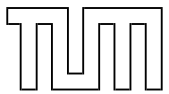
Fortgeschrittene Netzwerk- und Graph-Algorithmen

Prof. Dr. Hanjo Täubig

Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
(Prof. Dr. Ernst W. Mayr)
Institut für Informatik
Technische Universität München

Wintersemester 2010/11



Übersicht

Vorlesungsdaten

- Modul: IN2158
- Bereich:
  Informatik III (Theoretische Informatik)
  Bioinformatik (Bereich Informatik)
- Semesterwochenstunden:
  4 SWS Vorlesung + 2 SWS Übung
- ECTS: 8 Punkte
- Vorlesungszeiten:
  Montag 12:15 – 13:45 Uhr (MI 00.13.009A)
  Mittwoch 10:15 – 11:45 Uhr (MI 00.08.038)
- Übung:
  Montag 14:15 – 15:45 Uhr (MI 03.11.018)

Dozent

- Hanjo Täubig
  (Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen / Prof. Mayr)
- eMail: taeubig@in.tum.de
- Web: http://www14.in.tum.de/personen/taeubig/
- Telefon: 089 / 289-17740
- Raum: 03.09.039

- Sprechstunde: Mittwoch 13–14 Uhr
  (oder nach Vereinbarung)

Hinweis

Am Mittwoch, dem 3. November 2010 entfällt die Vorlesung aufgrund der Fachschaftsvollversammlung.

Voraussetzungen

- Voraussetzungen:
  Stoff des Informatik Grundstudiums
  - Diskrete Strukturen
  - Grundlagen: Algorithmen und Datenstrukturen
  - Einführung in die Theoretische Informatik

- vorteilhaft:
  Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen I/II

Inhalt

- Inhalt:
  - Zentralitätsindizes
  - Dichte in (Teil-)Graphen
  - Alternative Algorithmen für Zusammenhangsprobleme
  - Clustering
  - Netzwerk-Statistik
  - Netzwerk-Vergleich
  - Spektrale Analyse
  - Robustheit

Literatur

Die Vorlesung orientiert sich an folgendem Buch:

U. Brandes, Th. Erlebach (Eds.):
Network Analysis – Methodological Foundations
Lecture Notes in Computer Science Vol. 3418,
Springer, 2005.

Webzugriff:
http://www.springerlink.com/openurl.asp?genre=issue&issn=0302-9743&volume=3418

(Automatische Proxy-Konfiguration: http://pac.lrz-muenchen.de/)

Weitere Literatur

- K. Mehlhorn, P. Sanders:
  Algorithms and Data Structures: The Basic Toolbox
- J. Bang-Jensen, G. Gutin:
  Digraphs: Theory, Algorithms and Applications
- V. Turau:
  Algorithmische Graphentheorie
- J. Aldous, R. Wilson:
  Graphs and Applications – An Introductory Approach
- A. Dolan, J. Aldous:
  Networks and Algorithms – An Introductory Approach

Übersicht

Netzwerke

- Netzwerk: Objekt bestehend aus
  - *Elementen* und
  - *Interaktionen* bzw. *Verbindungen* zwischen den Elementen

- eher *informales* Konzept
  - keine exakte Definition
  - Elemente und insbesondere ihre Verbindungen können ganz unterschiedlichen Charakter haben
  - manchmal manifestiert in real existierenden Dingen, manchmal nur gedacht (virtuell)

Beispiele für Netzwerke

Beispiele:

- Kommunikationsnetze (Internet, Telefonnetz),
- Verkehrsnetze (Straßennetz, Schienennetz, Flugnetz, Nahverkehrsnetz),
- Versorgungsnetzwerke (Strom, Wasser, Gas, Erdöl),
- wirtschaftliche Netzwerke (Geld- und Warenströme, Handel)
- biologische Netzwerke (Metabolische und Interaktionsnetzwerke),
- soziale Netzwerke (Communities),
- Publikationsnetzwerke

Erkenntnis

- Erkenntnis:
  Netze sind allgegenwärtig im täglichen Leben jedes Menschen.
  Wenn sie nicht richtig funktionieren, kann das weitreichende Folgen haben (z.B. Stromausfall bei Überlastung).

- Offensichtliche Folgerung:
  Es kann von großem Vorteil sein, wenn man Verfahren kennt, um Netzwerke zu analysieren, d.h. die Stärken und die Schwächen von Netzwerken festzustellen und Netzwerkvorgänge zu optimieren.

Graphen

- Graph: formales / abstraktes Objekt bestehend aus
  - einer Menge von *Knoten* (engl. nodes, vertices) und
  - einer Menge von *Kanten* (engl. edges, lines, links), die jeweils ein Paar von Knoten verbinden.
  - evt. einer Menge von Eigenschaften der Knoten und/oder Kanten

- Notation: $G = (V, E)$,
  manchmal auch $G = (V, E, w)$ im Fall gewichteter Graphen

- Anzahl der Knoten: $n = |V|$
  Anzahl der Kanten: $m = |E|$

Gerichtete und ungerichtete Graphen

- Unterscheidung: *ungerichtete / gerichtete* Kanten (bzw. Graphen):
  - ungerichtet: $E \subseteq \{\{v, w\} : v \in V, w \in V\}$
    (ungeordnetes Paar von Knoten bzw. 2-elementige Teilmenge)
  - gerichtet: $E \subseteq \{(v, w) : v \in V, w \in V\}$, also $E \subseteq V \times V$
    (geordnetes Paar von Knoten)

- Sind zwei Knoten v und w durch eine Kante e verbunden, dann nennt man
  - v und w *adjazent* bzw. *benachbart*
  - v und e *inzident* (ebenso w und e)

- Anzahl der Nachbarn eines Knotens v: *Grad* $\deg(v)$
  Bei gerichteten Graphen unterscheidet man
  - *Eingangsgrad*: $\deg^-(v) = |\{(w, v) \in E\}|$ und
  - *Ausgangsgrad*: $\deg^+(v) = |\{(v, w) \in E\}|$

Annahmen

Wir gehen meist von folgenden Annahmen aus:

- Der Graph (also die Anzahl der Knoten und Kanten) ist *endlich*.
- Der Graph ist *einfach*, d.h. E ist eine Menge und keine Multimenge (anderenfalls nennen wir G einen Multigraph).
- In den meisten Fällen gehen wir davon aus, dass der Graph keine *Schleifen* enthält (Kanten von v nach v).

Gewichtete Graphen

In Abhängigkeit von dem betrachteten Problem wird den Kanten und/oder Knoten oft eine Eigenschaft (z.B. eine Farbe oder ein numerischer Wert, das *Gewicht*) zugeordnet (evt. auch mehrere), z.B.

- Längen / Signallaufzeiten,
- Kosten,
- Kapazitäten / Bandbreite,
- Ähnlichkeiten,
- Verkehrsdichte, etc.

Wir nennen den Graphen dann

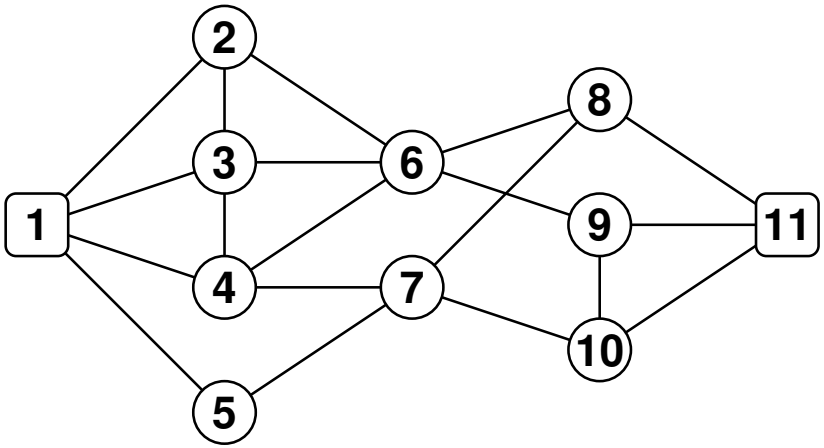
- *knotengewichtet* bzw.
- *kantengewichtet*

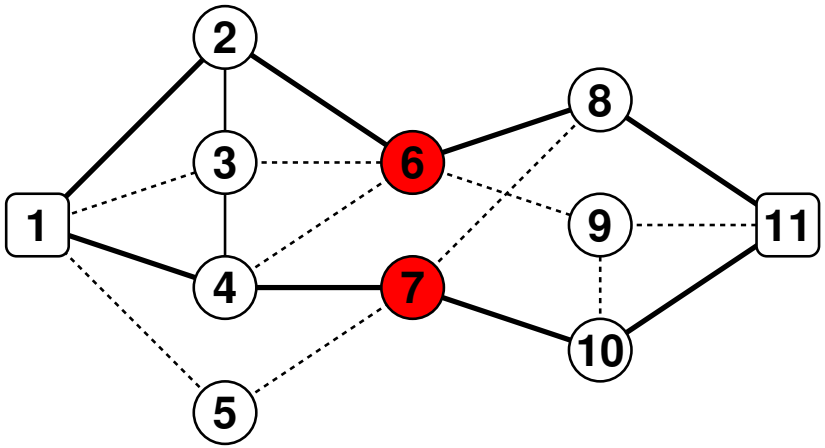
Beispiel: $w : E \mapsto \mathbb{R}$
Schreibweise: $w(e)$ für das Gewicht einer Kante $e \in E$

Wege, Pfade und Kreise

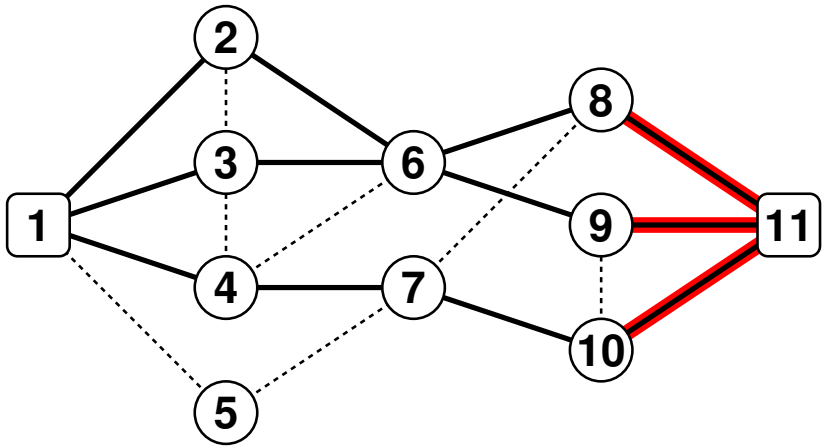
- Weg (engl. *walk*) in einem Graphen $G = (V, E)$: alternierende Folge von Knoten und Kanten $x_0, e_1, \ldots, e_k, x_k$, so dass
  - $\forall i \in [0, k] : x_i \in V$ und
  - $\forall i \in [1, k] : e_i = \{x_{i-1}, x_i\}$ bzw. $e_i = (x_{i-1}, x_i) \in E$.
- *Länge* eines Weges: Anzahl der enthaltenen Kanten
- Ein Weg ist ein Pfad, falls er (in sich) kantendisjunkt ist, falls also gilt: $e_i \neq e_j$ für $i \neq j$.
- Ein Pfad ist ein einfacher Pfad, falls er (in sich) knotendisjunkt ist, falls also gilt: $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$.
- Ein Weg heißt *Kreis* (engl. *cycle*), falls $x_0 = x_k$.
- Eine andere Bedeutung der Begriffe *knoten-/kantendisjunkt* ergibt sich, wenn man mehrere Pfade zwischen gleichen Anfangs- und Endknoten betrachtet (siehe Abbildung).

Disjunkte s-t-Pfade





2 knotendisjunkte 1-11-Pfade



3 kantendisjunkte 1-11-Pfade

Graphrepräsentation

Darstellung von Graphen im Computer?

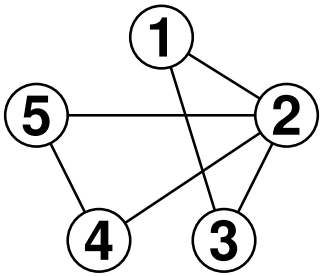
Vor- und Nachteile bei z.B. folgenden Fragen:

- Sind zwei gegebene Knoten v und w adjazent?
- Was sind die Nachbarn eines Knotens?
- Welche Knoten sind (direkte oder indirekte) Vorgänger bzw. Nachfolger eines Knotens v in einem gerichteten Graphen?
- Wie aufwendig ist das Einfügen oder Löschen eines Knotens bzw. einer Kante?

Graphrepräsentationen

- Kantenliste
- Adjazenzmatrix
- Inzidenzmatrix
- Adjazenzarray
- Adjazenzliste
- implizit

Kantenliste



$$\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{4,5\}$$

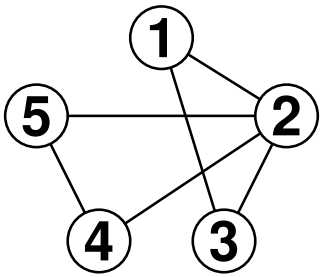
Vorteil:

- Speicherbedarf $\mathcal{O}(m+n)$
- Einfügen von Knoten und Kanten in $\mathcal{O}(1)$
- Löschen von Kanten per Handle in $\mathcal{O}(1)$

Nachteil:

- G.find(Key i, Key j): im worst case $\Theta(m)$
- G.remove(Key i, Key j): im worst case $\Theta(m)$
- Nachbarn nur in $\mathcal{O}(m)$ feststellbar

Adjazenzmatrix



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

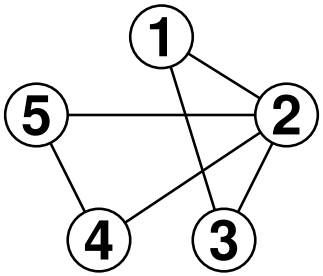
Vorteil:

- in $\mathcal{O}(1)$ feststellbar, ob zwei Knoten Nachbarn sind
- ebenso Einfügen und Löschen von Kanten

Nachteil:

- kostet $\Theta(n^2)$ Speicher, auch bei Graphen mit $o(n^2)$ Kanten
- Finden aller Nachbarn eines Knotens kostet $\mathcal{O}(n)$
- Hinzufügen neuer Knoten ist schwierig

Inzidenzmatrix

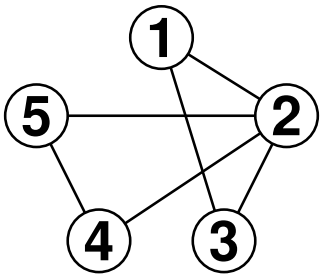


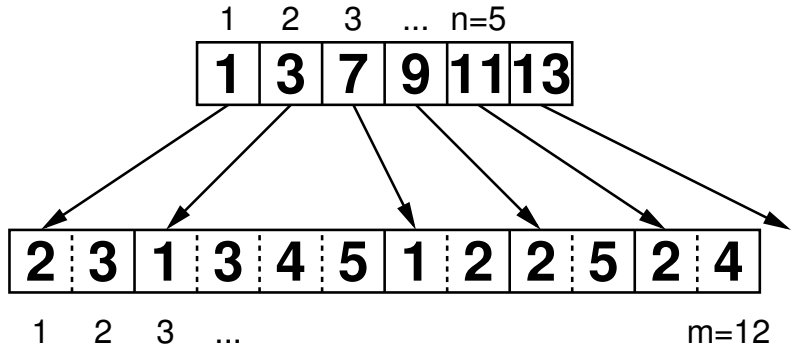
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nachteil:

- kostet $\Theta(mn)$ Speicher

Adjazenzarray





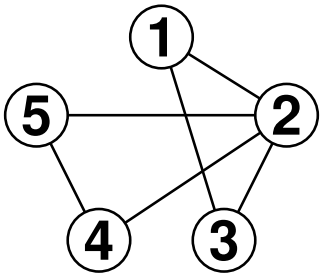
Vorteil:

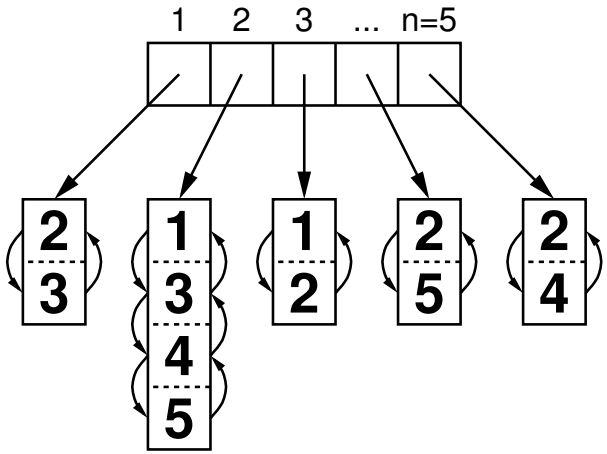
- Speicherbedarf:
  gerichtete Graphen: $n + m + \Theta(1)$
  (hier noch kompakter als Kantenliste mit $2m$)
  ungerichtete Graphen: $n + 2m + \Theta(1)$

Nachteil:

- Einfügen und Löschen von Kanten ist schwierig,
  deshalb nur für *statische* Graphen geeignet

Adjazenzliste





Unterschiedliche Varianten:
einfach/doppelt verkettet, linear/zirkulär

Vorteil:

- Einfügen von Kanten in $\mathcal{O}(d)$ oder $\mathcal{O}(1)$
- Löschen von Kanten in $\mathcal{O}(d)$ (per Handle in $\mathcal{O}(1)$)
- mit unbounded arrays etwas cache-effizienter

Nachteil:

- Zeigerstrukturen verbrauchen relativ viel Platz und Zugriffszeit

Adjazenzliste + Hashtabelle

- speichere Adjazenzliste (Liste von adjazenten Nachbarn bzw. inzidenten Kanten zu jedem Knoten)
- speichere Hashtabelle, die zwei Knoten auf einen Zeiger abbildet, der dann auf die ggf. vorhandene Kante verweist

Zeitaufwand:

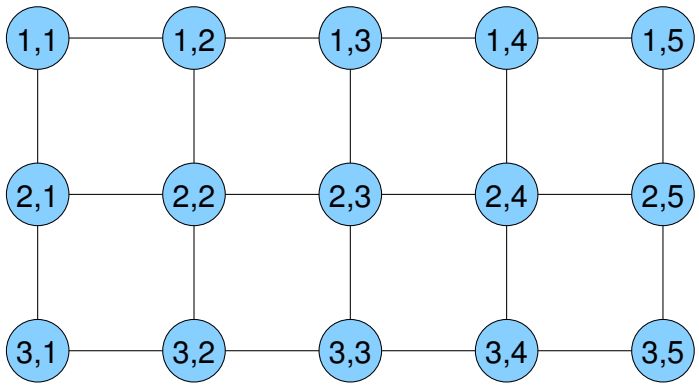
- G.find(Key i, Key j): $\mathcal{O}(1)$ (worst case)
- G.insert(Edge e): $\mathcal{O}(1)$ (im Mittel)
- G.remove(Key i, Key j): $\mathcal{O}(1)$ (im Mittel)
- Speicheraufwand: $\mathcal{O}(n+m)$

Implizite Repräsentation

Beispiel: Gitter-Graph (grid graph)

- definiert durch zwei Parameter k und ℓ

$$
\begin{aligned}
V &= [1,\ldots,k] \times [1,\ldots,\ell] \\
E &= \{((i,j),(i,j')) \in V^2 : \ |j-j'| = 1\} \cup \\
&\quad \{((i,j),(i',j)) \in V^2 : \ |i-i'| = 1\}
\end{aligned}
$$



- Kantengewichte könnten in 2 zweidimensionalen Arrays gespeichert werden: eins für waagerechte und eins für senkrechte Kanten

Weitere Beispiele: Hypercubes, Cube-Connected Cycles

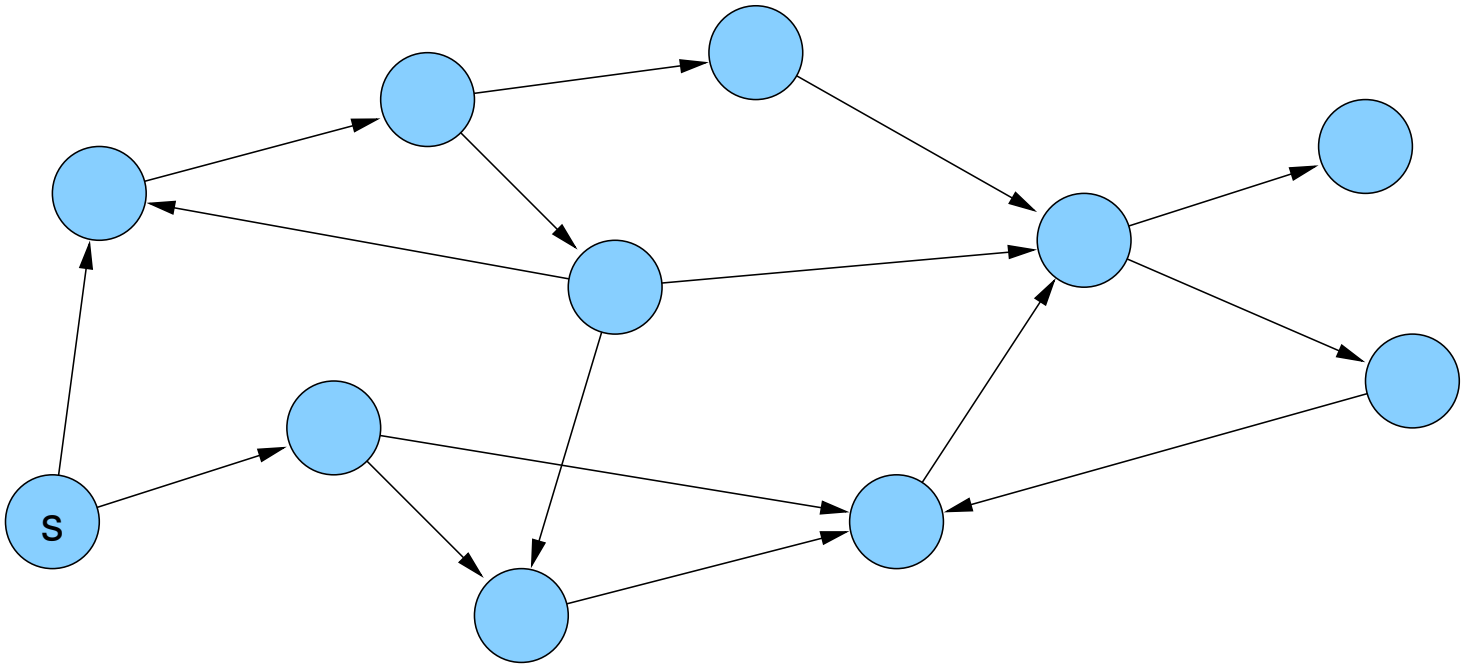
Graphtraversierung

Problem:

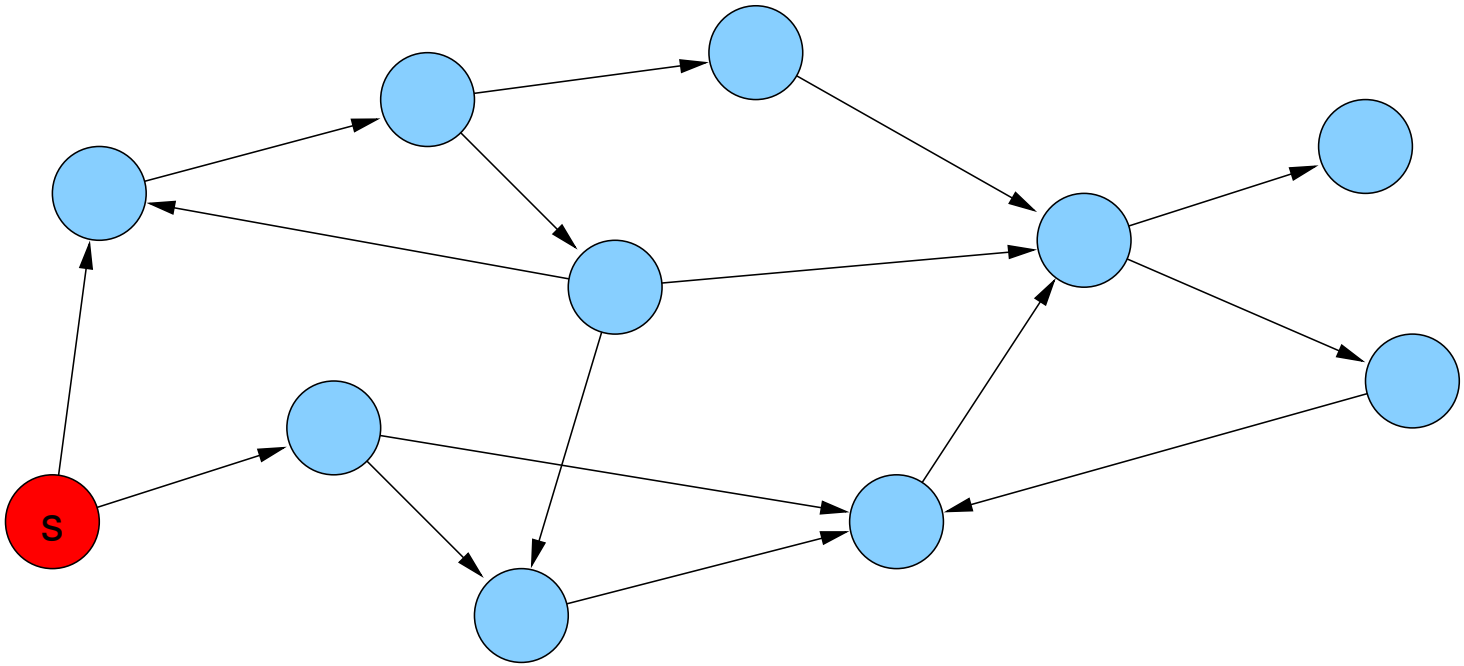
Wie kann man die Knoten eines Graphen systematisch durchlaufen?

