setze

$$\text{Rang } r(x) = \log(tw(x))$$

$$\text{Potenzial eines Baumes } T = \sum_{x \in T} r(x)$$

Lemma 57

Sei T ein Splay-Tree mit Wurzel u, x ein Knoten in T. Die amortisierten Kosten für Splay(x, T) sind

$$\leq 1 + 3(r(u) - r(x)) = \mathcal{O}\left(\log \frac{tw(u)}{tw(x)}\right) .$$

Beweis:

Induktion über die Folge von (Doppel)Rotationen:

Berechne r und r', tw und tw', die Rang- bzw. Gewichtsfunktion vor und nach einem Rotationsschritt. Wir zeigen, dass die amortisierten Kosten im

$$\text{Fall 1 (zig)} \leq 1 + 3(r'(x) - r(x))$$

und in den

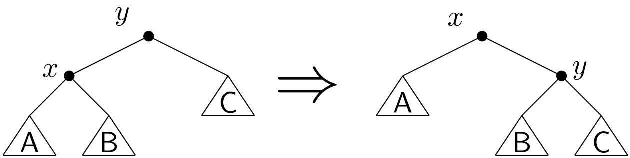
$$\text{Fällen 2 und 3 (zig-zig bzw. zig-zag)} \leq 3(r'(x) - r(x))$$

sind.

y sei der Vater von x, z der Großvater (falls er existiert).

Beweis (Forts.):

1. Fall:

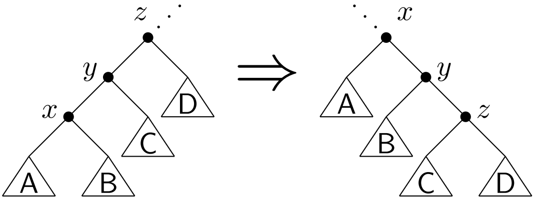


Amortisierte Kosten:

$$
\begin{aligned}
&\le 1 + r'(x) + r'(y) - r(x) - r(y) && \\
&\le 1 + r'(x) - r(x), && \text{da } r'(y) \le r(y) \\
&\le 1 + 3(r'(x) - r(x)), && \text{da } r'(x) \ge r(x)
\end{aligned}
$$

Beweis (Forts.):

2. Fall:



Amortisierte Kosten:

$$
\begin{aligned}
&\leq 2 + r'(x) + r'(y) + r'(z) - r(x) - r(y) - r(z) \\
&= 2 + r'(y) + r'(z) - r(x) - r(y), \qquad \text{da } r'(x) = r(z) \\
&\leq 2 + r'(x) + r'(z) - 2r(x), \ \text{da } r'(x) \geq r'(y) \text{ und } r(y) \geq r(x)
\end{aligned}
$$

Beweis (Forts.):

Es gilt, dass

$$2 + r'(x) + r'(z) - 2r(x) \leq 3(r'(x) - r(x))\,,$$

d.h.

$$2r'(x) - r(x) - r'(z) \geq 2\,.$$

Betrachte dazu die Funktion

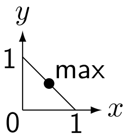
$$f(x, y) = \log x + \log y$$

in dem Bereich

$$x, y > 0,\ x + y \leq 1\,.$$

Beweis (Forts.):

Behauptung: $f(x,y)$ nimmt sein eindeutiges Maximum im Punkt $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ an.



Beweis der Behauptung: Da die $\log$-Funktion streng monoton wachsend ist, kann sich das Maximum der Funktion $f(x,y) = \log x + \log y$ nur auf dem Geradensegment $x + y = 1$, $x, y > 0$ befinden. Dadurch erhalten wir ein neues Maximierungsproblem für die Funktion $g(x) = \log(x) + \log(1-x)$ auf diesem Geradensegment. Da $g(x)$ an den Rändern gegen $-\infty$ strebt, muss es sich um ein lokales Maximum handeln.

Beweis (Forts.):

Die einzige Nullstelle der Ableitung

$$g'(x) = \frac{1}{\ln a}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}\right),$$

wenn $\log = \log_a$, ist $x = 1/2$ (unabhängig von a).

Weiter ist

$$g''(x) = -\frac{1}{\ln a}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2}\right).$$

Da $g''(0.5) < 0$ ist, nimmt $g(x)$ sein globales Maximum in $x = 0.5$ an. Insgesamt folgt, dass die Funktion $f(x,y) = \log x + \log y$ ihr globales Maximum im Bereich $x, y > 0$, $x + y \leq 1$ an der Stelle $(0.5, 0.5)$ annimmt.

Damit ist die obige Behauptung gezeigt. Wir fahren mit dem Beweis der Abschätzung im Lemma fort.

Beweis (Forts.):

Damit gilt im 2. Fall:

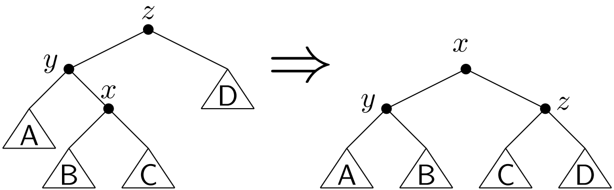
$$r(x) + r'(z) - 2r'(x) = \log\left(\frac{tw(x)}{tw'(x)}\right) + \log\left(\frac{tw'(z)}{tw'(x)}\right) \leq -2\,,$$

da

$$tw(x) + tw'(z) \leq tw'(x)\,.$$

Beweis (Forts.):

3. Fall:



Amortisierte Kosten:

$$
\begin{aligned}
&\leq 2 + r'(x) + r'(y) + r'(z) - r(x) - r(y) - r(z) \\
&\leq 2 + r'(y) + r'(z) - 2r(x), \quad \text{da } r'(x) = r(z) \text{ und } r(x) \leq r(y) \\
&\leq 2(r'(x) - r(x)), \quad \text{da } 2r'(x) - r'(y) - r'(z) \geq 2\,.
\end{aligned}
$$

(Letzteres folgt aus der Behauptung über $f(x, y)$ wie im 2. Fall.)

Beweis (Forts.):

Die Gesamtbehauptung des Lemmas folgt dann durch Aufaddieren der amortisierten Kosten für die einzelnen Schritte (Teleskop-Summe). □

Sei T ein Splay-Tree mit n Knoten $x_1, \ldots, x_n$. Falls sich die Gewichte der Knoten nicht ändern, ist die Verringerung des Potenzials durch eine (beliebige) Folge von Splay-Operationen beschränkt durch

$$\sum_{i=1}^{n} (\log W - \log w_i) = \sum_{i=1}^{n} \log \frac{W}{w_i} \,,$$

wobei

$$W := \sum_{i=1}^{n} w_i \,,$$

$$w_i = \text{Gewicht von } x_i \,,$$

da das Gewicht des Unterbaums mit Wurzel x_i immer mindestens w_i und höchstens W ist.

Satz 58

Die gesamten Kosten für die m Zugriffe im Splay-Tree sind

$$\mathcal{O}((m+n)\log n + m)\,.$$

Beweis:

Wähle $w_i = \frac{1}{n}$ für alle Knoten. Dann sind die amortisierten Kosten für einen Zugriff $\leq 1 + 3\log n$, da $W = \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

Die Verringerung des Potenzials ist

$\leq \sum_{i=1}^{n} \log \frac{W}{w_i} = \sum_{i=1}^{n} \log n = n \log n$.

Damit sind die reellen Kosten $\leq m(1 + 3\log n) + n\log n$. $\square$