Aus diesem Resultat können wir einige interessante Schlussfolgerungen ziehen. Zunächst betrachten wir die Zufallsvariable

$$N := \text{Anzahl der Jobs im System (wartend + in Bearbeitung)}.$$

Für N gilt (die Berechnung von $\mathbb{E}[N]$ und $\mathrm{Var}[N]$ erfolgt mit den schon bei der geometrischen Verteilung in Abschnitt 3 verwendeten Summenformeln)

$$\mathbb{E}[N] = \sum_{k \geq 0} k \cdot \pi_k = \frac{\rho}{1-\rho} \quad \text{und} \quad \mathrm{Var}[N] = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}. \qquad (15)$$

Abbildung 4 zeigt $\mathbb{E}[N]$ als Funktion von ρ. Man erkennt, wie das System für $\rho \to 1$ divergiert.

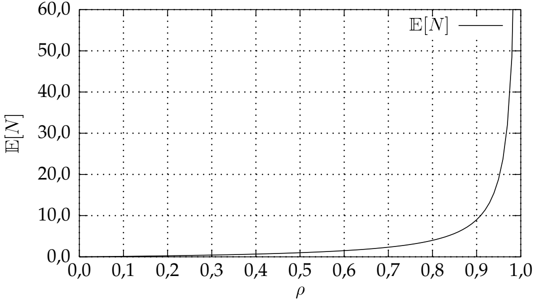

Abbildung: Mittlere Anzahl der Jobs in einer M/M/1–Warteschlange

Für eine weitergehende Analyse der Leistung des Systems definieren wir für den i-ten Job (bezüglich der Reihenfolge, mit der die Jobs im System ankommen):

$$R_i := \text{Antwortzeit (Gesamtverweildauer im System)}.$$

Der Wert von R_i hängt natürlich vom Zustand des Systems zur Ankunftszeit des Jobs ab. Betrachten wir das System jedoch im Gleichgewichtszustand, so können wir den Index i auch weglassen und einfach von der Antwortzeit R sprechen.
Bei der Berechnung von R hilft uns der folgende Satz.

Theorem 157

(Formel von Little) Für Warteschlangen-Systeme mit mittlerer Ankunftsrate λ, bei denen die Erwartungswerte $\mathbb{E}[N]$ und $\mathbb{E}[R]$ existieren, gilt

$$\mathbb{E}[N] = \lambda \cdot \mathbb{E}[R].$$

Hierbei werden keine weiteren Annahmen über die Verteilung der Ankunfts- und Bearbeitungszeiten getroffen.

Beweis:

[(Skizze)]Wir beobachten das System über einen (langen) Zeitraum (siehe Abbildung 5). In einer Zeitspanne der Länge t_0 seien $n(t_0)$ Anforderungen eingetroffen. $N(t)$ gibt die Anzahl der Jobs an, die sich zum Zeitpunkt t im System befinden. Nun betrachten wir die beiden Größen

$$\sum_{i=1}^{n(t_0)} R_i \qquad \text{und} \qquad \int_0^{t_0} N(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

Beide Größen messen „ungefähr" die in Abbildung 5 grau gefärbte Fläche.

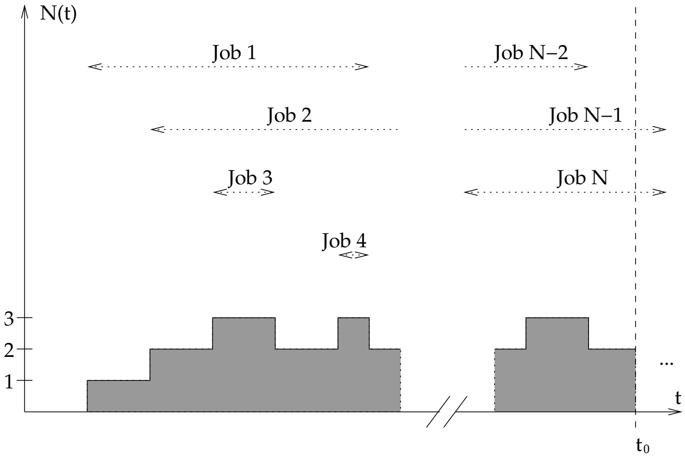

Abbildung: Graphik zum Beweis des Satzes von Little

Beweis (Forts.):