- Breitensuche (breadth-first search, bfs)
  - schichtenweise Traversierung in aufsteigendem Abstand vom Ursprungsknoten
- Tiefensuche (depth-first search, dfs)
  - Topologische Sortierung (bei DAGs)
  - Zweifachzusammenhangskomponenten
  - Starke Zusammenhangskomponenten

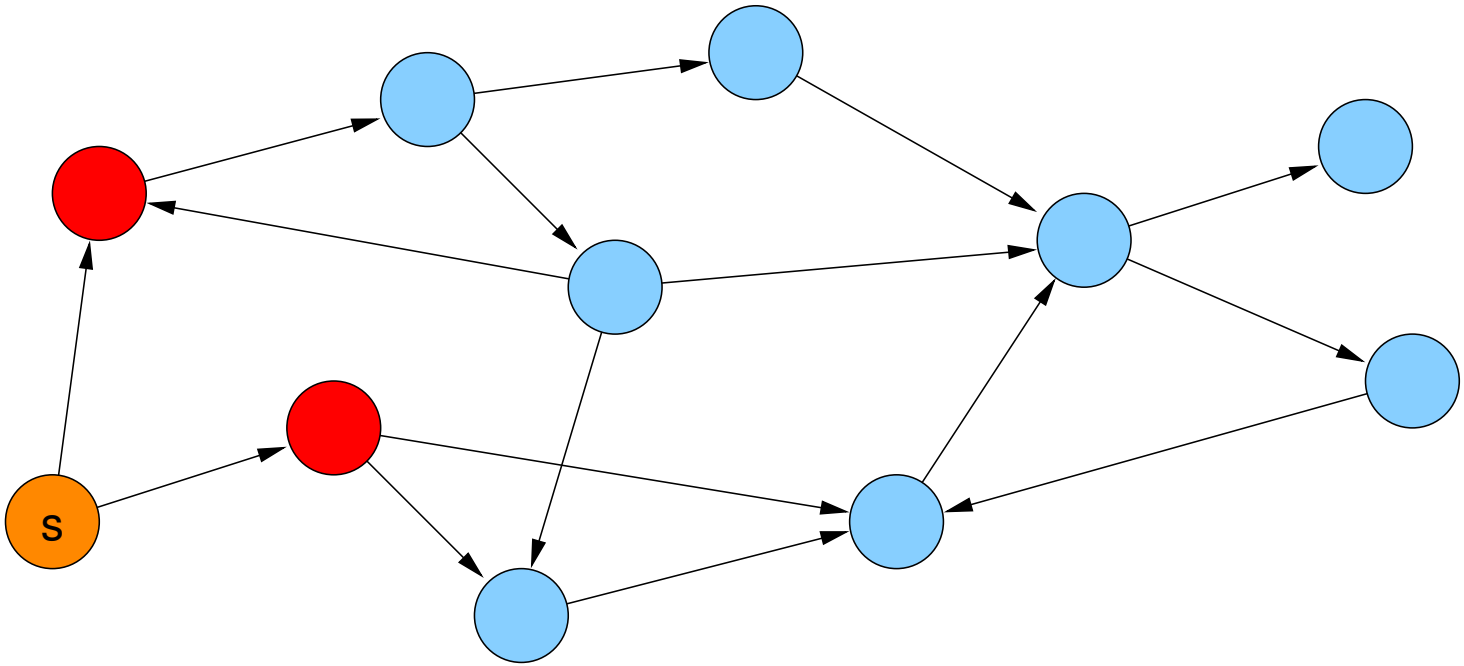
Breitensuche



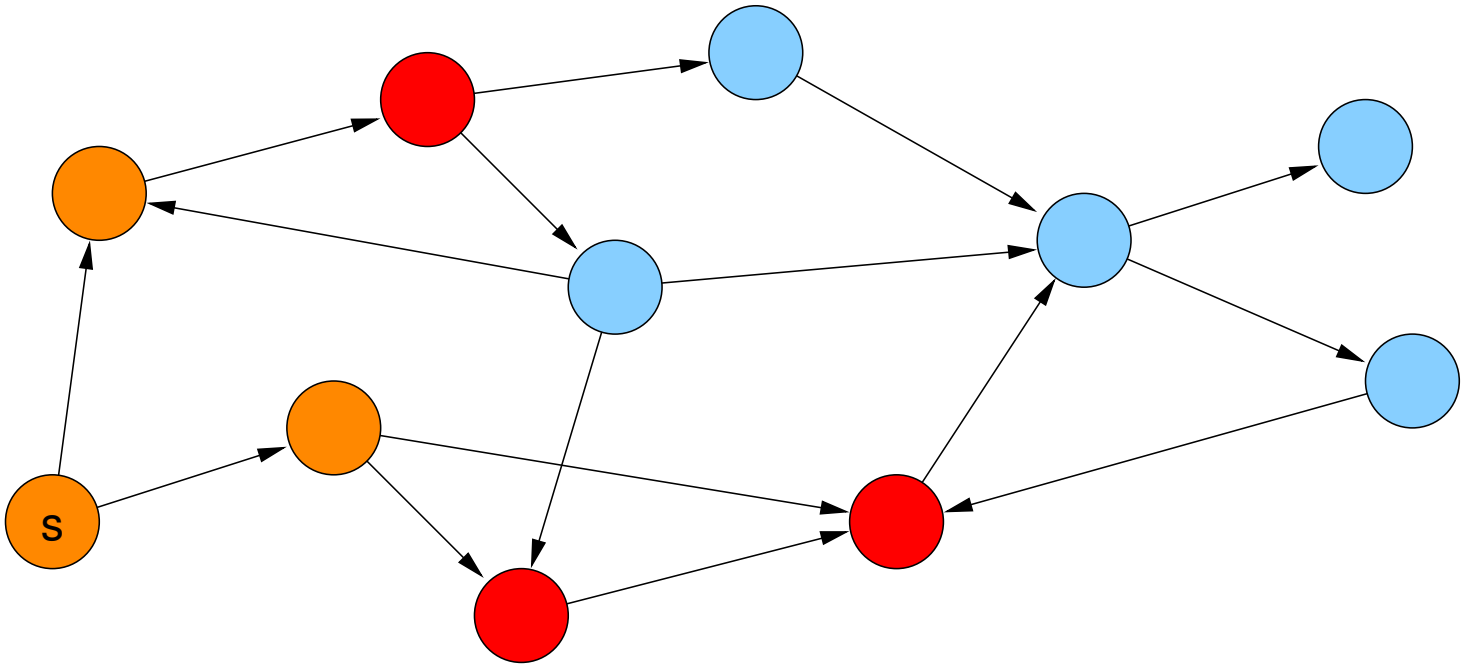
Breitensuche



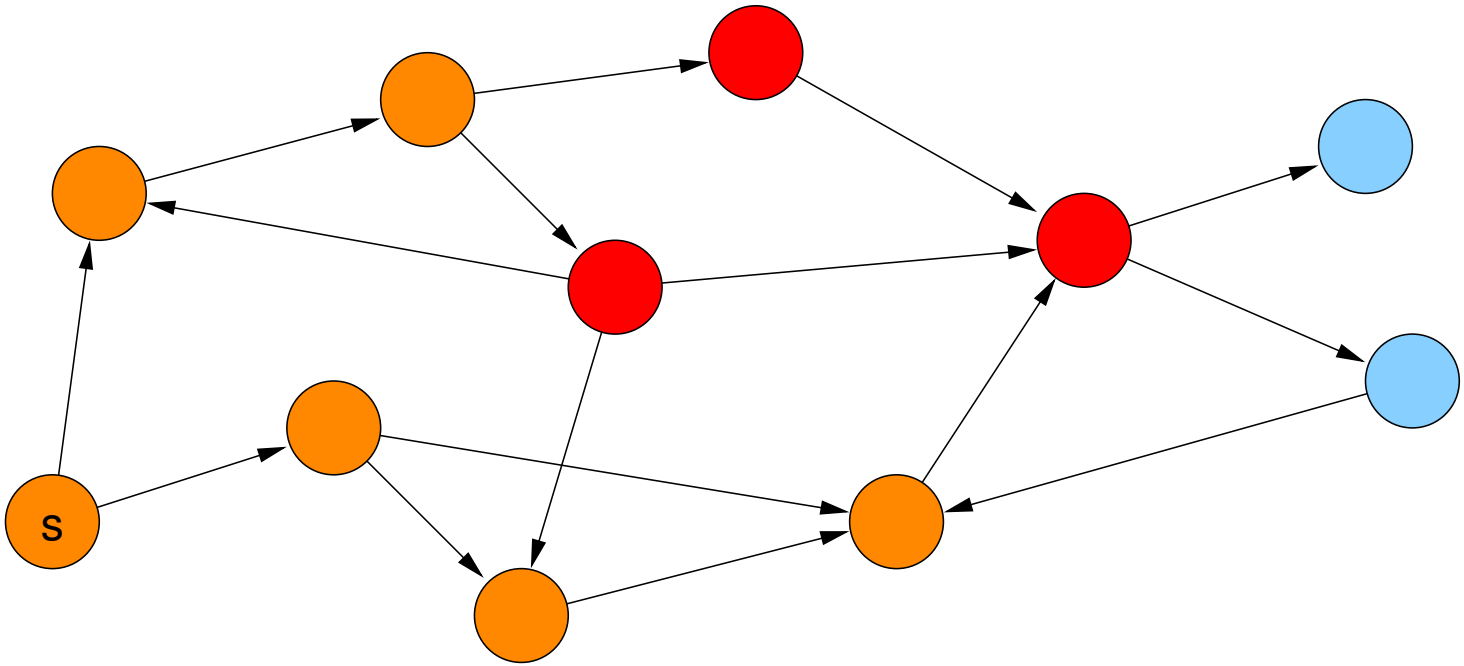
Breitensuche



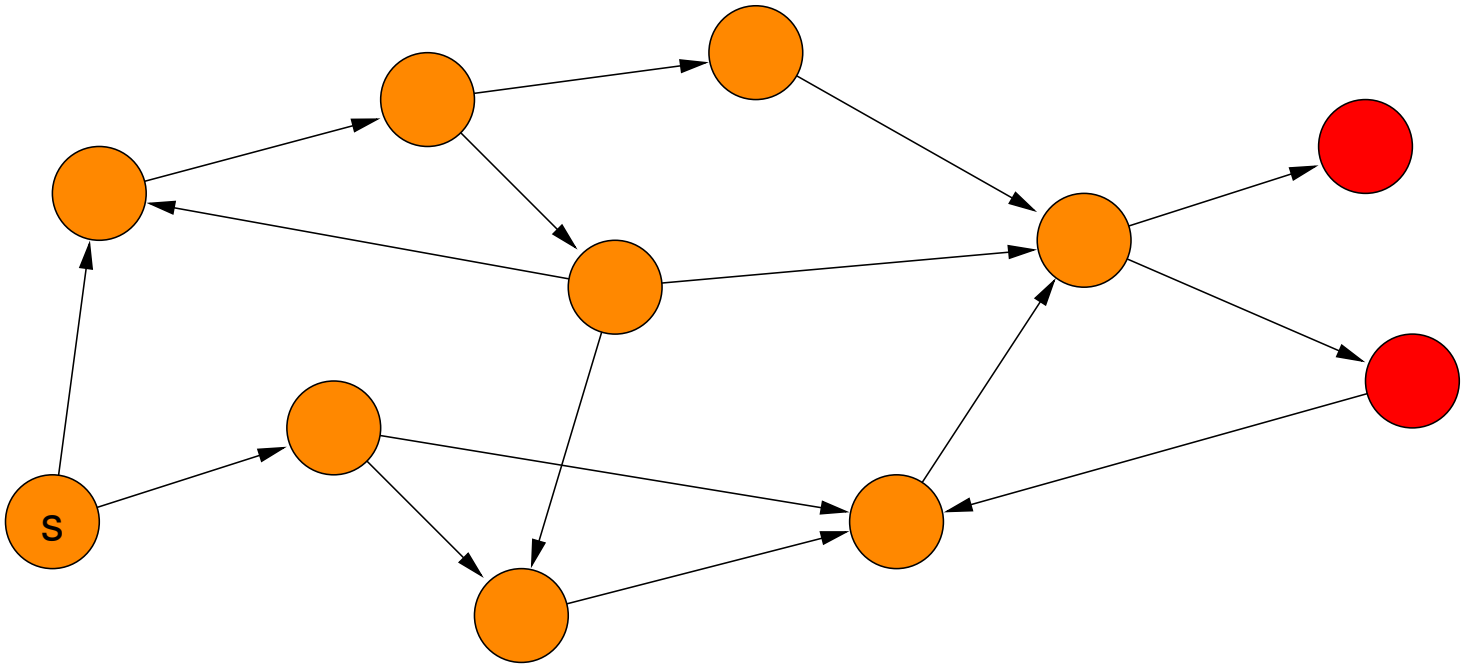
Breitensuche



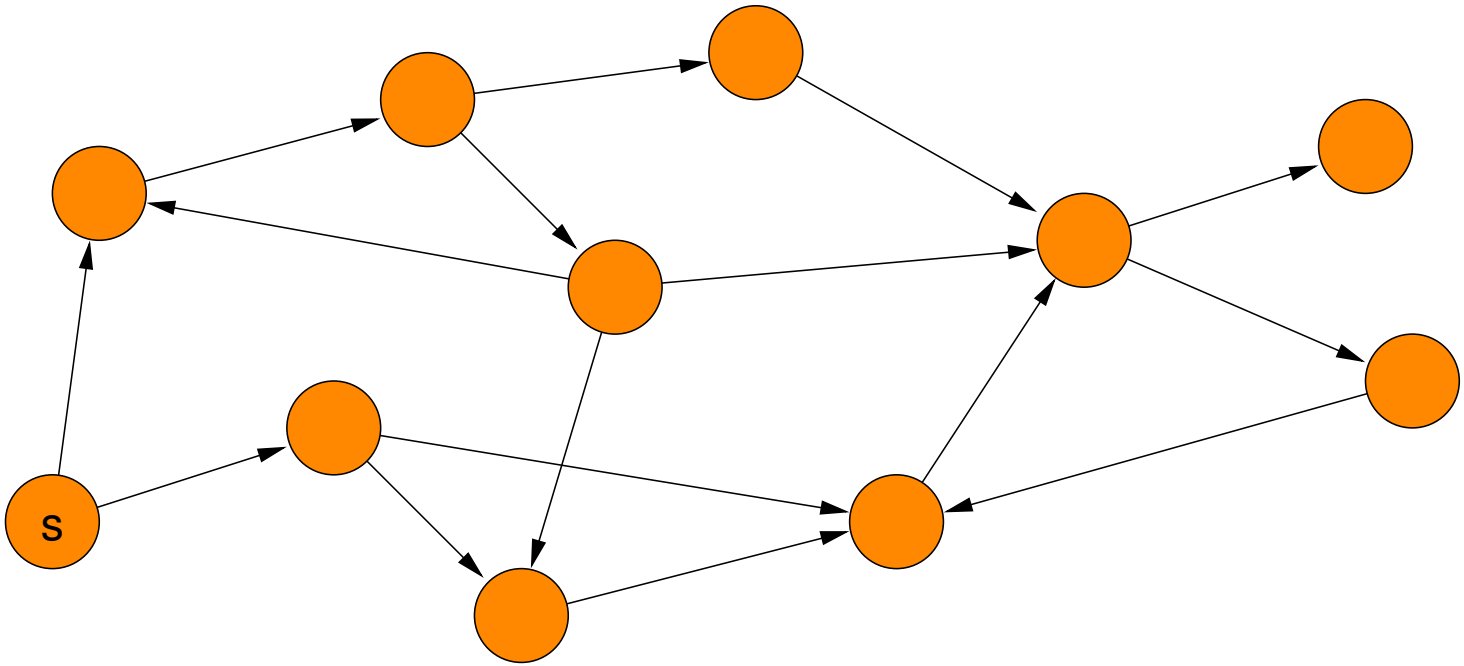
Breitensuche



Breitensuche

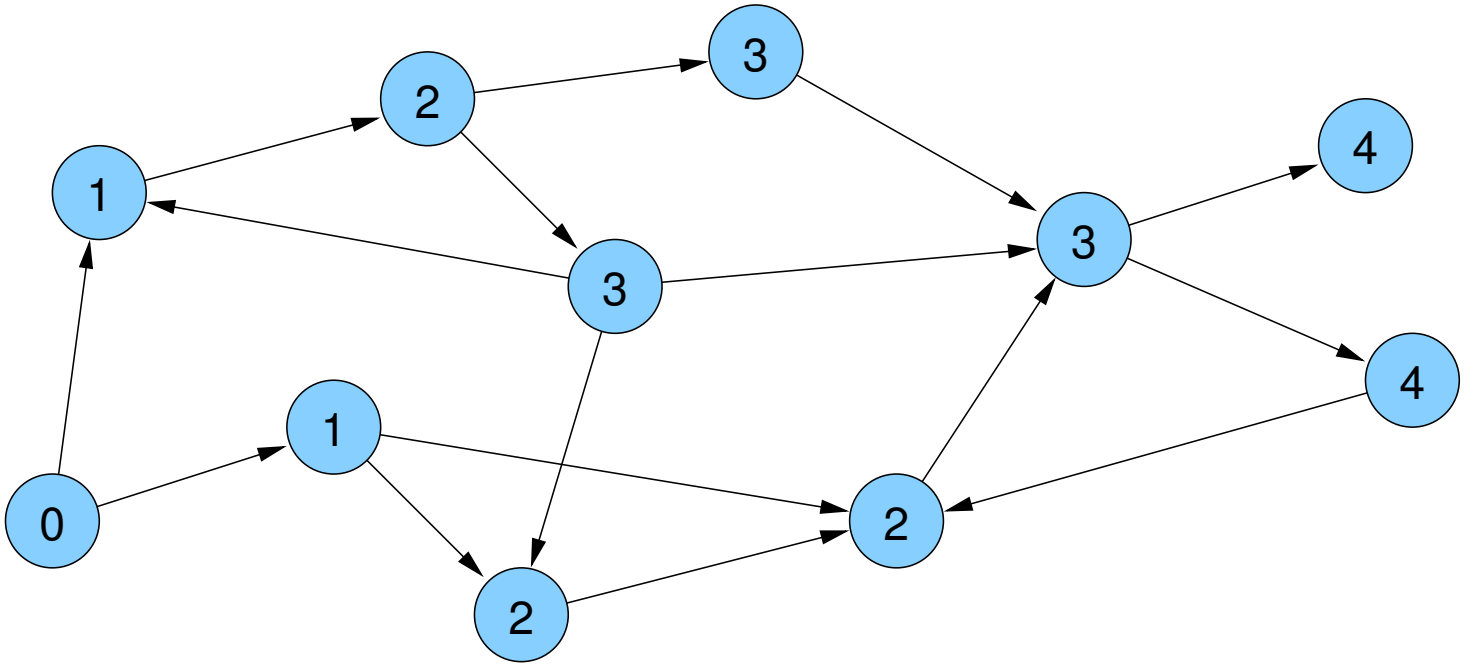


Breitensuche



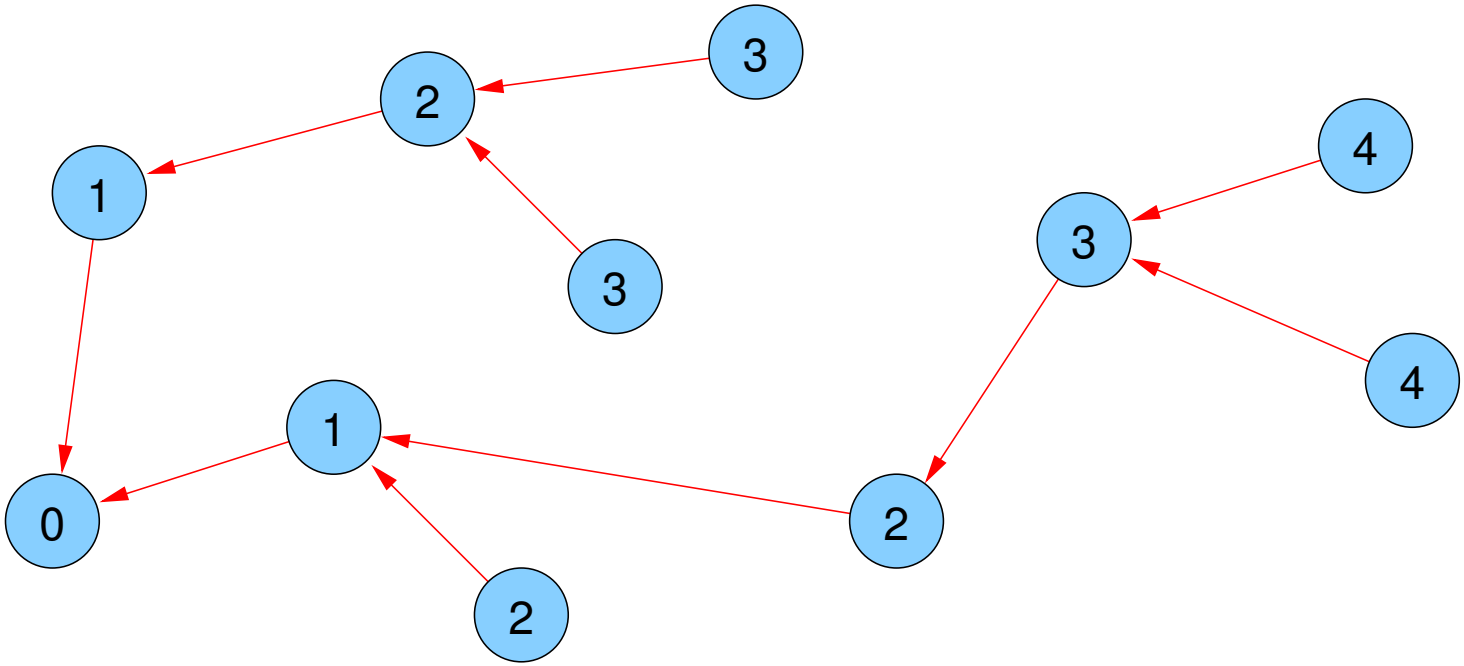
Breitensuche

- Anwendung: Single Source Shortest Path (SSSP) Problem in ungewichteten Graphen
- $d(v)$: Distanz von Knoten v zu s ($d(s) = 0$)



