Kapitel I Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

1. Grundlagen

Definition 1

1. Ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum ist durch eine Ergebnismenge $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ von Elementarereignissen gegeben.
2. Jedem Elementarereignis ω_i ist eine (Elementar-)Wahrscheinlichkeit $\Pr[\omega_i]$ zugeordnet, wobei wir fordern, dass $0 \leq \Pr[\omega_i] \leq 1$ und

$$\sum_{\omega \in \Omega} \Pr[\omega] = 1.$$

3. Eine Menge $E \subseteq \Omega$ heißt Ereignis. Die Wahrscheinlichkeit $\Pr[E]$ eines Ereignisses ist durch

$$\Pr[E] := \sum_{\omega \in E} \Pr[\omega]$$

definiert.

Beispiel 2

Zwei faire Würfel (einer weiß, einer schwarz) werden geworfen. Wir sind an der Gesamtzahl der angezeigten Augen interessiert:

$$
\begin{aligned}
\Omega \quad = \{ \quad & (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\
& (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\
& (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\
& (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\
& (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\
& (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \ \}
\end{aligned}
$$

1. Die Wahrscheinlichkeit $\Pr((i,j))$ eines jeden Elementarereignisses (i,j) ist $\frac{1}{36}$.

2. Die Wahrscheinlichkeit $\Pr(E)$ des Ereignisses

$$E = \{\text{Die Gesamtzahl der Augen ist } 10\}$$

ist $\frac{1}{12}$.

Wir hätten aber auch sagen können:

$$\Omega = \{2, 3, 4, \ldots, 10, 11, 12\}$$

Die Wahrscheinlichkeit der Elementarereignisse ist dann aber nicht mehr ganz elementar. Es ist z.B.

1. $\Pr(2) = \frac{1}{36}$;
2. $\Pr(4) = \frac{1}{12}$;
3. $\Pr(7) = \frac{1}{6}$.

Beispiel 3

Eine faire Münze wird so lange geworfen, bis die gleiche Seite zweimal hintereinander fällt. Dann ist

$$\Omega = \{\text{hh, tt, htt, thh, thtt, hthh, hthtt, ththh}, \ldots\}$$

Frage: Was sind die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Elementarereignisse?

$\bar{E}$ heißt komplementäres Ereignis zu E.
Allgemein verwenden wir bei der Definition von Ereignissen alle bekannten Operatoren aus der Mengenlehre. Wenn also A und B Ereignisse sind, dann sind auch $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ etc. Ereignisse.
Zwei Ereignisse A und B heißen disjunkt oder auch unvereinbar, wenn $A \cap B = \emptyset$ gilt.

Definition 4

$$\text{relative Häufigkeit von } E := \frac{\text{absolute Häufigkeit von } E}{\text{Anzahl aller Beobachtungen}} = \frac{\text{Anzahl Eintreten von } E}{\text{Anzahl aller Beobachtungen}}.$$

Definition 5

Ein Wahrscheinlichkeitsraum mit $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ heißt endlicher Wahrscheinlichkeitsraum.

Bei unendlichen Wahrscheinlichkeitsräumen werden wir gewöhnlich nur den Fall $\Omega = \mathbb{N}_0$ betrachten. Dies stellt keine große Einschränkung dar, da wir statt einer Ergebnismenge $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ auch $\mathbb{N}_0$ als Ergebnismenge verwenden können, indem wir ω_i mit $i-1$ identifizieren. Wir sagen, dass durch die Angabe der Elementarwahrscheinlichkeiten ein Wahrscheinlichkeitsraum auf Ω definiert ist.

Beispiel 6

Wir beobachten die an einer Straße vorbeifahrenden Autos. Dabei gelte:

1. Es fahren doppelt so viele Autos von links nach rechts wie von rechts nach links.
2. Von zehn Autos sind acht silbergrau und zwei beige.

- Das Ereignis "*Wir beobachten ein von links nach rechts fahrendes Auto*" hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$.
- Das Ereignis "*Das nächste Auto ist ein Taxi von rechts*" passiert mit Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \,.$$

Beispiel 7 (Unendlicher Wahrscheinlichkeitsraum)

Wir betrachten eine Münze, die mit Wahrscheinlichkeit p Kopf zeigt und mit Wahrscheinlichkeit $q := 1 - p$ Zahl.
Wir führen Versuche aus, indem wir die Münze wiederholt solange werfen, bis *Zahl* fällt. Das *Ergebnis* eines solchen Versuchs ist die Anzahl der durchgeführten Münzwürfe.
Damit ergibt sich hier als Ergebnismenge

$$\Omega = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} .$$

Beispiel 7 (Forts.)

Sei, für $i \in \mathbb{N}$, ω_i das Elementarereignis

$$\omega_i \;\widehat{=}\; \text{Die Münze wird } i\text{-mal geworfen}\ .$$

Dann gilt:

$$\Pr[\omega_i] = p^{i-1}q\ ,$$

und

$$\sum_{\omega\in\Omega} \Pr[\omega] = \sum_{i=1}^{\infty} p^{i-1}q = q \cdot \sum_{i=0}^{\infty} p^i = \frac{q}{1-p} = 1\ .$$

(wie es sein soll!)

Lemma 8

Für Ereignisse $A, B, A_1, A_2, \ldots$ *gilt:*

1. $\Pr[\emptyset] = 0$, $\Pr[\Omega] = 1$.
2. $0 \leq \Pr[A] \leq 1$.
3. $\Pr[\bar{A}] = 1 - \Pr[A]$.
4. *Wenn* $A \subseteq B$, *so folgt* $\Pr[A] \leq \Pr[B]$.

Lemma 8 (Forts.)

5. *(Additionssatz) Wenn die Ereignisse* $A_1, \ldots, A_n$ *paarweise disjunkt sind (also wenn für alle Paare* $i \neq j$ *gilt, dass* $A_i \cap A_j = \emptyset$*), so folgt*

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i].$$

Für disjunkte Ereignisse A, B *erhalten wir insbesondere*

$$\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B]\ .$$

Für eine unendliche Menge von disjunkten Ereignissen $A_1, A_2, \ldots$ *gilt analog*

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[A_i]\ .$$

Beweis:

Die Aussagen folgen unmittelbar aus Definition 1, den Eigenschaften der Addition und der Definition der Summe. □

Eigenschaft 5 in Lemma 8 gilt nur für disjunkte Ereignisse. Für den allgemeinen Fall erhalten wir folgenden

Satz 9 (Siebformel, Prinzip der Inklusion/Exklusion)

Für Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ ($n \geq 2$) gilt:

$$\begin{aligned}
\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] &= \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i] - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap A_{i_2}] + - \ldots \\
&+ (-1)^{l-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_l \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_l}] + - \ldots \\
&+ (-1)^{n-1} \cdot \Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n] \,.
\end{aligned}$$

Satz 9 (Forts.)

Insbesondere gilt für zwei Ereignisse A und B

$$\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B]\,.$$

Für drei Ereignisse A_1, A_2 und A_3 erhalten wir

$$\begin{aligned}\Pr[A_1 \cup A_2 \cup A_3] \quad = \quad & \Pr[A_1] + \Pr[A_2] + \Pr[A_3] \\ & -\Pr[A_1 \cap A_2] - \Pr[A_1 \cap A_3] \\ & -\Pr[A_2 \cap A_3] \\ & +\Pr[A_1 \cap A_2 \cap A_3]\,.\end{aligned}$$