Die rechte Größe misst sogar genau diese Fläche, bei der Summe wird hingegen bei den Jobs, die zur Zeit t_0 noch im System sind, die gesamte Aufenthaltsdauer gezählt, statt nur der Anteil bis zum Zeitpunkt t_0. Für große t_0 ist der Unterschied dieser beiden Größen aber vernachlässigbar. Führt man daher den Grenzübergang $t_0 \to \infty$ durch und normiert beide Größen mit $1/n(t_0)$, erhält man

$$\lim_{t_0\to\infty} \frac{1}{n(t_0)} \sum_{i=1}^{n(t_0)} R_i = \lim_{t_0\to\infty} \frac{1}{n(t_0)} \int_0^{t_0} N(t)\,\mathrm{d}\,t = \lim_{t_0\to\infty} \frac{t_0}{n(t_0)} \cdot \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} N(t$$

Beweis (Forts.):

Mit

$$\overline{R}(t_0) := \frac{1}{n(t_0)} \sum_{i=1}^{n(t_0)} R_i, \quad \overline{N}(t_0) := \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} N(t)\,\mathrm{d}\,t \quad \text{und} \quad \overline{\lambda}(t_0) := \frac{n(t_0)}{t_0}$$

erhalten wir daraus wegen

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{t_0\to\infty} \overline{\lambda}(t_0) = \lim_{t_0\to\infty} \frac{n(t_0)}{t_0}, \\
\mathbb{E}[R] &= \lim_{t_0\to\infty} \overline{R}(t_0) = \lim_{t_0\to\infty} \frac{1}{n(t_0)} \sum_{i=1}^{n} R_i \quad \text{und} \\
\mathbb{E}[N] &= \lim_{t_0\to\infty} \overline{N}(t_0) = \lim_{t_0\to\infty} \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} N(t)\,\mathrm{d}\,t
\end{aligned}$$

sofort die Behauptung. □

Bei der Berechnung von $\mathbb{E}[R]$ haben wir verwendet, dass sich für lange Beobachtungszeiträume die relative Häufigkeit immer mehr dem Erwartungswert annähert. Man vergleiche dies mit dem Gesetz der großen Zahlen, Satz 63. Bei den Zufallsvariablen R_i ist allerdings die Unabhängigkeit nicht gesichert und ein formal korrekter Beweis von $\mathbb{E}[R] = \lim_{t_0 \to \infty} \overline{R}(t_0)$ würde deshalb aufwändiger. $\mathbb{E}[N] = \lim_{t_0 \to \infty} \overline{N}(t_0)$ gilt aufgrund ähnlicher Überlegungen.

Die obige Argumentation ist zweifellos ein wenig informell, sie sollte jedoch ausreichen, um die Hintergründe des Satzes zu verdeutlichen.

Mit Satz 157 ist die Berechnung von $\mathbb{E}[R]$ für die Markov-Kette aus Abbildung 3 kein Problem mehr. Aus (15) folgt

$$\mathbb{E}[R] = \frac{\mathbb{E}[N]}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}. \tag{16}$$

Manchmal sieht man statt R auch die leicht abgewandelte Größe

$$W := \text{(reine) Wartezeit.}$$

Wegen der Linearität des Erwartungswerts ist die Berechnung von $\mathbb{E}[W]$ für M/M/1–Warteschlangen kein Problem:

$$\mathbb{E}[W] = \mathbb{E}[R] - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}. \tag{17}$$

3.3 Birth-and-Death Prozesse