Breitensuche

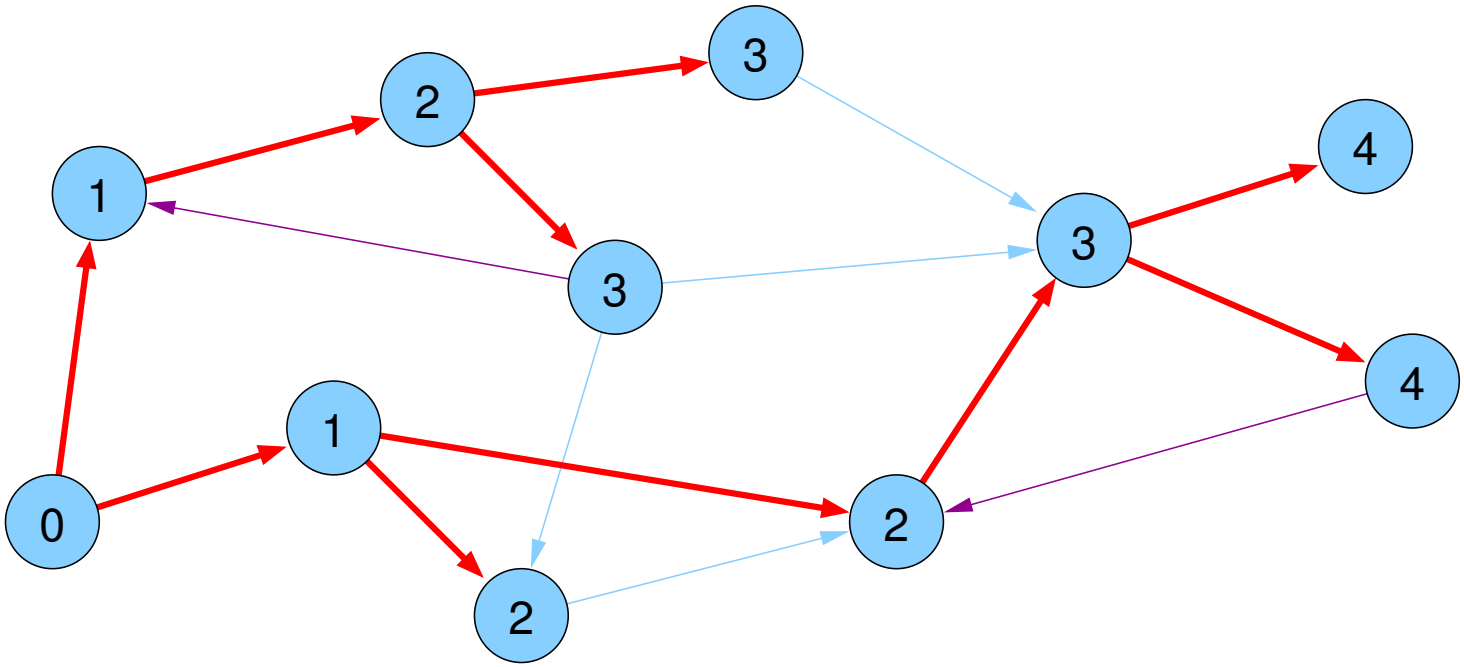
- parent(v): Knoten, von dem v entdeckt wurde
- parent wird beim ersten Besuch von v gesetzt ($\Rightarrow$ eindeutig)



Breitensuche

Kantentypen:

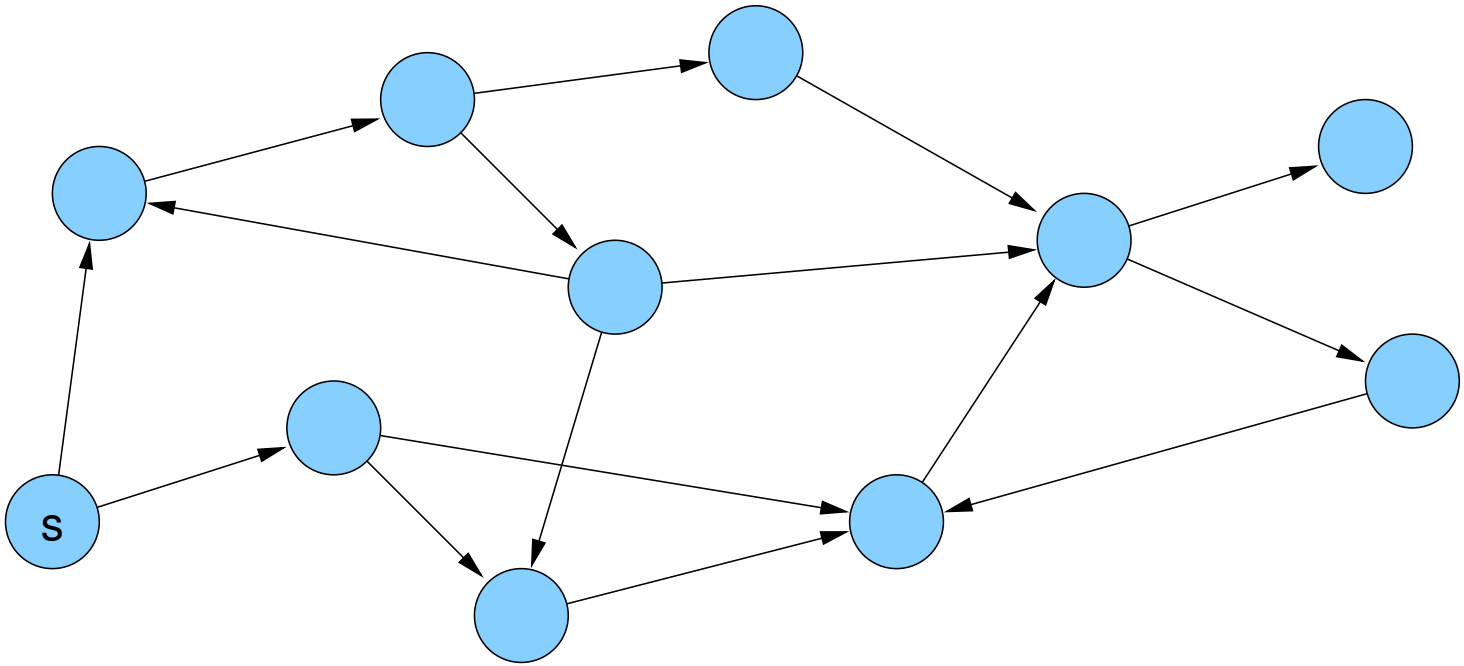
- Baumkanten: zum Kind
- Rückwärtskanten: zu einem Vorfahren
- Kreuzkanten: sonstige



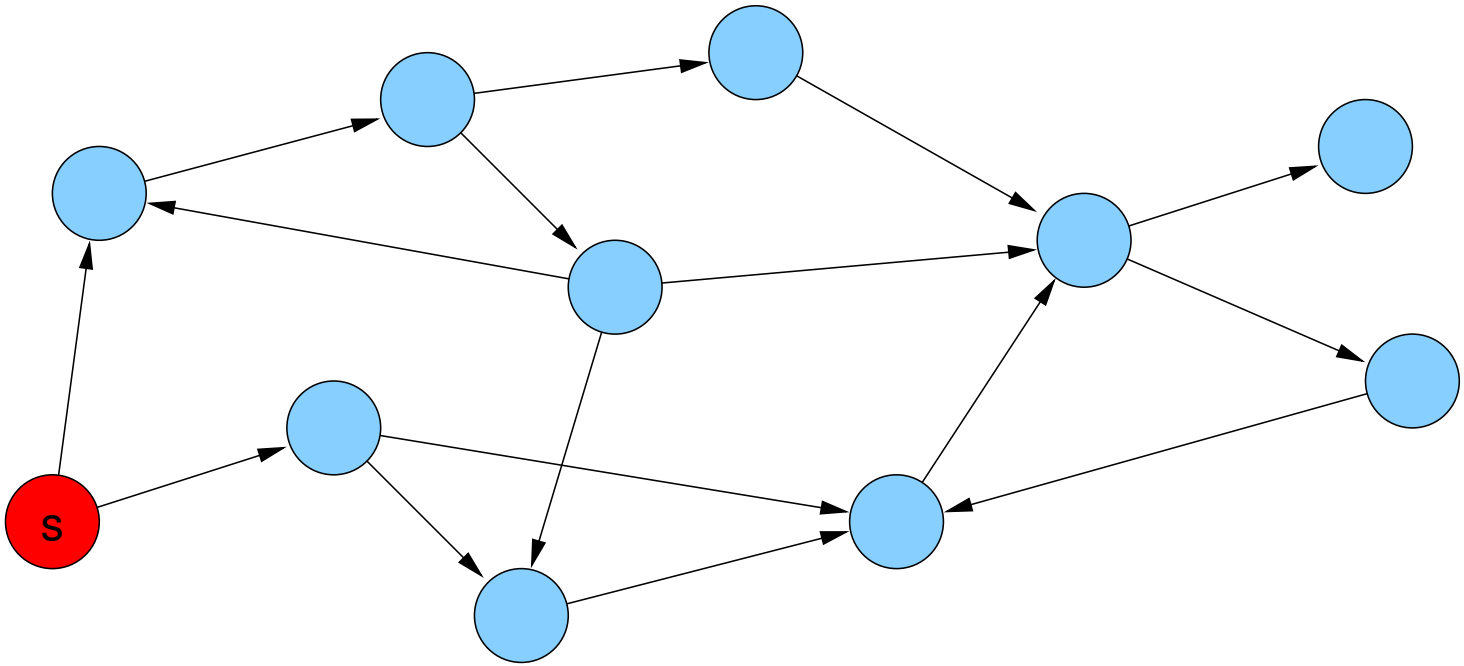
Breitensuche

```
void BFS(Node s) {
    d[s] = 0;
    parent[s] = s;
    List<Node> q = ⟨s⟩;
    while (!q.empty()) {
        u =q.popFront();
        foreach ((u, v) ∈ E) {
            if (parent[v] == null) {
                q.pushBack(v);
                d[v] = d[u]+1;
                parent[v] = u;
            }
        }
    }
}
```

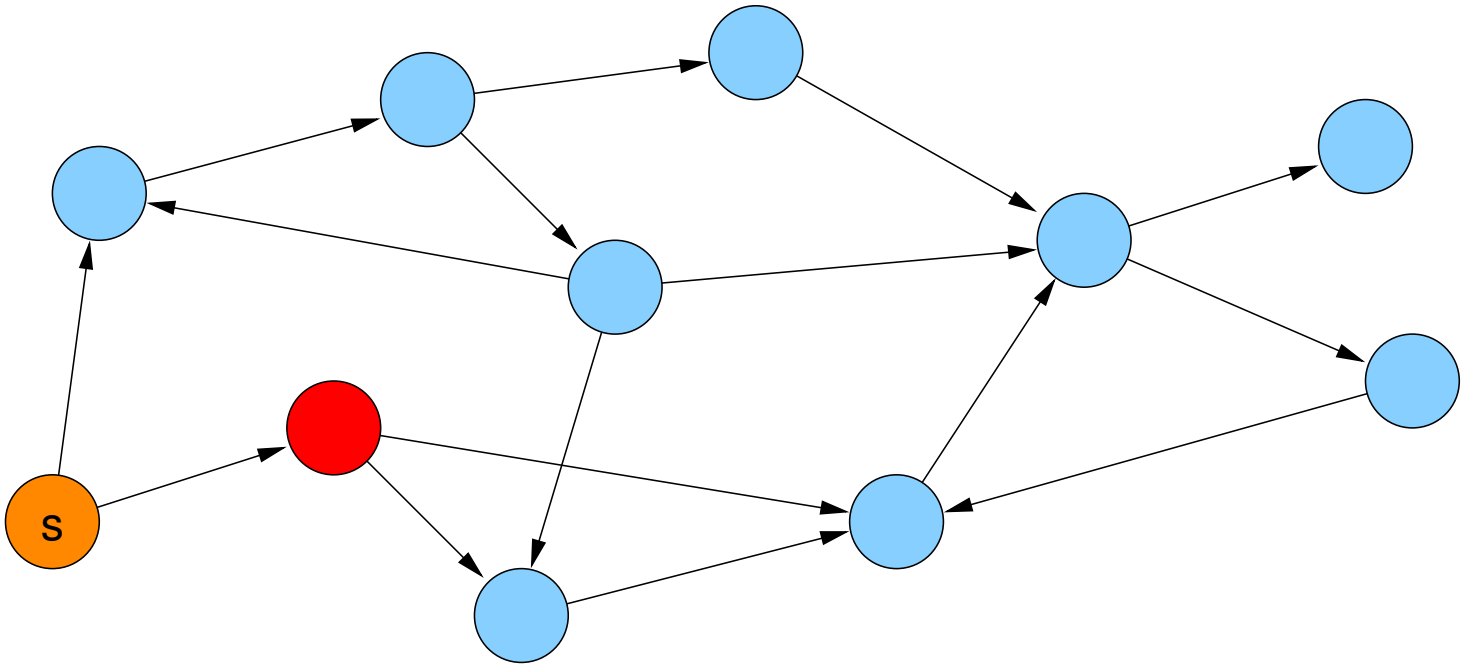
Tiefensuche



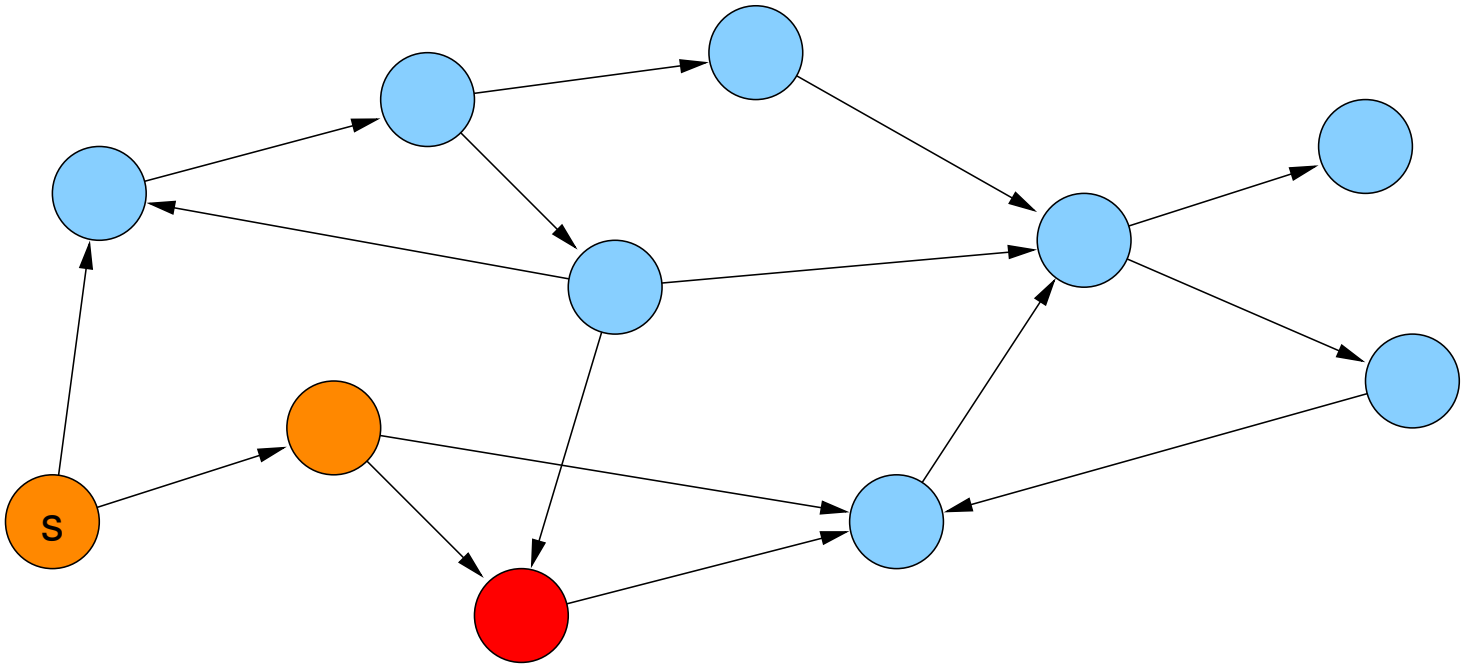
Tiefensuche



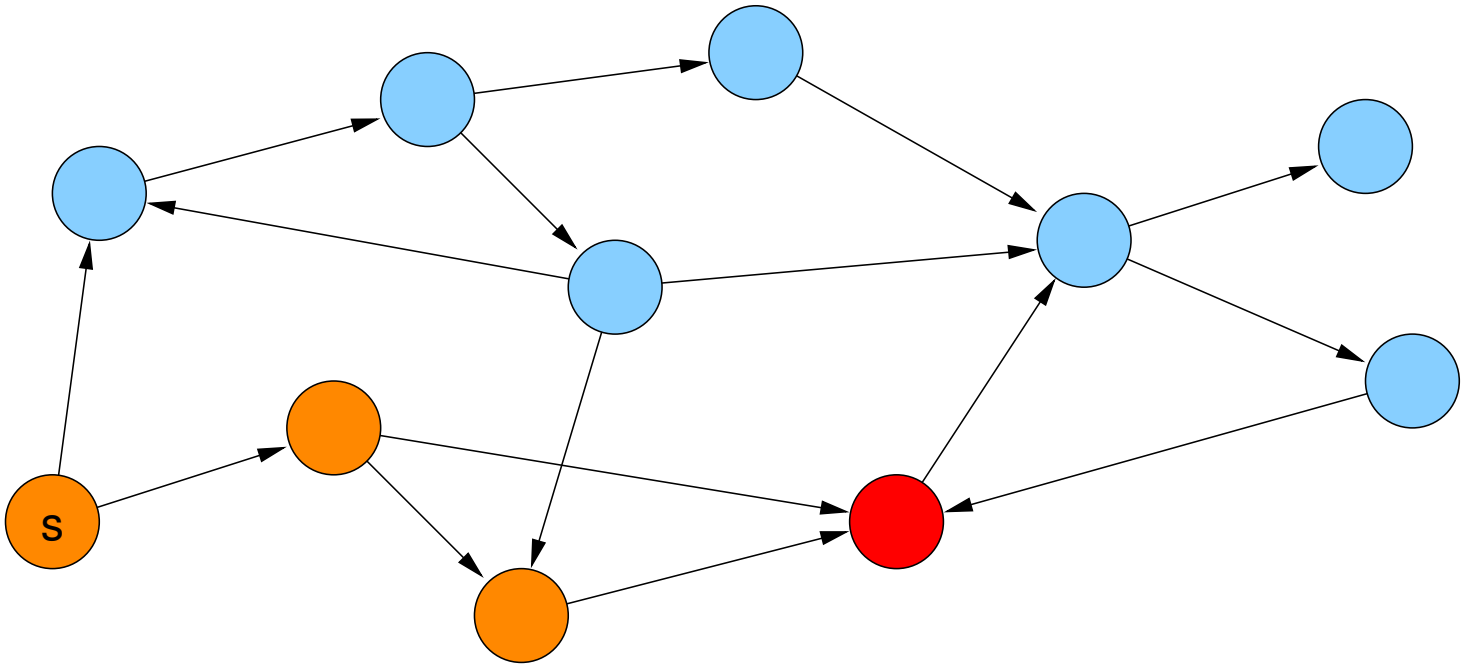
Tiefensuche



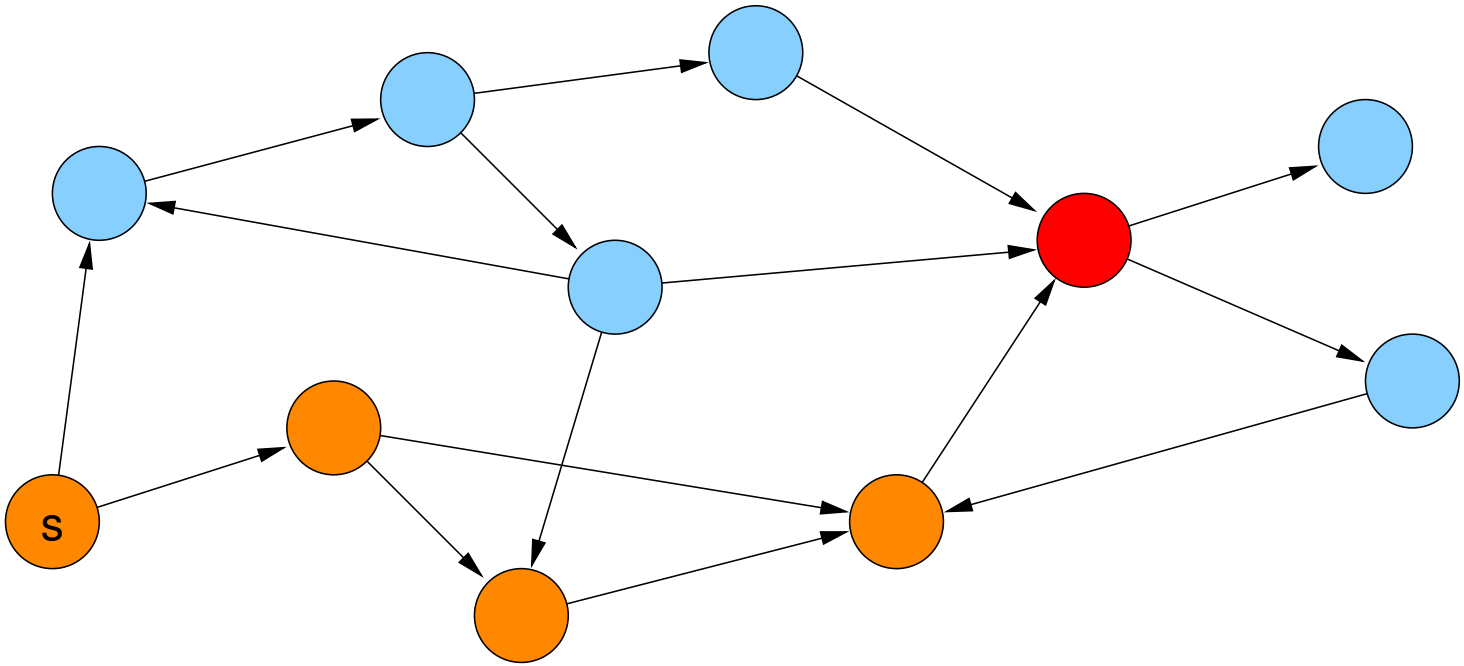
Tiefensuche



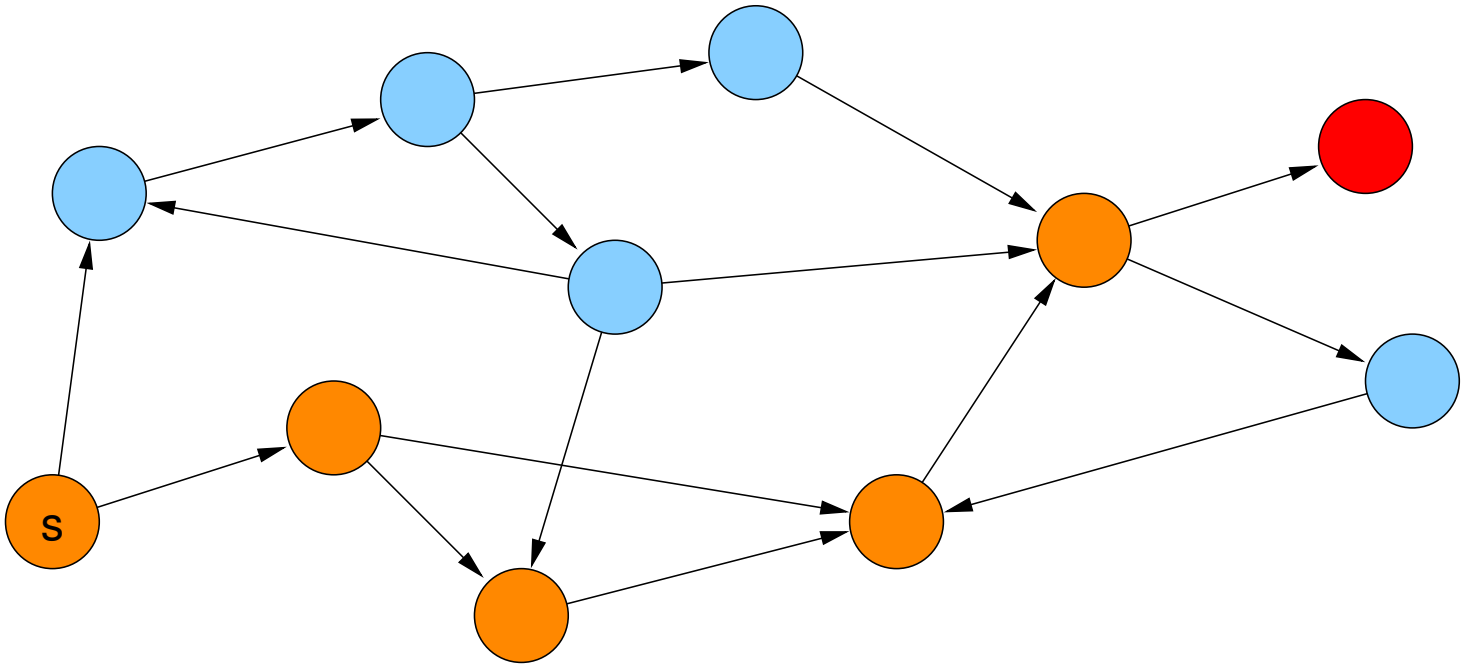
Tiefensuche



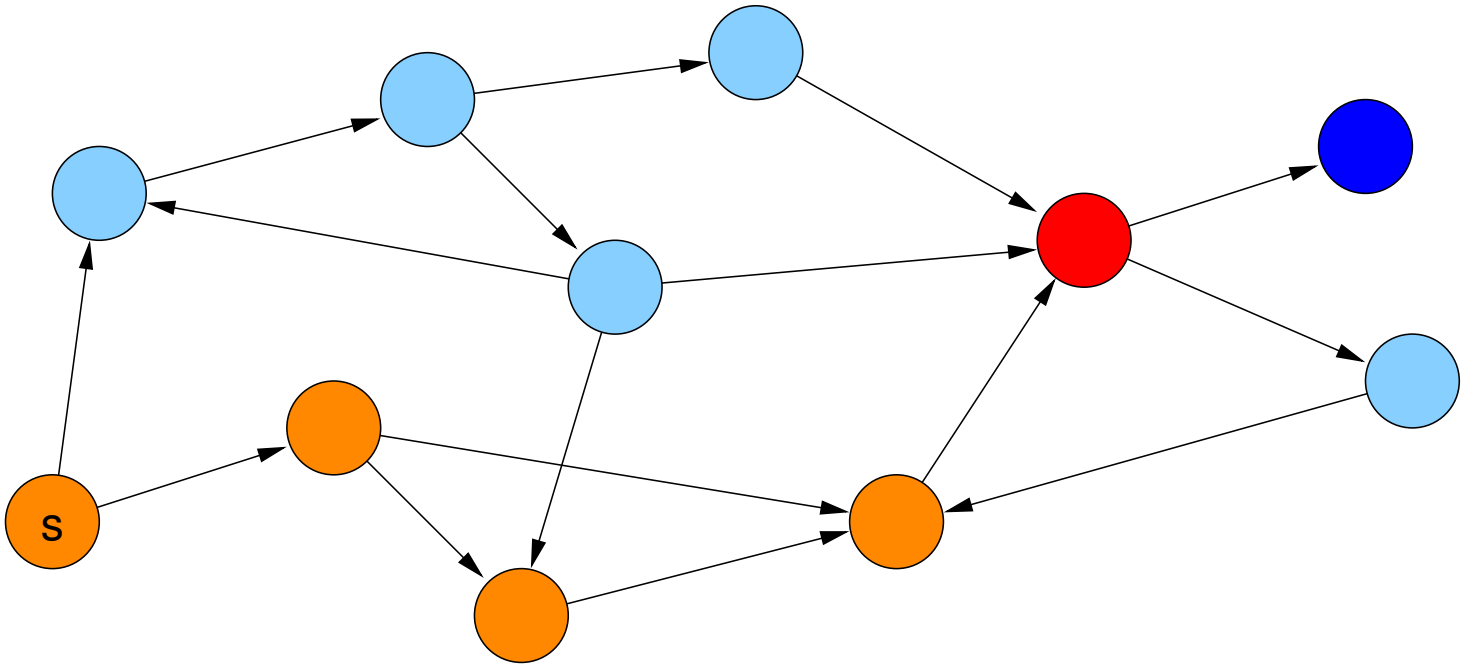
Tiefensuche



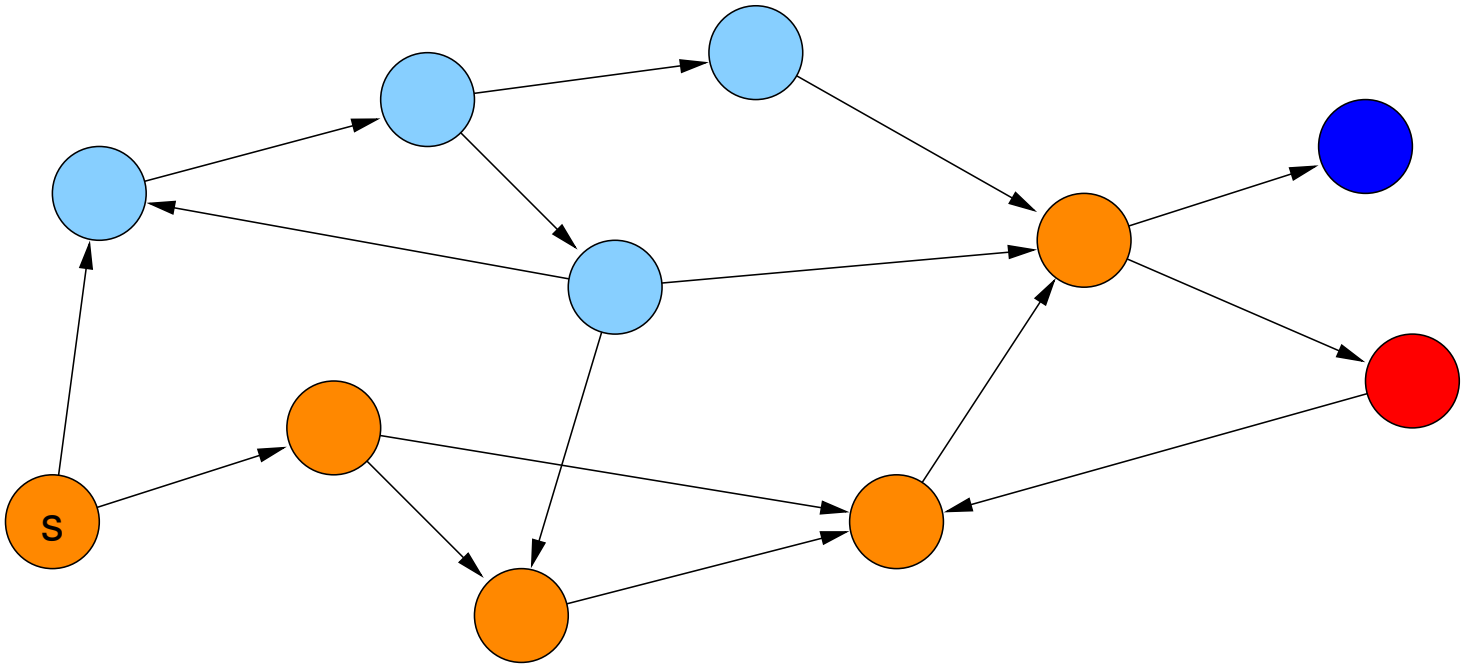
Tiefensuche



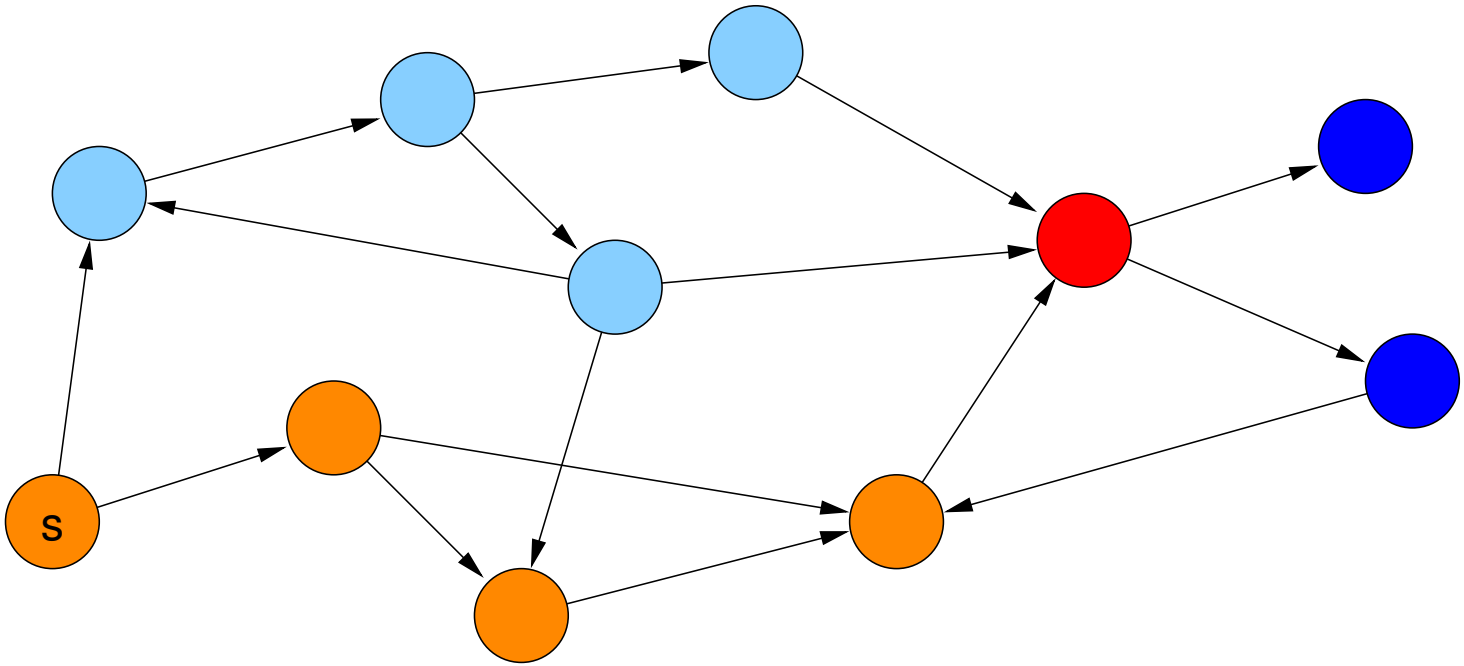
Tiefensuche



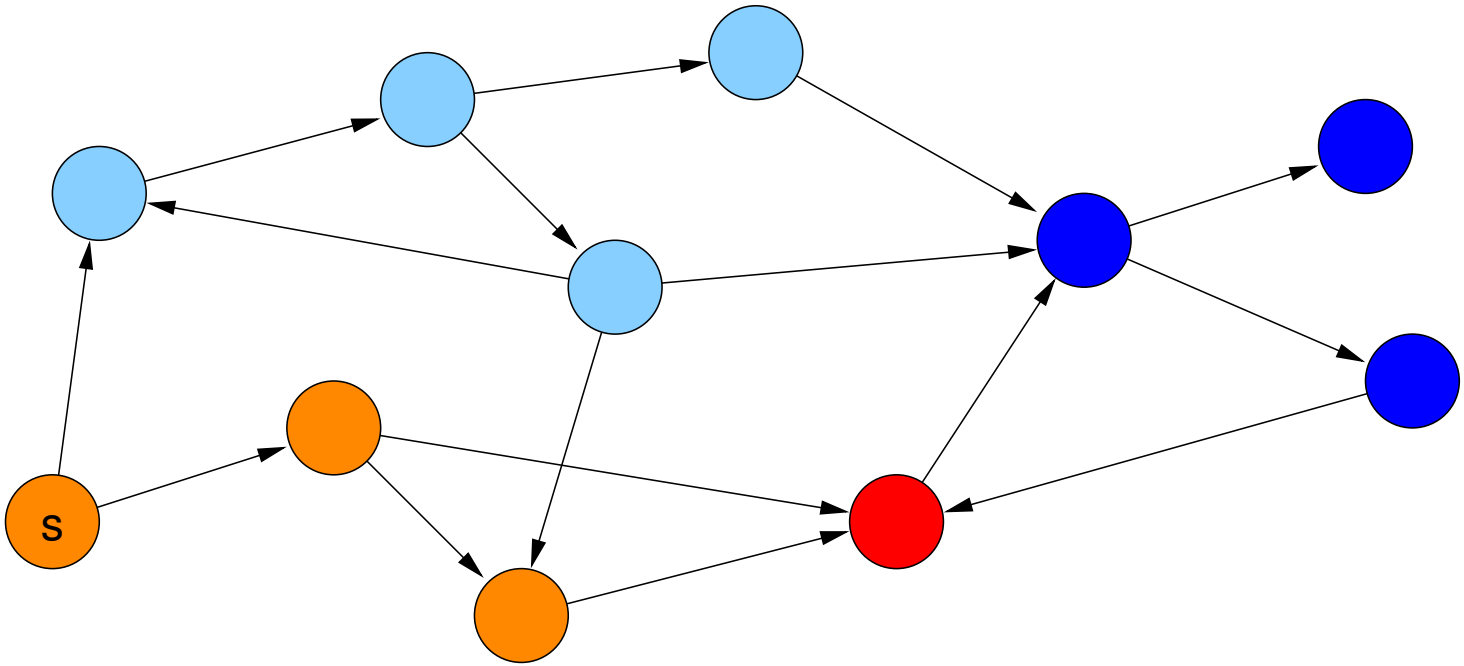
Tiefensuche



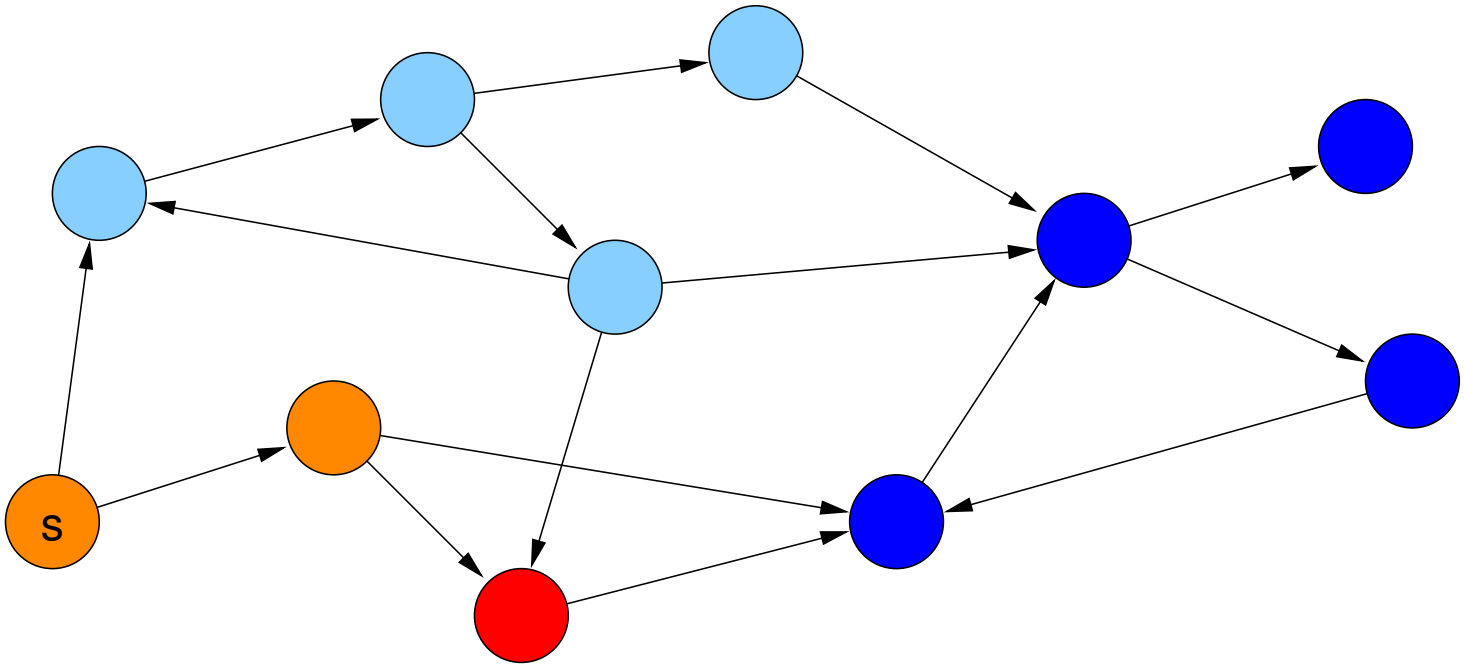
Tiefensuche



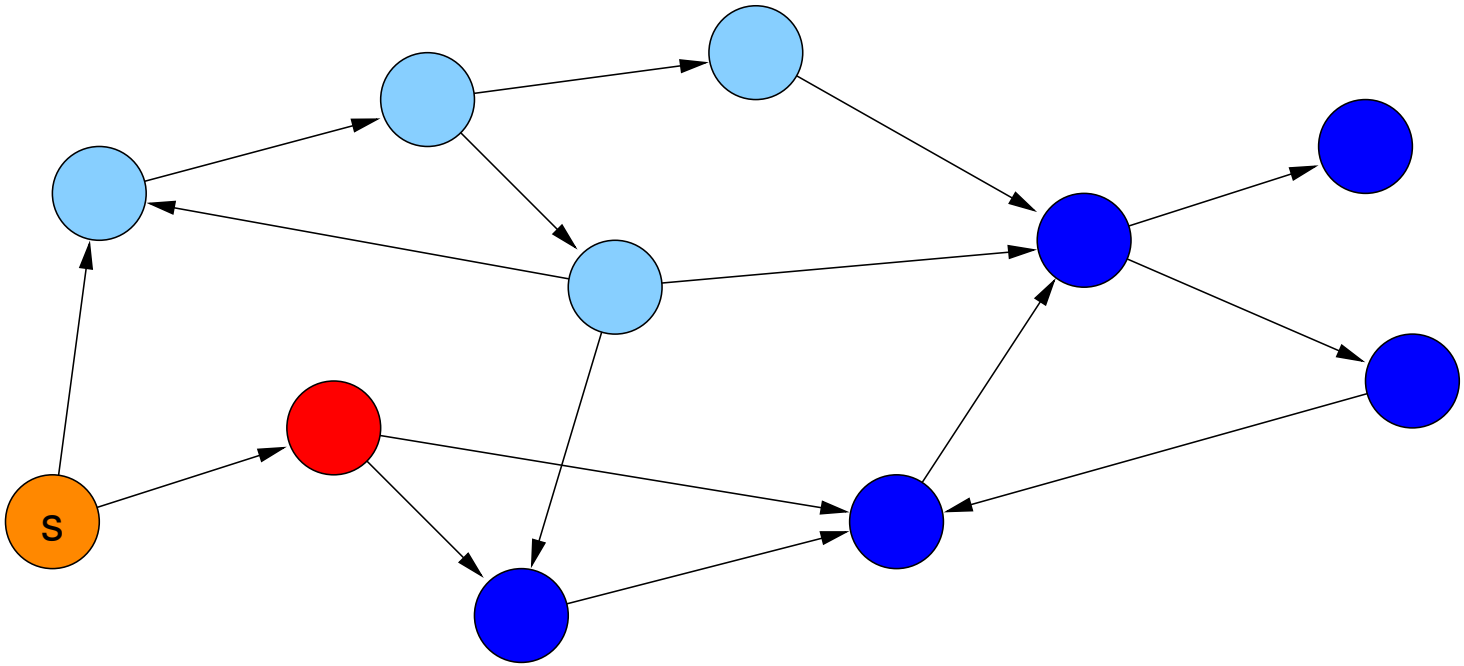
Tiefensuche



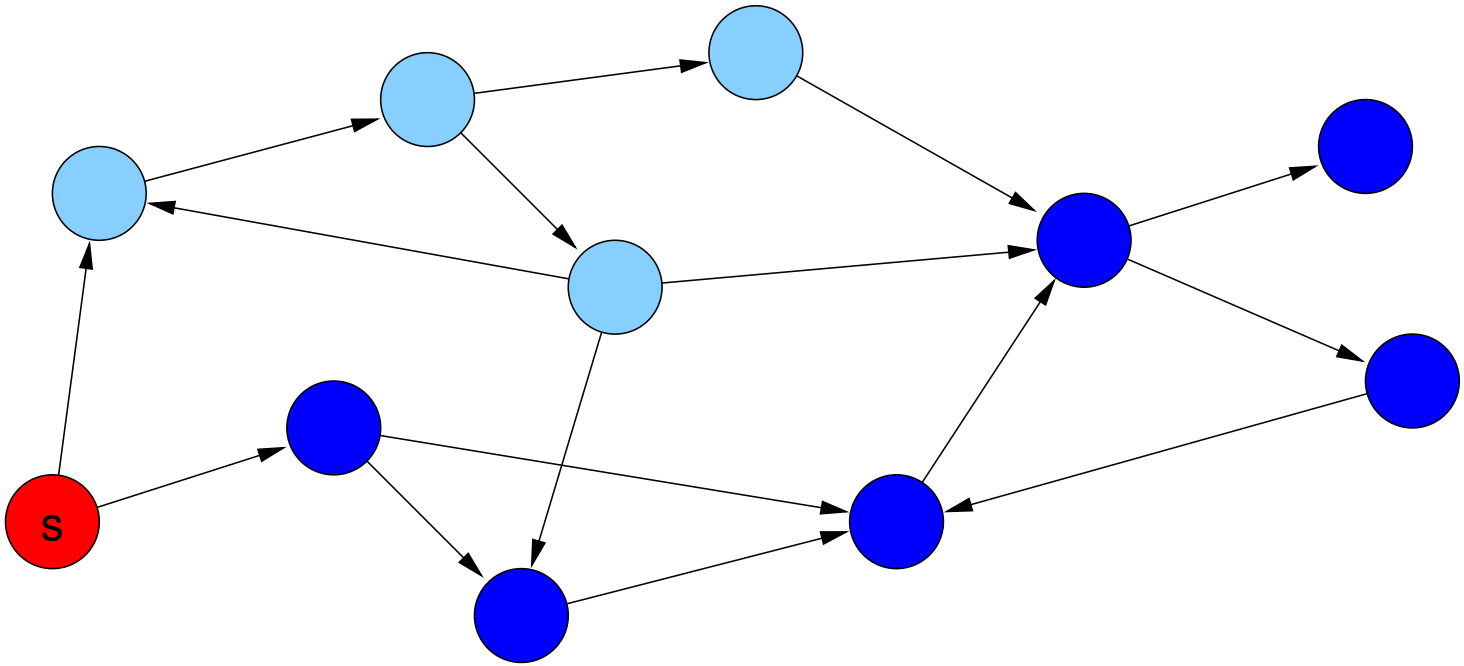
Tiefensuche



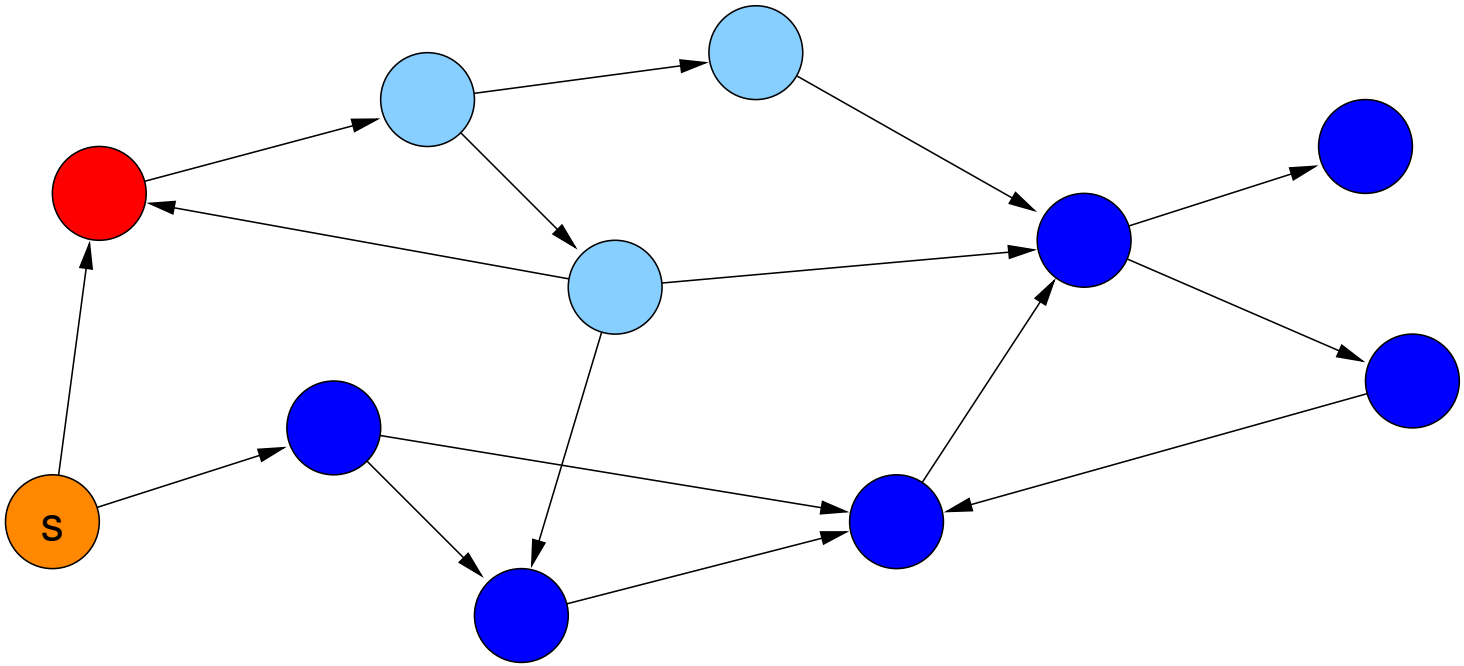
Tiefensuche



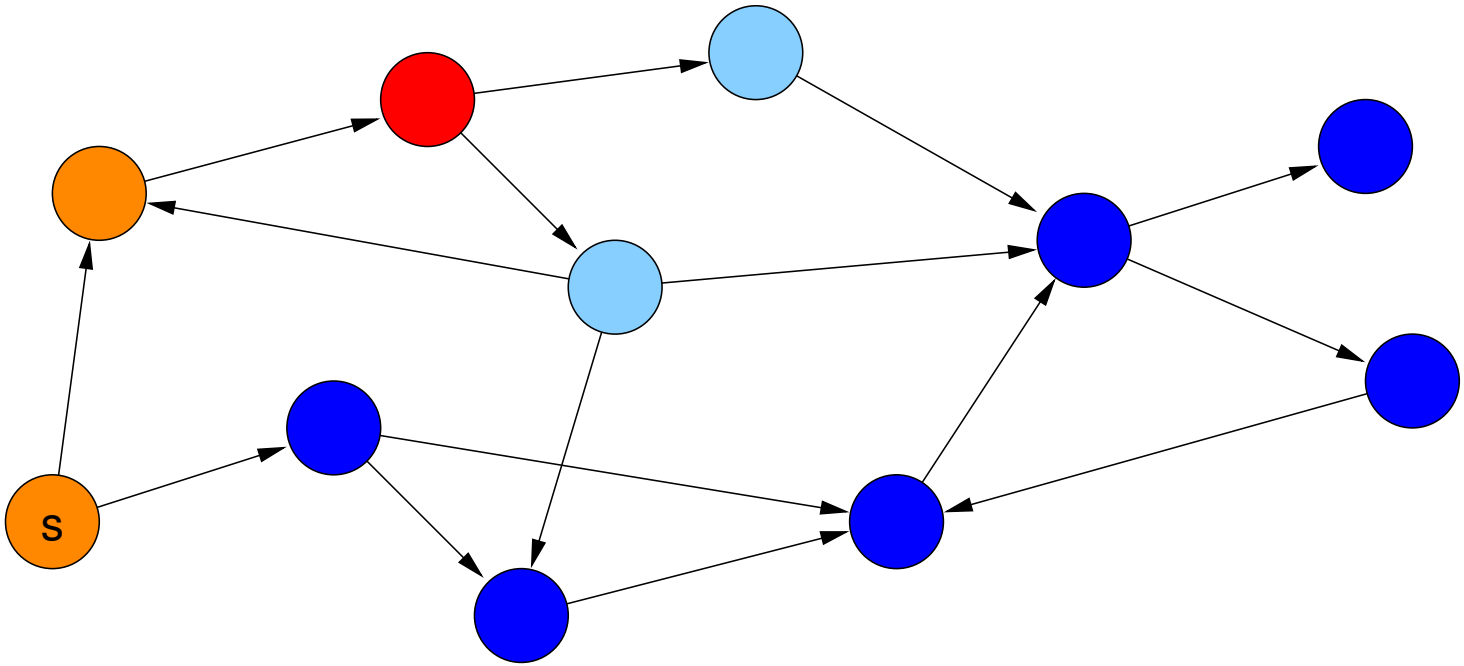
Tiefensuche



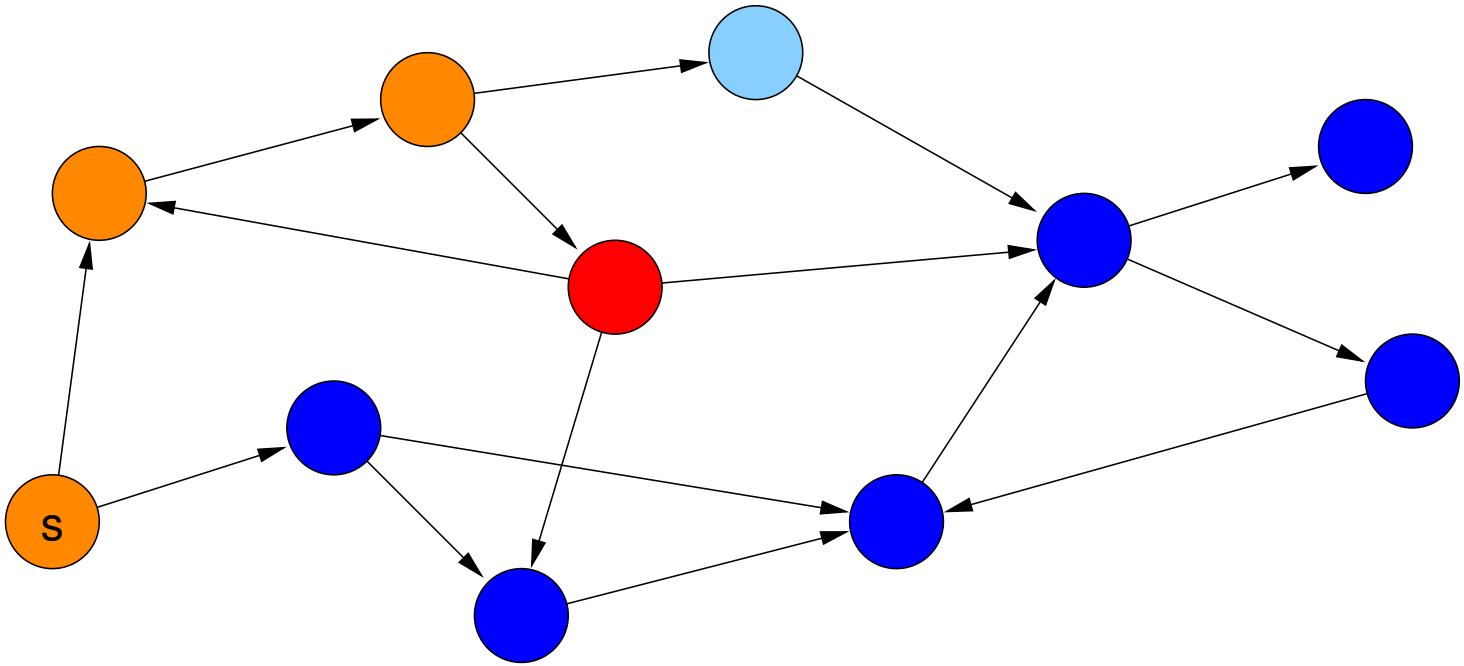
Tiefensuche



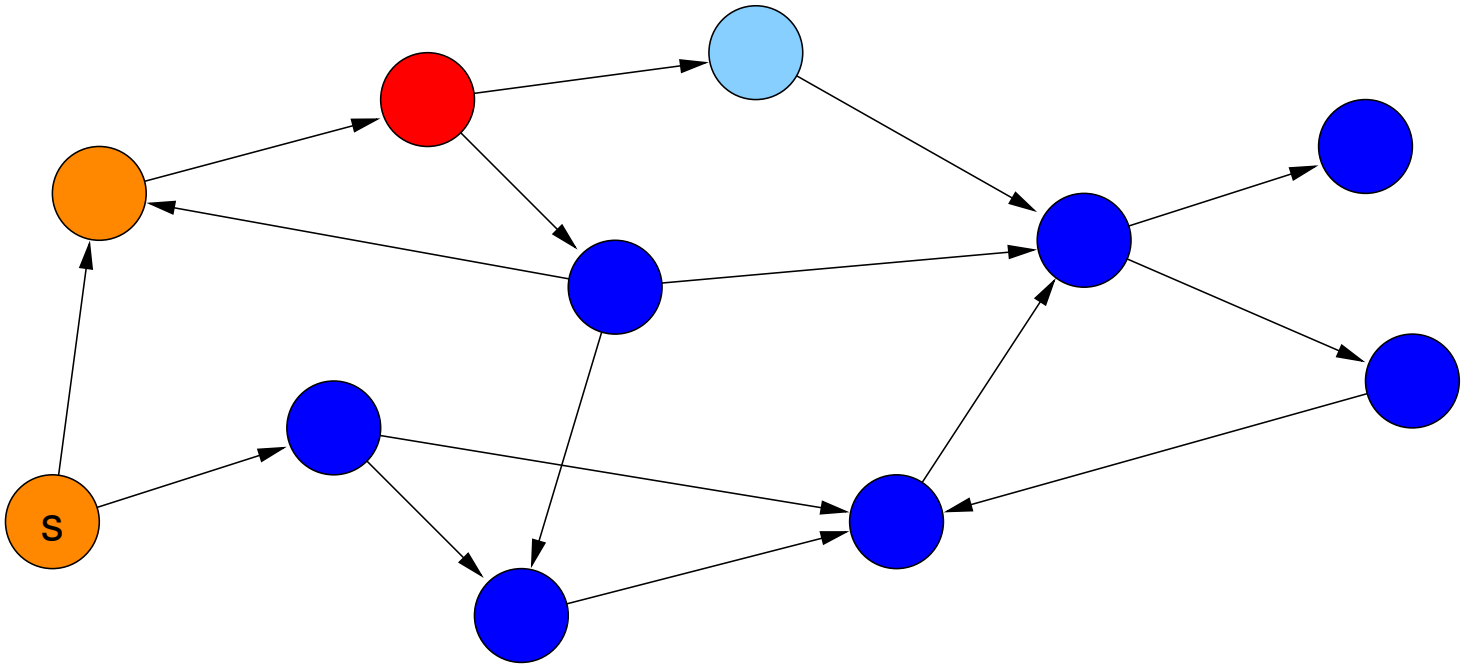
Tiefensuche



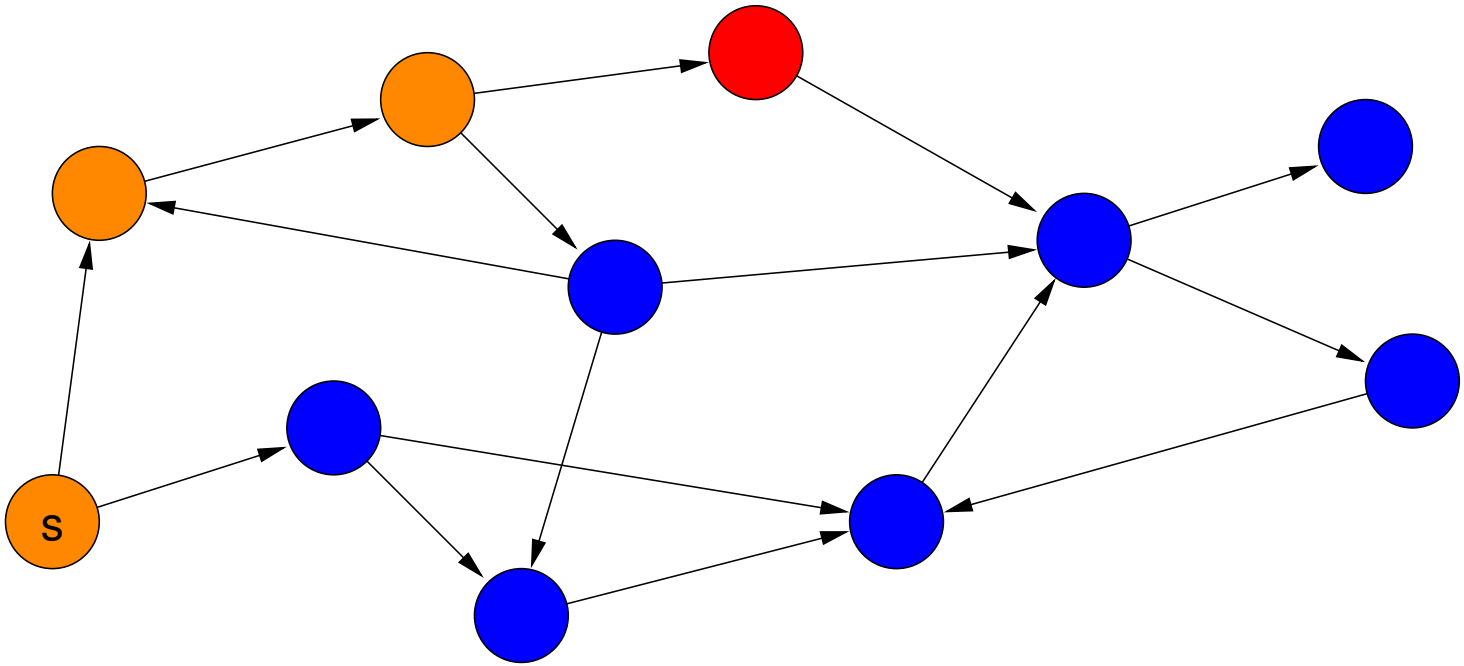
Tiefensuche



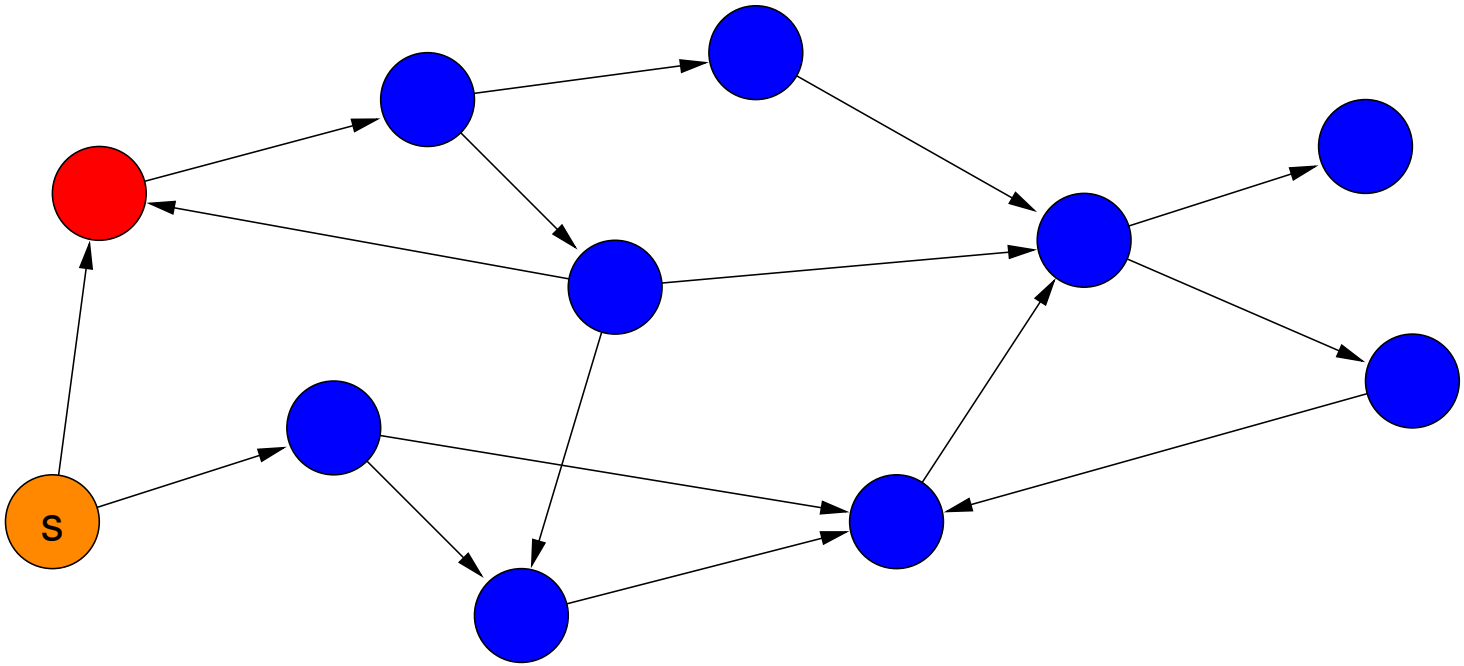
Tiefensuche



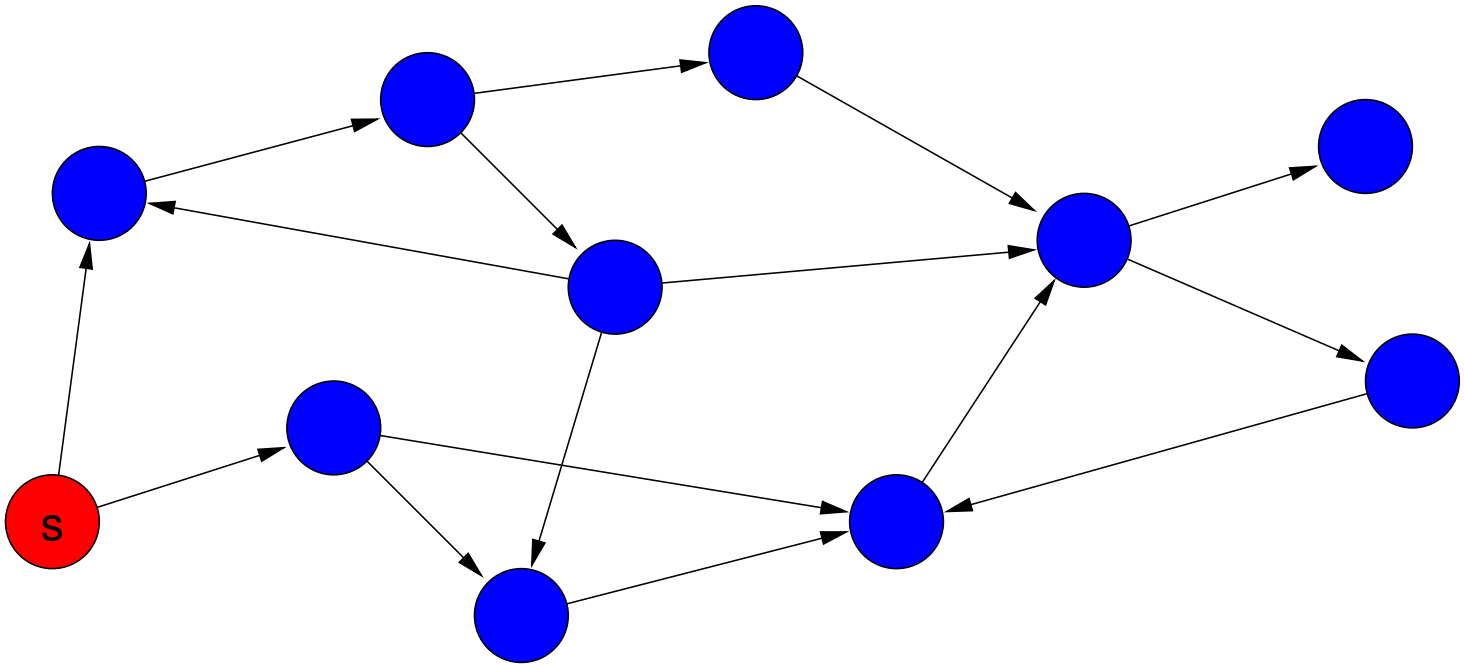
Tiefensuche



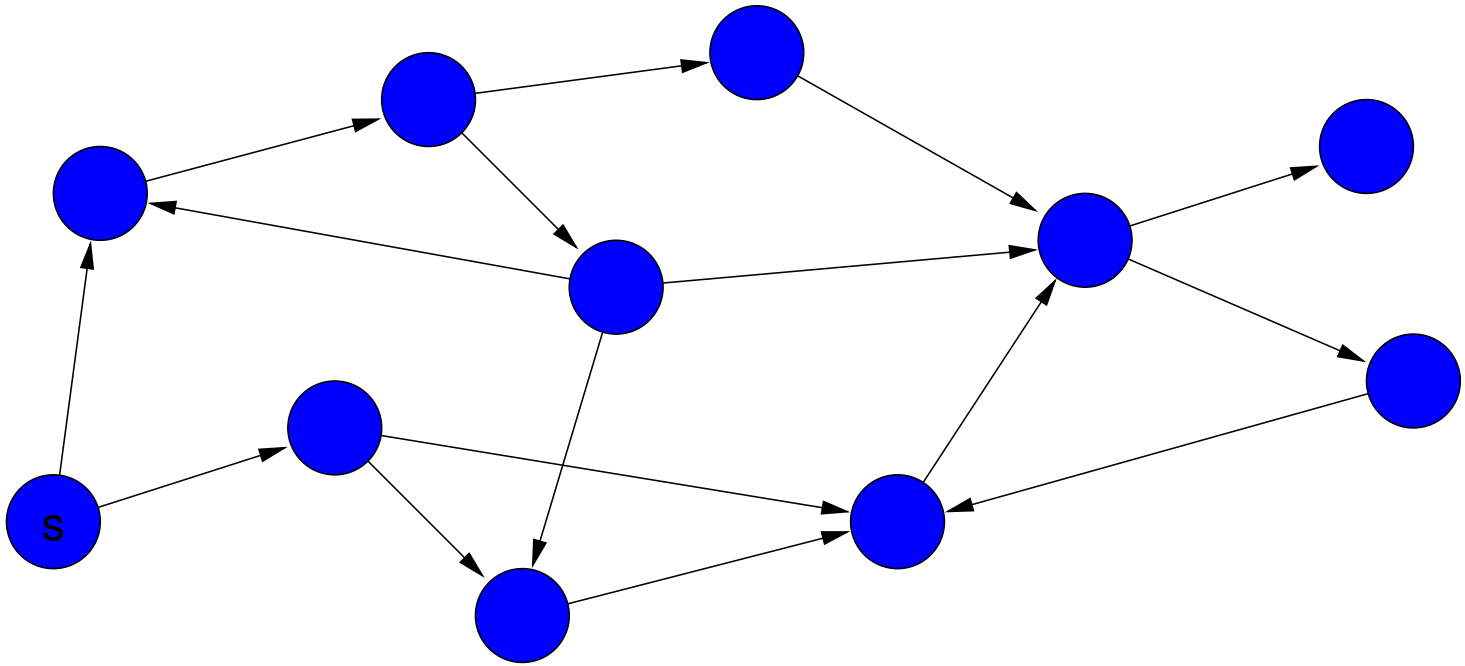
Tiefensuche



Tiefensuche



Tiefensuche



Tiefensuche

Übergeordnete Methode (falls nicht alle Knoten erreicht werden)

```
alle Knoten nicht markiert;
init();
foreach (s ∈ V)
   if (s nicht markiert) {
      markiere s;
      root(s);
      DFS(s,s);
   }
```

Tiefensuche

```
void DFS(Node u, Node v) {
   foreach ((v, w) ∈ E)
      if (is_marked(w))
         traverseNonTreeEdge(v,w);
      else {
         traverseTreeEdge(v,w);
         mark(w);
         DFS(v,w);
      }
   backtrack(u,v);
}
```

Tiefensuche

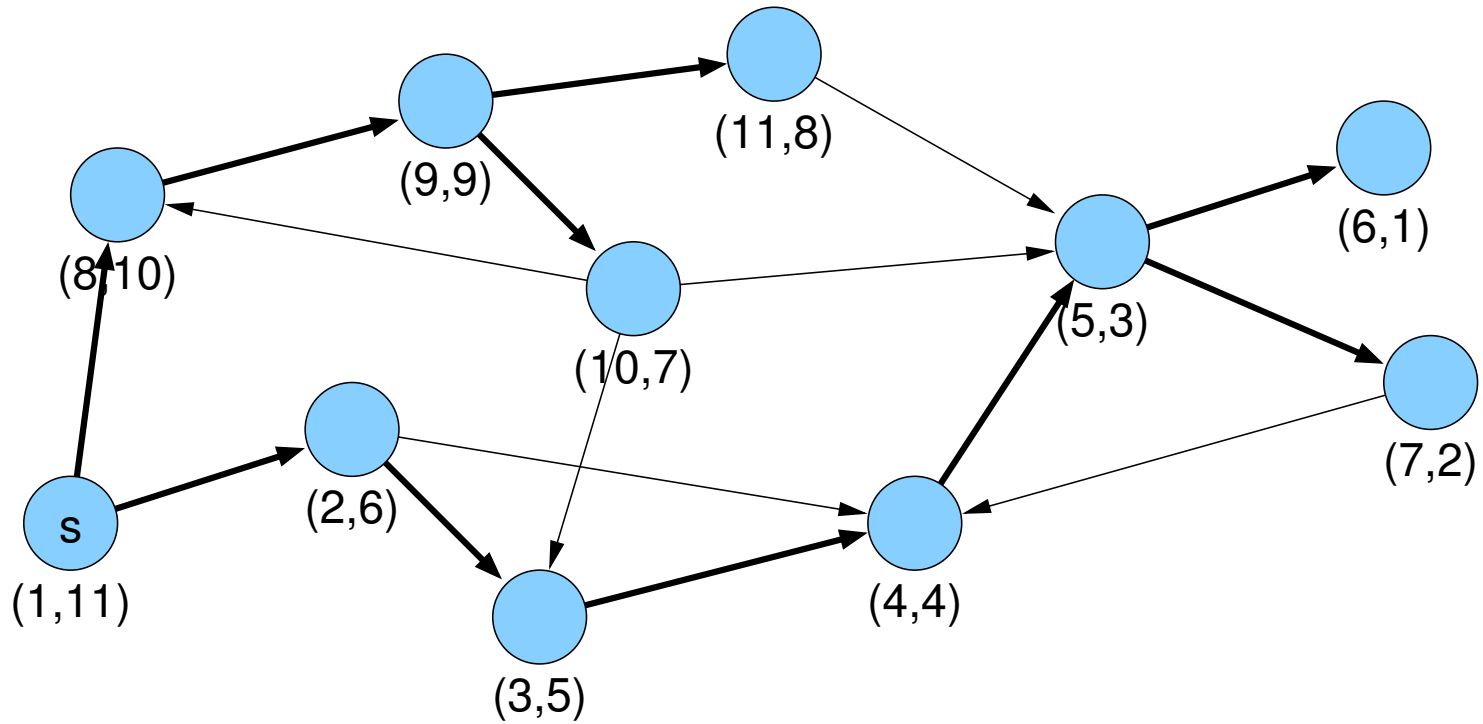
Variablen:

- int[] dfsNum; // Explorationsreihenfolge
- int[] finishNum; // Fertigstellungsreihenfolge
- int dfsCount, finishCount; // Zähler

Methoden:

- void init() { dfsCount = 1; finishCount = 1; }
- void root(Node s) { dfsNum[s] = dfsCount; dfsCount++; }
- void traverseTreeEdge(Node v, Node w)
  { dfsNum[w] = dfsCount; dfsCount++; }
- void traverseNonTreeEdge(Node v, Node w) { }
- void backtrack(Node u, Node v)
  { finishNum[v] = finishCount; finishCount++; }

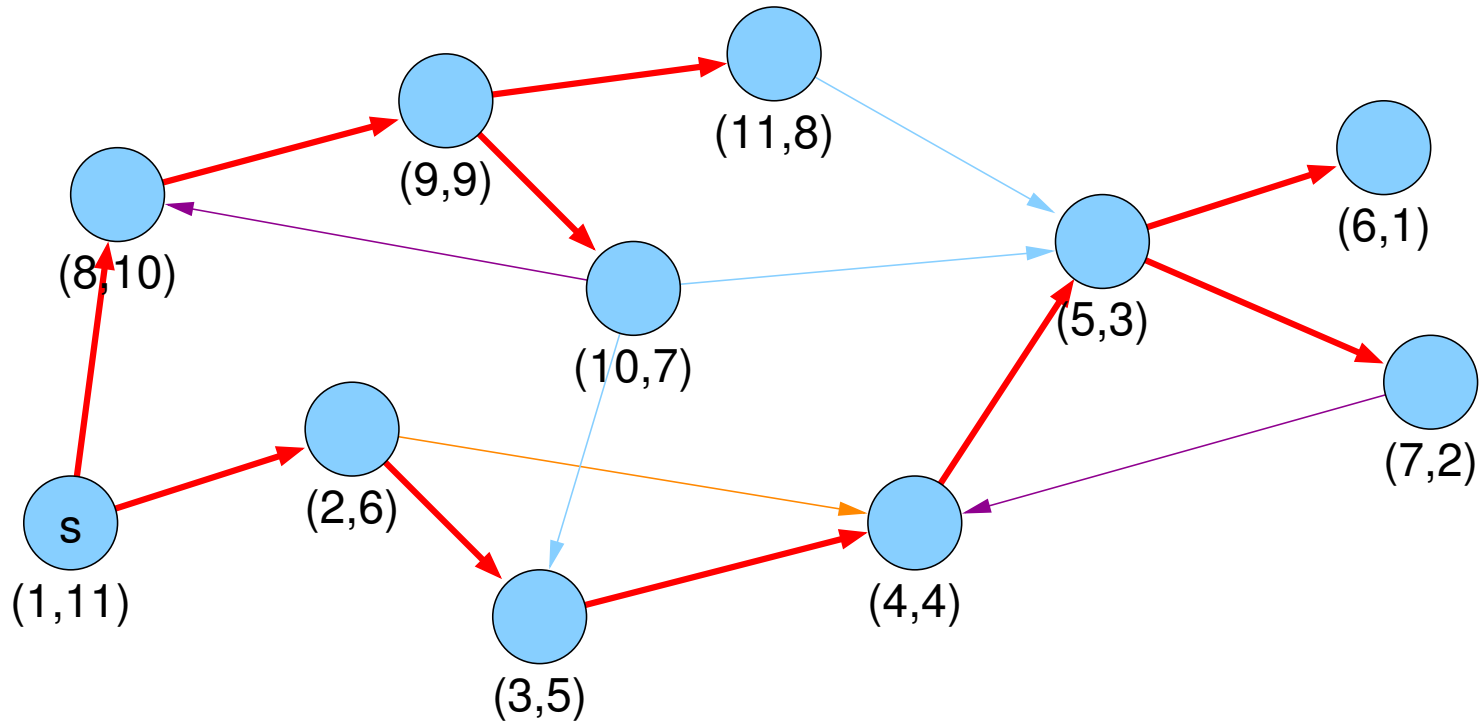
Tiefensuche



DFS-Nummerierung

Kantentypen:

- Baumkanten: zum Kind
- Vorwärtskanten: zu einem Nachfahren
- Rückwärtskanten: zu einem Vorfahren
- Kreuzkanten: sonstige



DFS-Nummerierung

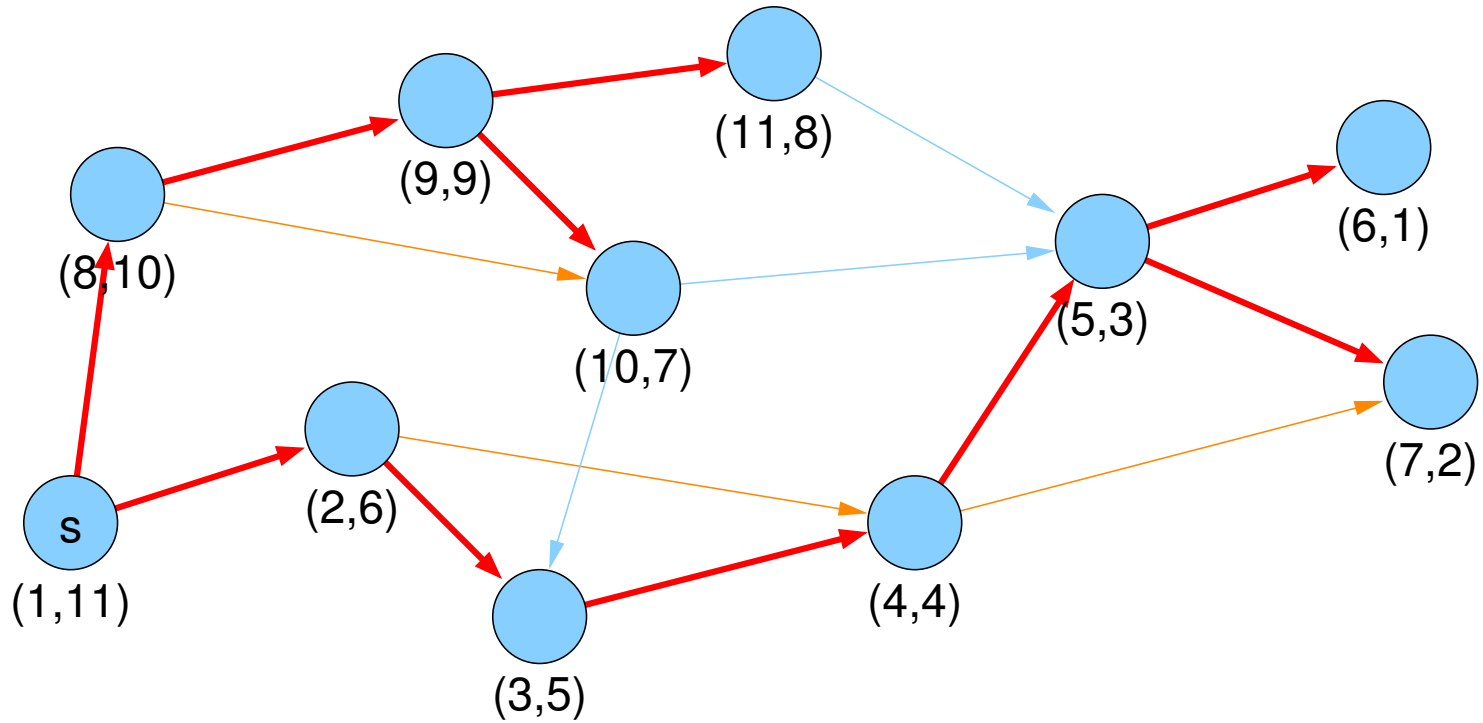
Beobachtung für Kante (v, w):

Kantentyp	dfsNum[v] $<$ dfsNum[w]	finishNum[v] $>$ finishNum[w]
Baum & Vorwärts	ja	ja
Rückwärts	nein	nein (umgekehrt)
Kreuz	nein	ja

DFS-Nummerierung

Anwendung:

- Erkennung von azyklischen gerichteten Graphen (engl. directed acyclic graph / DAG)



- keine gerichteten Kreise

DFS-Nummerierung

Lemma

Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. *Graph G ist ein DAG.*
2. *DFS in G enthält keine Rückwärtskante.*
3. $\forall (v, w) \in E : finishNum[v] > finishNum[w]$

Beweis.

- (2)⇒(3): wenn (2), dann gibt es nur Baum-, Vorwärts- und Kreuzkanten
  Für alle gilt (3)
- (3)⇒(2): für Rückwärtskanten gilt sogar die umgekehrte Relation finishNum[v]<finishNum[w]
  wenn (3), dann kann es also keine Rückwärtskanten geben (2)

...

DFS-Nummerierung

Lemma

Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. *Graph G ist ein DAG.*
2. *DFS in G enthält keine Rückwärtskante.*
3. $\forall (v,w) \in E : \mathit{finishNum}[v] > \mathit{finishNum}[w]$

Beweis.

- $\neg(2) \Rightarrow \neg(1)$: wenn Rückwärtskante (v,w) existiert, gibt es einen gerichteten Kreis ab Knoten w (und G ist kein DAG)
- $\neg(1) \Rightarrow \neg(2)$: wenn es einen gerichteten Kreis gibt, ist mindestens eine von der DFS besuchte Kante dieses Kreises eine Rückwärtskante (Kante zu einem schon besuchten Knoten, dieser muss Vorfahr sein)

□

Zusammenhang in Graphen

Definition

Ein ungerichteter Graph heißt zusammenhängend, wenn es von jedem Knoten einen Pfad zu jedem anderen Knoten gibt.

Ein maximaler zusammenhängender induzierter Teilgraph wird als Zusammenhangskomponente bezeichnet.

Die Zusammenhangskomponenten eines ungerichteten Graphen können mit DFS oder BFS in $\mathcal{O}(n+m)$ bestimmt werden.

Knoten-Zweifachzusammenhang

Definition

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt 2-fach zusammenhängend (oder genauer gesagt 2-*knoten*zusammenhängend), falls

- $|V| > 2$ und
- für jeden Knoten $v \in V$ der Graph $G - \{v\}$ zusammenhängend ist.

Artikulationsknoten und Blöcke

Definition

Ein Knoten v eines Graphen G heißt Artikulationsknoten (engl. *cut-vertex*), wenn sich die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von G durch das Entfernen von v erhöht.

Definition

Die Zweifachzusammenhangskomponenten eines Graphen sind die maximalen Teilgraphen, die 2-fach zusammenhängend sind.

Ein Block ist ein maximaler zusammenhängender Teilgraph, der keinen Artikulationsknoten enthält. D.h. die Menge der Blöcke besteht aus den Zweifachzusammenhangskomponenten, den Brücken (engl. *cut edges*), sowie den isolierten Knoten.

Blöcke und DFS

Modifizierte DFS nach R. E. Tarjan:

- `num`$[v]$: DFS-Nummer von v
- `low`$[v]$: minimale Nummer `num`$[w]$ eines Knotens w, der von v aus über beliebig viele (≥ 0) Baumkanten abwärts, evt. gefolgt von einer einzigen Rückwärtskante erreicht werden kann

- `low`$[v]$: Minimum von
  - `num`$[v]$
  - `low`$[w]$, wobei w ein Kind von v im DFS-Baum ist (Baumkante)
  - `num`$[w]$, wobei $\{v, w\}$ eine Rückwärtskante ist

Blöcke und DFS

Lemma

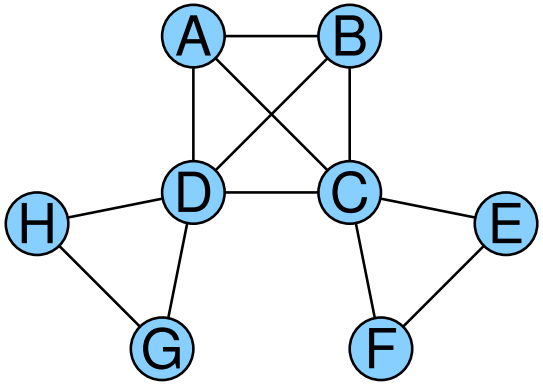
Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, zusammenhängender Graph und T ein DFS-Baum in G.

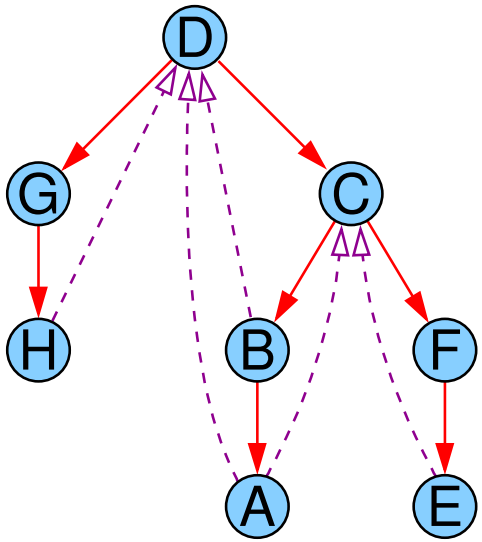
Ein Knoten $a \in V$ ist genau dann ein Artikulationsknoten, wenn

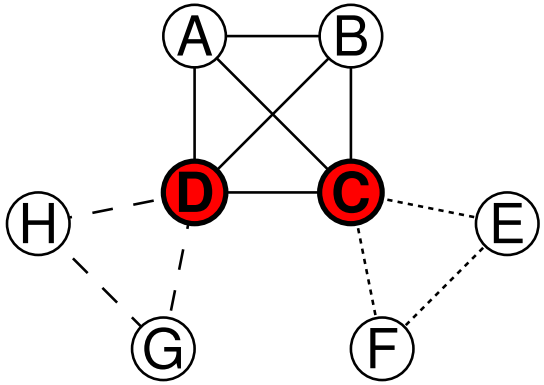
- *a die Wurzel von T ist und mindestens 2 Kinder hat, oder*
- *a nicht die Wurzel von T ist und es ein Kind b von a mit $\mathtt{low}[b] \geq \mathtt{num}[a]$ gibt.*

Blöcke und DFS

Die Kanten werden auf einem Stack gesammelt und nach der Erkennung eines Artikulationsknotens wird der gesamte Block abgepflückt.







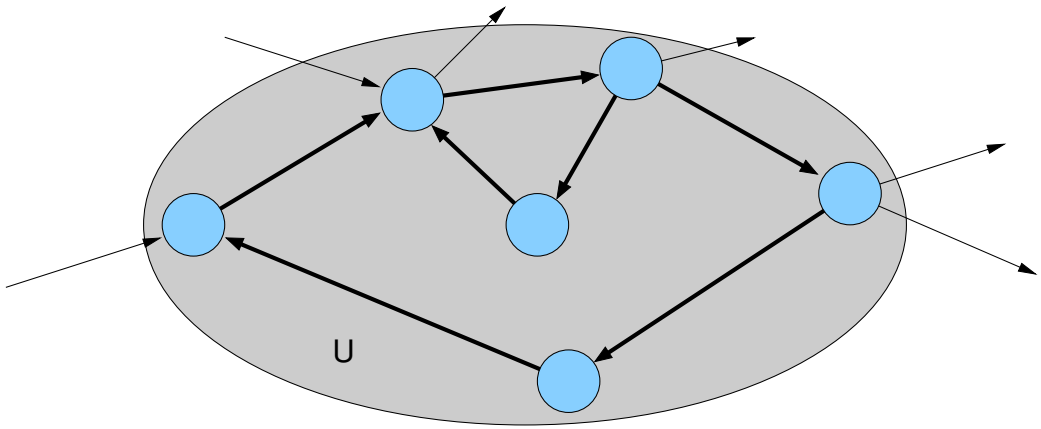
Starke Zusammenhangskomponenten

Definition

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph.

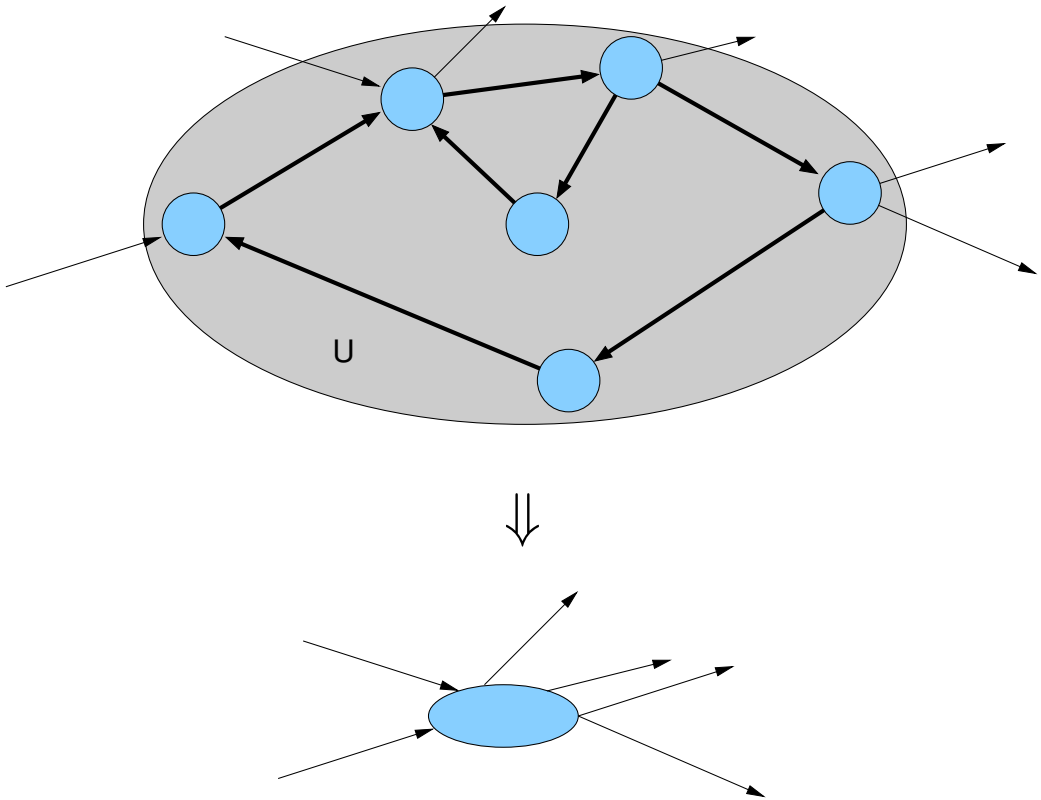
$U \subseteq V$ heißt stark zusammenhängend genau dann, wenn für alle $u, v \in U$ ein gerichteter Pfad von u nach v in G existiert

$U \subseteq V$ heißt starke Zusammenhangskomponente (ZHK) von G, wenn U stark zusammenhängend und (inklusions-)maximal ist



Starke Zusammenhangskomponenten

Beobachtung:
Schrumpft man alle starken Zusammenhangskomponenten zu einzelnen Knoten, ergibt sich ein DAG.



Starke Zhk. und DFS / Variante 1

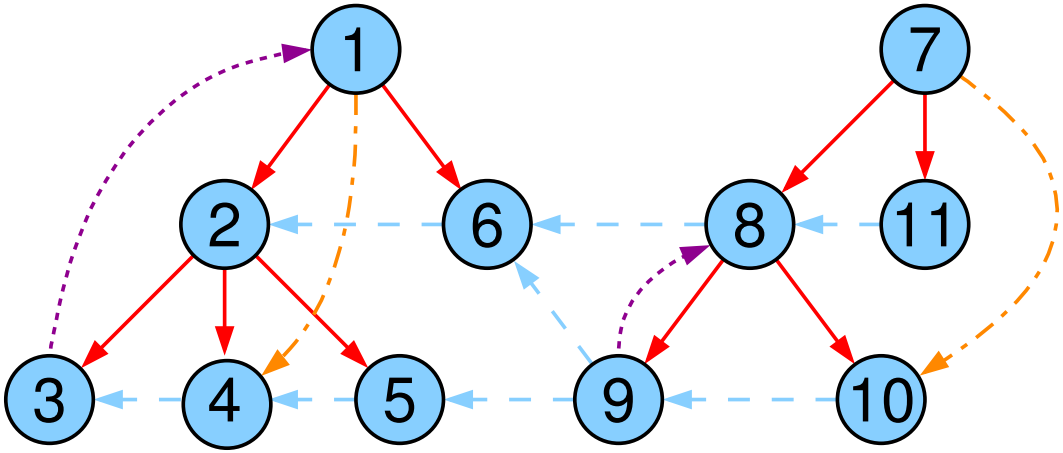
Modifizierte DFS nach R. E. Tarjan:

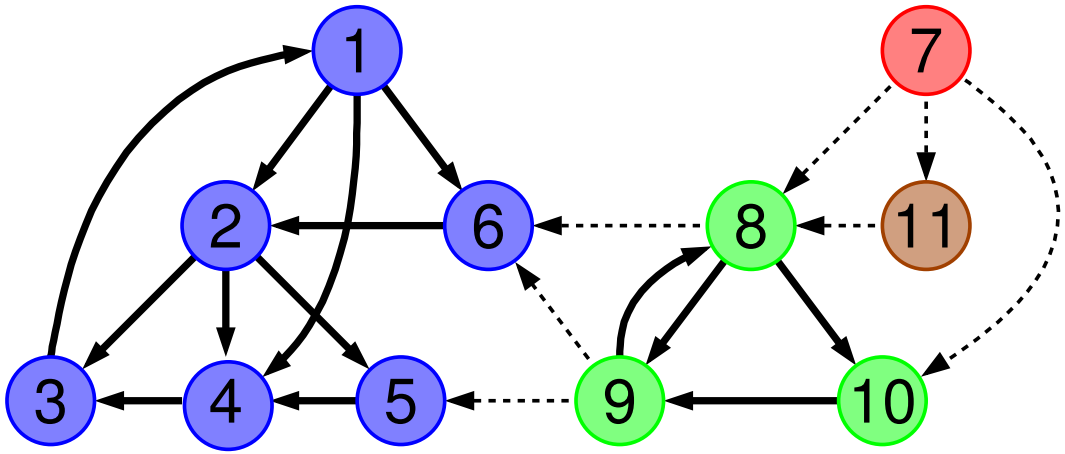
- `num`$[v]$: DFS-Nummer von v
- `low`$[v]$: minimale Nummer `num`$[w]$ eines Knotens w, der von v aus über beliebig viele (≥ 0) Baumkanten abwärts, evt. gefolgt von einer einzigen Rückwärtskante oder einer Querkante zu einer ZHK, deren Wurzel echter Vorfahre von v ist, erreicht werden kann

- `low`$[v]$: Minimum von
  - `num`$[v]$
  - `low`$[w]$, wobei w ein Kind von v im DFS-Baum ist (Baumkante)
  - `num`$[w]$, wobei $\{v, w\}$ eine Rückwärtskante ist
  - `num`$[w]$, wobei $\{v, w\}$ eine Querkante ist und die Wurzel der starken Zusammenhangskomponente von w ist Vorfahre von v

Starke Zusammenhangskomponenten

- Knoten v ist genau dann Wurzel einer starken Zusammenhangskomponente, wenn $\texttt{num}[v]=\texttt{low}[v]$





Starke Zhk. und DFS / Variante 2

Prinzip:

- Unterscheidung in fertige / unfertige Knoten
- Zusammenhangskomponente heißt geschlossen, falls sie nur fertige Knoten enthält, ansonsten heißt sie offen
- Knoten in geschlossenen Komponenten heißen geschlossen, sonst offen
- Repräsentant einer ZHK ist der Knoten mit der kleinsten dfsNum

Starke Zhk. und DFS / Variante 2

Beobachtungen (Invarianten):

- geschlossene Knoten sind immer fertig,
  offene Knoten können fertig oder (noch) aktiv sein
- Kanten von geschlossenen Knoten führen immer zu geschlossenen Knoten
- Der Pfad vom Startknoten zum aktuellen Knoten enthält die Repräsentanten aller offenen ZHKs.
- Betrachtet man die Knoten in offenen ZHKs sortiert nach DFS-Nummern, so partitionieren die Repräsentanten diese Folge in die offenen ZHKs.

Starke Zhk. und DFS / Variante 2

Prinzip: betrachte Kante $e = (v, w)$

- Kante zu schon bekanntem Knoten w in offener ZHK (Rückwärts-/Querkante):
  falls v und w momentan noch in unterschiedlichen ZHKs liegen, müssen diese zusammen mit allen ZHKs dazwischen zu einer einzigen ZHK verschmolzen werden

  bei Vorwärtskanten ist nichts zu tun
- Kante zu Knoten w in geschlossener ZHK (Querkante):
  von w gibt es keinen Weg zu v, sonst wäre die ZHK von w noch nicht geschlossen, also bleiben die ZHKs unverändert
- Kante zu unbekanntem Knoten w (Baumkante):
  neue ZHK für w

Wenn Knoten keine ausgehenden Kanten mehr hat:

- Knoten fertig
- wenn Knoten Repräsentant seiner ZHK ist, dann ZHK schließen

Starke Zhk. und DFS / Variante 2

2. Variante:

- Verwaltung der unfertigen Knoten in Stack oNodes
  (in Reihenfolge steigender dfsNum)
- Verwaltung der Repräsentanten der offenen ZHKs in Stack oReps

Starke Zhk. und DFS / Variante 2

- void init() {
  component = new int[n];
  oReps = ⟨ ⟩;
  oNodes = ⟨ ⟩;
  dfsCount = 1;
  }

- void root(Node w) / traverseTreeEdge(Node v, Node w) {
  oReps.push(w); // Repräsentant einer neuen ZHK
  oNodes.push(w); // neuer offener Knoten
  dfsNum[w] = dfsCount;
  dfsCount++;
  }

Starke Zhk. und DFS / Variante 2

- void traverseNonTreeEdge(Node v, Node w) {
  if (w ∈ oNodes) // verschmelze ZHKs
  while (dfsNum[w] < dfsNum[oReps.top()])
  oReps.pop();
  }

- void backtrack(Node u, Node v) {
  if (v == oReps.top()) { // v Repräsentant?
  oReps.pop(); // ja: entferne v
  do { // und offene Knoten bis v
  w = oNodes.pop();
  component[w] = v;
  } while (w!=v);
  }
  }

Starke Zhk. und DFS / Variante 2

Zeit: $\mathcal{O}(n+m)$

Begründung:

- init, root: $\mathcal{O}(1)$
- traverseTreeEdge: $(n-1) \times \mathcal{O}(1)$
- backtrack, traverseNonTreeEdge:
  da jeder Knoten höchstens einmal in oReps und oNodes landet,
  insgesamt $\mathcal{O}(n+m)$
- DFS-Gerüst: $\mathcal{O}(n+m)$
- gesamt: $\mathcal{O}(n+m)$

Übersicht

Zentralitätsindizes

- Manche Elemente in Netzwerken (Knoten / Kanten in Graphen) sind wichtiger, zentraler oder einflussreicher als andere.
- Zentralitätsmaße bzw. -indizes (kurz Zentralitäten) quantifizieren diese Eigenschaften durch skalare Werte.
- Es gibt jedoch kein universelles Zentralitätsmaß, das jeder Anwendung gerecht wird.

  $\Rightarrow$ 'richtiges' Maß hängt vom Kontext der Anwendung ab

Beispiel: Wahl eines Klassensprechers

Variante 1:

- Knoten entsprechen Personen
- Kante von Knoten A nach B, wenn Person A für Person B stimmt

- Person ist zentraler, je höher die Anzahl der erhaltenen Stimmen ist

$\Rightarrow$ in-degree centrality

Beispiel: Wahl eines Klassensprechers

Variante 2:

- Knoten entsprechen Personen
- Kante von Knoten A nach B, wenn Person A Person B überzeugt hat, für seinen/ihren Favoriten zustimmen
- Einfluss-Netzwerk

- Person ist zentraler, je mehr diese Person gebraucht wird, um die Meinung anderer zu transportieren

$\Rightarrow$ betweenness centrality

Beispiel: Wahl eines Klassensprechers

Variante 3:

- Knoten entsprechen Personen
- Kante von Knoten A nach B, wenn Person A mit Person B befreundet ist

- Person ist zentraler, je mehr Freunde diese Person hat und je zentraler diese Freunde sind

$\Rightarrow$ feedback centrality

Kantenzentralität

Ebenso kann man auch die Wichtigkeit / Zentralität von Beziehungen in Netzwerken (Kanten in Graphen) betrachten.

Beispiel: Internet

- Backbone: Verbindungen zwischen den Kontinenten gibt es wenige und sie müssen eine große Kapazität haben

Arten von Kantenzentralität / Beispiele:

- Beteiligung einer Kante an kürzesten Wegen usw.
  $\Rightarrow$ betweenness edge centrality

- Veränderung von Netzwerk-Parametern durch Löschen der Kante
  $\Rightarrow$ edge vitality (Bsp. flow betweenness vitality)

Definition: Zentralitätsindex

Abgesehen von der Intuition

- Wichtigkeit,
- Prestige,
- Einfluss,
- Kontrolle,
- Unentbehrlichkeit

gibt es keine allgemeingültige (formale) Definition von Zentralität.

Mindestanforderung:
Das Maß darf nur von der Struktur des Graphen abhängen.

Werte sollen zumindest eine Ordnung der Elemente liefern, auch wenn die numerischen Werte, Abstände oder Verhältnisse evt. nicht viel aussagen.

Graph-Isomorphie

Definition (Isomorphie)

Zwei Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ sind isomorph ($G_1 \simeq G_2$), falls es eine Bijektion $\phi : V_1 \to V_2$ gibt, so dass

$$(u, v) \in E_1 \quad \Leftrightarrow \quad (\phi(u), \phi(v)) \in E_2$$

Definition (Struktureller Index)

Sei $G = (V, E)$ ein gewichteter (gerichteter oder ungerichteter) Graph und sei X die Knotenmenge (V) oder die Kantenmenge (E).
Eine reellwertige Funktion s heißt genau dann struktureller Index, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\forall x \in X : \qquad G \simeq H \quad \Rightarrow \quad s_G(x) = s_H(\phi(x))$$

Grad-Zentralität

Grad-Zentralität (degree centrality):

$$c_D(v) = \deg(v)$$

- lokales Maß,
  nur von der direkten Nachbarschaft des Knotens abhängig
- mögliche Verallgemeinerung:
  Anzahl der indirekten Nachbarn mit Abstand $\leq k$

Exzentrizität

Anwendungsbeispiel:
Positionierung eines Hospitals oder einer Feuerwehrstation

Ziel: Minimierung der maximal notwendigen Anfahrtzeit

Exzentrizität eines Knotens $v \in V$:

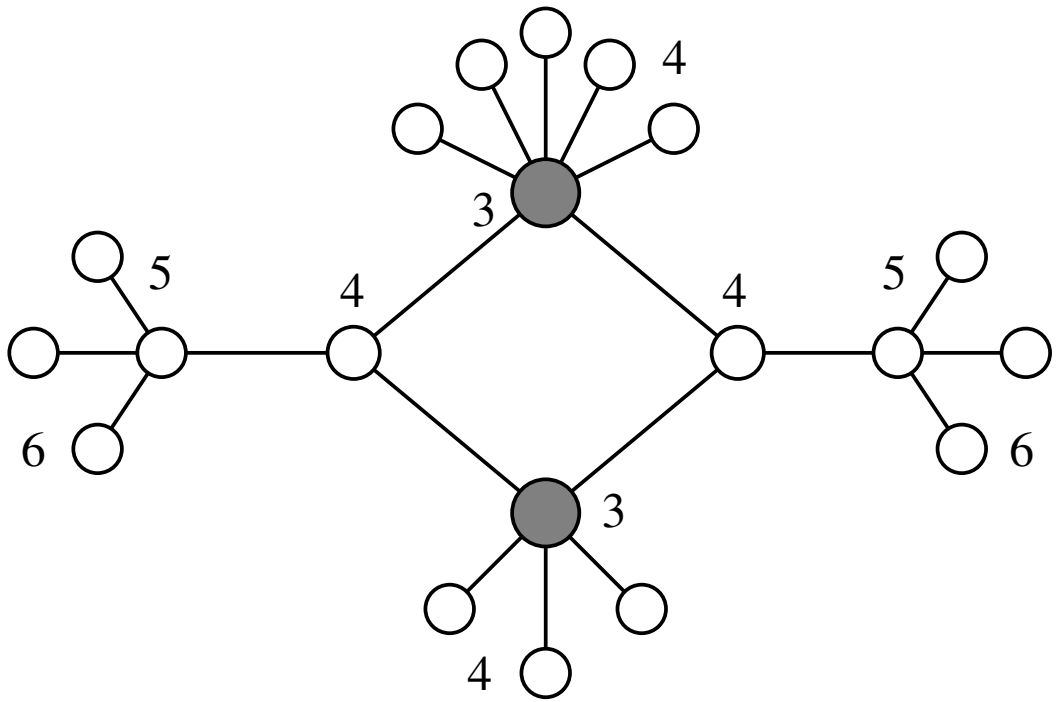
$$e(v) = \max_{w \in V} \{d(v, w)\}$$

Zentralitätsmaß:

$$c_E(v) = \frac{1}{e(v)} = \frac{1}{\max_{w \in V} \{d(v, w)\}}$$

Optimaler Standort:
Knoten v mit minimalem Wert $e(v)$ (Zentrum von G)

Exzentrizität / Beispiel



(Quelle: Brandes/Erlebach (Eds.): Network Analysis)

Closeness

Anwendungsbeispiel:
Positionierung eines Einkaufszentrums
(minisum location / median / service facility location problem)

Ziel:
Minimierung der Summe der Entfernungen zu den anderen Knoten
(und damit auch der durchschnittlichen Entfernung):

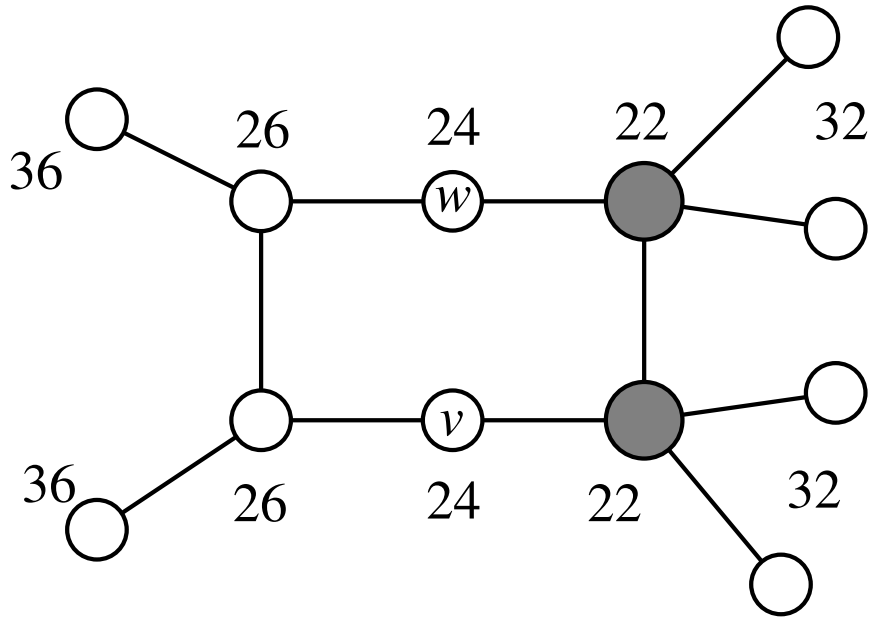
$$\sum_{v \in V} d(u, v)$$

(im Kontext von Kommunikationsnetzen auch *transmission number*)

Zentralitätsmaß:

$$c_C(v) = \frac{1}{\sum_{w \in V} d(v, w)}$$

Closeness / Beispiel



(Quelle: Brandes/Erlebach (Eds.): Network Analysis)

Graue Knoten sind am wichtigsten bezüglich Closeness,
v und w sind zentraler in Hinsicht auf Exzentrizität

Radiality

ähnlich zu Closeness

$$c_R(v) = \frac{\sum_{w \in V} d_{\max}(G) + 1 - d(v,w)}{n-1}$$

$d_{\max}(G)$: Durchmesser des Graphen
(größte Distanz zweier Knoten, nicht Länge des längsten Pfads!)

Zentroid-Wert

Konkurrenzsituation:

- Knoten repräsentieren Kunden, die beim nächstgelegenen Geschäft einkaufen
- Annahme: zwei Anbieter, der zweite Anbieter berücksichtigt bei der Standortwahl den Standort des ersten Anbieters

Fragen:

- Welchen Standort muss der erste Anbieter wählen, damit er durch den zweiten Anbieter möglichst wenig Kunden verliert?
- Ist es vorteilhaft als Erster auswählen zu können?

Zentroid-Wert

gegeben: ungerichteter zusammenhängender Graph G

$\gamma_u(v)$: die Anzahl der Knoten, deren Distanz zu u kleiner ist als zu v:

$$\gamma_u(v) = |\{w \in V : d(w,u) < d(w,v)\}|$$

Wähle Knoten u, Gegenspieler wählt Knoten v
Resultierende Anzahl Kunden:

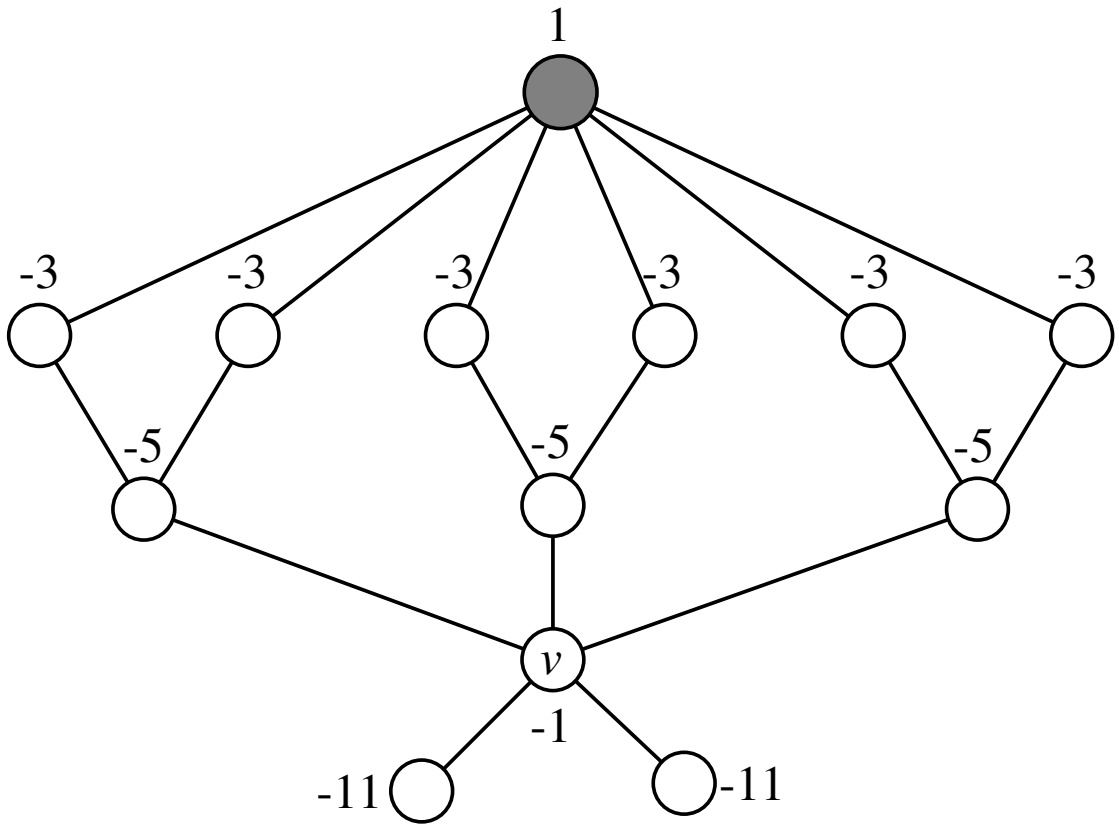
$$\Rightarrow \quad \gamma_u(v) + \frac{n - \gamma_u(v) - \gamma_v(u)}{2} = \frac{n + \gamma_u(v) - \gamma_v(u)}{2}$$

$\Rightarrow$ Gegenspieler minimiert $f(u,v) = \gamma_u(v) - \gamma_v(u)$

Zentralitätsmaß:

$$c_F(u) = \min_{v \in (V \setminus u)} \{f(u,v)\}$$

Zentroid-Wert / Beispiel 1

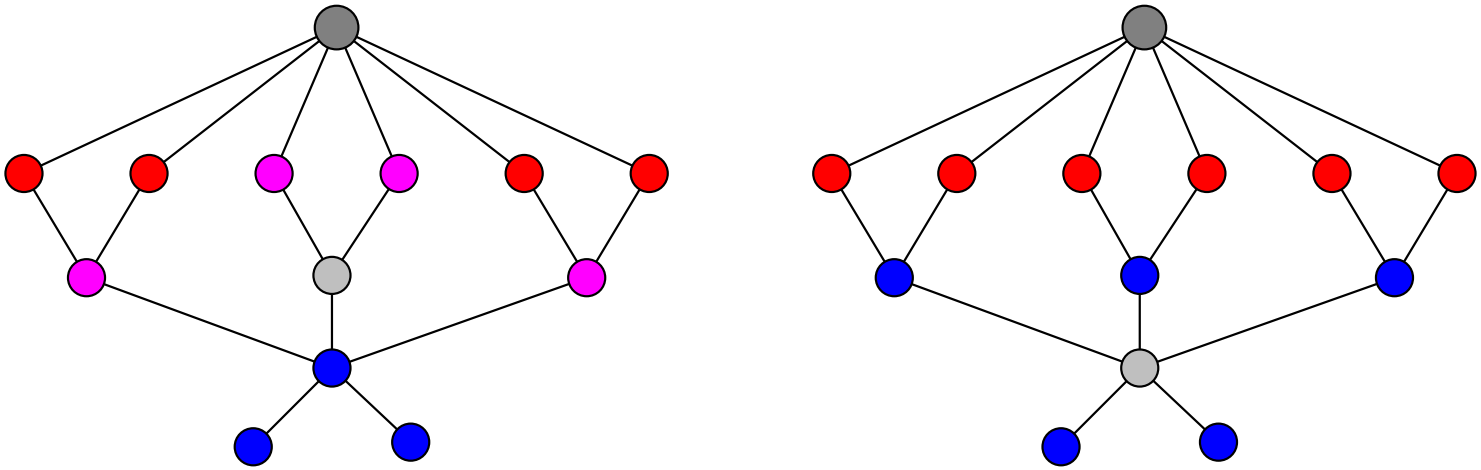


(Quelle: Brandes/Erlebach (Eds.): Network Analysis)

Der graue Knoten hat maximalen Zentroid-Wert,
aber v ist der Knoten mit maximaler Closeness.

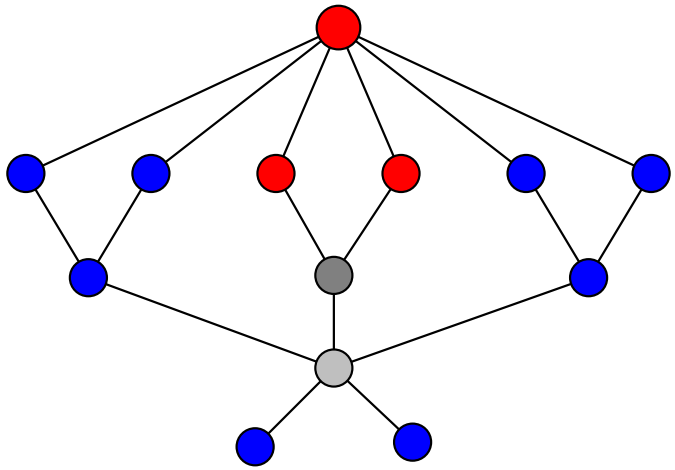
Zentroid-Wert / Beispiel 1

Beispiel-Lösungen:
optimale Auswahl des 1. Knotens (dunkelgrau)

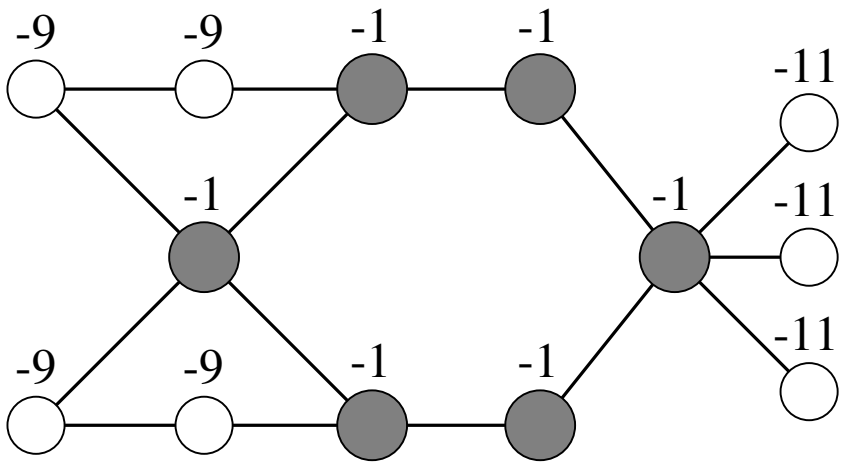


Zentroid-Wert / Beispiel 1

Beispiel-Lösungen:
nicht-optimale Auswahl des 1. Knotens (dunkelgrau)



Zentroid-Wert / Beispiel 2



(Quelle: Brandes/Erlebach (Eds.): Network Analysis)

Die grauen Knoten haben maximalen Zentroid-Wert,
aber selbst sie haben einen negativen Wert.
$\Rightarrow$ Es ist hier vorteilhaft, erst als Zweiter zu wählen.

Bemerkungen

- Exzentrizität, Closeness und Zentroid-Wert sind strukturelle Indizes.
- Die Knoten maximaler Zentralität unterscheiden sich bei den verschiedenen Maßen.
- Im Gegensatz zu Exzentrizität und Closeness kann der Zentroid-Wert negativ sein.

Knoten maximaler Zentralität

Definition

Für ein Zentralitätsmaß c sei die Menge der Knoten mit maximaler Zentralität in einem Graphen G definiert als

$$S_c(G) = \{v \in V : \forall w \in V \; c(v) \geq c(w)\}$$

Eigenschaft des Baum-Zentrums

Satz (Jordan, 1869)

Für jeden Baum T gilt, dass sein Zentrum aus genau einem oder aus zwei Knoten besteht, die miteinander benachbart sind.

Eigenschaft des Baum-Zentrums

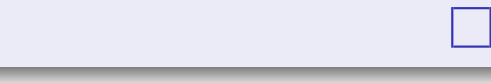
Beweis.

- Baum aus höchstens 2 Knoten $\Rightarrow$ trivial
- Für jeden Knoten v von T können nur Blätter exzentrisch sein (maximale Entfernung haben), keine inneren Knoten.

  Knoten v ist dann exzentrisch zu Knoten w, wenn $d(v, w) = e(w)$
- Betrachte nun den Baum T', der durch Entfernen aller Blätter aus T entsteht.

$\Rightarrow$ Exzentrizität jedes Knotens in T' ist um genau Eins kleiner als in T

- beide Bäume haben gleiches Zentrum (falls T' nicht leer ist)
- Fortsetzung dieses Verfahrens führt zwangsläufig zu einem Baum, der aus genau einem oder zwei adjazenten Knoten besteht



Berechnung des Baum-Zentrums

Vorangegangener Beweis impliziert einen einfachen Algorithmus zur Berechnung des Zentrums eines Baums, der nicht einmal die Berechnung der Exzentrizität der einzelnen Knoten erfordert.

Eigenschaft des Graph-Zentrums

Satz

Sei G ein zusammenhängender ungerichteter Graph.

Dann existiert ein Block (zweifach zusammenhängender Teilgraph oder Brücke, oder isolierter Knoten im Fall $n = 1$) in G, der alle Knoten des Zentrums $\mathcal{C}(G)$ enthält.

Oder anders formuliert:
Die Knoten des Graph-Zentrums befinden sich alle in einem Block.

Eigenschaft des Graph-Zentrums

Beweis.

- Annahme: Es gibt keinen Block in G, der alle Knoten des Zentrums $\mathcal{C}(G)$ enthält.

$\Rightarrow$ G enthält einen Artikulationsknoten u, so dass $G - u$ in nicht verbundene Teilgraphen G_1 und G_2 zerfällt, die jeweils mindestens einen Knoten ($\neq u$) aus $\mathcal{C}(G)$ enthalten.

- Sei v ein exzentrischer Knoten von u und P ein entsprechender kürzester Pfad (der Länge $e(u)$) zwischen u und v.
  o.B.d.A. sei $v \in G_2$

$\Rightarrow$ $\exists$ Knoten $w \in \mathcal{C}(G)$ in G_1 ($w \neq u$). w liegt nicht auf P.

$\Rightarrow$ $e(w) \geq d(w,u) + d(u,v) \geq 1 + e(u)$

$\Rightarrow$ wegen $e(w) > e(u)$ gehört w nicht zu $\mathcal{C}(G)$ (Widerspruch)

Graph-Median

$$s(G) = \min_{v \in V} \left\{ \sum_{w \in V} d(v, w) \right\}$$

Median:

$$\mathcal{M}(G) = \left\{ v \in V : \sum_{w \in V} d(v, w) = s(G) \right\}$$

Eigenschaften des Graph-Medians

Satz

Sei G ein zusammenhängender ungerichteter Graph.
Dann existiert ein Block in G, der alle Knoten des Medians $\mathcal{M}(G)$ enthält.

Oder anders formuliert:
Die Knoten des Graph-Medians befinden sich alle in einem Block.

Beweis: Übungsaufgabe!

Folgerung

Der Median eines Baums besteht entweder aus einem einzelnen Knoten oder aus zwei adjazenten Knoten.

Graph-Zentroid

$$f(G) = \max_{v \in V} \{c_F(v)\}$$

Zentroid:

$$\mathcal{Z}(G) = \{v \in V : \ c_F(v) = f(G)\}$$

Eigenschaften des Graph-Zentroids

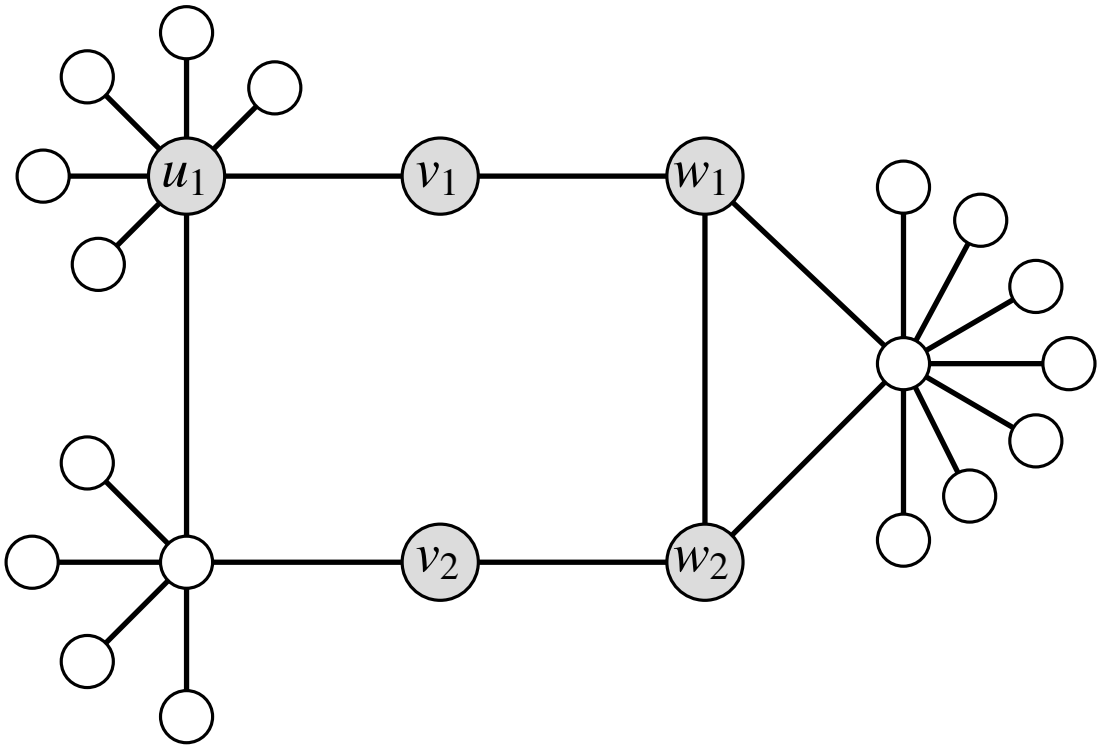
Satz (Slater)

Für jeden Baum sind Median und Zentroid identisch.

Satz (Smart & Slater)

In jedem zusammenhängenden ungerichteten Graphen liegen Median und Zentroid im gleichen Block.

Beispiel



$\mathcal{C}(G) = \{v_1, v_2\}$, $\mathcal{M}(G) = \{u_1\}$, $\mathcal{Z}(G) = \{w_1, w_2\}$

Unterschiedlichkeit der Maße

Satz

Für drei beliebige zusammenhängende ungerichtete Graphen H_1, H_2 und H_3 und eine beliebige natürliche Zahl $k \geq 4$ existiert ein ungerichteter zusammenhängender Graph G, so dass

- $G[\mathcal{C}(G)] \simeq H_1$,
- $G[\mathcal{M}(G)] \simeq H_2$,
- $G[\mathcal{Z}(G)] \simeq H_3$, *und*
- *die Distanz zwischen je zwei der zentralen Mengen ist mindestens k.*

Stress-Zentralität

- Anzahl kürzester Pfade zwischen Knoten s und t, die $v \in V$ bzw. $e \in E$ enthalten: $\sigma_{st}(v)$ bzw. $\sigma_{st}(e)$
- Stress-Zentralität:

$$c_S(v) = \sum_{s \neq v \in V} \sum_{t \neq v \in V} \sigma_{st}(v)$$

$$c_S(e) = \sum_{s \in V} \sum_{t \in V} \sigma_{st}(e)$$

- Intuition: Kommunikationsfluss durch Knoten bzw. Kanten auf (allen) kürzesten Wegen zwischen allen Knotenpaaren

Knoten- und Kanten-Stresszentralität

Lemma

In einem gerichteten Graphen $G = (V, E)$ sind die Stresszentralitäten von Knoten und Kanten wie folgt miteinander verknüpft:

$$c_S(v) = \frac{1}{2}\left(\sum_{e \in \Gamma(v)} c_S(e) - \sum_{s \in V,\, s \neq v} \sigma_{sv} - \sum_{t \in V,\, t \neq v} \sigma_{vt}\right)$$

$\Gamma(v)$: Menge der Kanten mit Endknoten v

σ_{xy}: Anzahl kürzester Wege von x nach y

Knoten- und Kanten-Stresszentralität

Beweis.

- Betrachte einen kürzesten Pfad zwischen $s, t \in V$.

$\Rightarrow$ trägt genau 1 zum Stress jedes inneren Knotens und jeder Kante bei

- Innere Knoten sind jeweils zu zwei Kanten des Pfads benachbart.
- Anfangs- und Endknoten sind immer zu einer Kante des Pfads benachbart. (Während dieser kürzeste Pfad dann für die Kante zählt, soll er beim Anfangs-/Endknoten nicht mitgezählt werden.)

- Wie oft ist v Anfangs- bzw. Endknoten eines kürzesten Pfades?

$$\sum_{s \in V, s \neq v} \sigma_{sv} + \sum_{t \in V, t \neq v} \sigma_{vt}$$

Shortest-Path Betweenness

- eine Art relative Stress-Zentralität
- Anzahl kürzester Pfade zwischen $s, t \in V$: σ_{st}
- Anzahl kürzester Pfade zwischen s, t, die v enthalten: $\sigma_{st}(v)$
- Anteil der kürzesten Pfade zwischen s und t, die v enthalten:

$$\delta_{st}(v) = \frac{\sigma_{st}(v)}{\sigma_{st}}$$

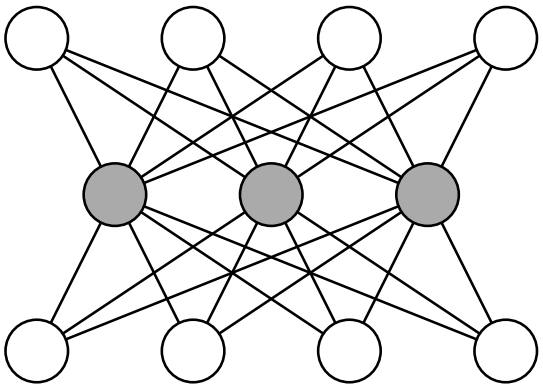
$\Rightarrow$ interpretiert als Anteil oder Wahrscheinlichkeit der Kommunikation

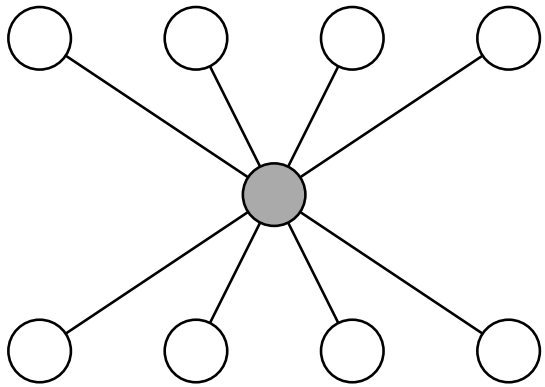
- Betweenness-Zentralität:

$$c_B(v) = \sum_{s \neq v \in V} \sum_{t \neq v \in V} \delta_{st}(v)$$

Vorteile von Betweenness

- Vorteil gegenüber Closeness:
  funktioniert auch bei nicht zusammenhängenden Graphen
- Vorteil gegenüber Stress (siehe Abb.): Knoten der mittleren Schicht haben in beiden Graphen gleiche Stresszentralität
  links: mehrere Alternativen
  rechts: mittlerer Knoten für gesamte Kommunikation notwendig





- Normierung: Teilen durch Anzahl Paare
  $(n-1)(n-2)$ bzw. $(n-1)(n-2)/2$

Betweenness für Kanten

- Anteil der Kante e am Informationsfluss (auf allen kürzesten Pfaden) zwischen den Knoten s und t

$$\delta_{st}(e) = \frac{\sigma_{st}(e)}{\sigma_{st}}$$

- Betweenness-Zentralität der Kante e:

$$c_B(e) = \sum_{s \in V} \sum_{t \in V} \delta_{st}(e)$$

Knoten- und Kanten-Betweenness-Zentralität

Lemma

In einem gerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist die (Kürzeste-Pfade-)Betweenness-Zentralität für Knoten und Kanten wie folgt miteinander verknüpft:

$$c_B(v) = \left(\sum_{e \in \Gamma^+(v)} c_B(e) \right) - (n-1) = \left(\sum_{e \in \Gamma^-(v)} c_B(e) \right) - (n-1)$$

$\Gamma^+(v)$: Menge der Kanten mit Startknoten v
$\Gamma^-(v)$: Menge der Kanten mit Zielknoten v

Knoten- und Kanten-Betweenness-Zentralität

Beweis.

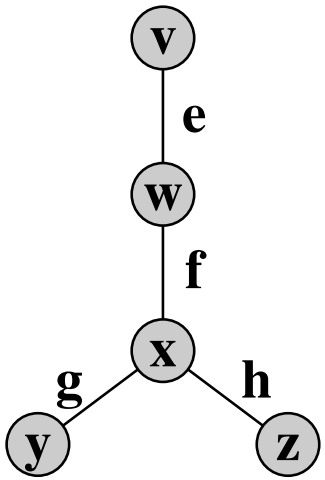
- Betrachte einen kürzesten Pfad zwischen $s, t \in V$.

$\Rightarrow$ trägt genau $1/\sigma_{st}$ zur Betweenness jedes inneren Knotens und jeder Kante bei

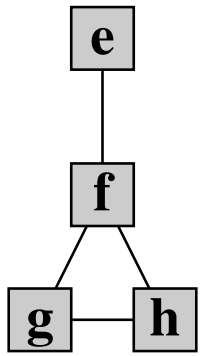
- Innere Knoten sind jeweils zu einer eingehenden und einer ausgehenden Kante des Pfads benachbart.
- Anfangs- und Endknoten sind immer zu genau einer Kante des Pfads benachbart. (Während dieser kürzeste Pfad dann $1/\sigma_{st}$ zur Betweenness der Kante beiträgt, soll er beim Anfangs-/Endknoten nicht mitgezählt werden.)
- Insgesamt summieren sich die Anteile eines Knotens als Anfangs- oder Endknoten zu $(n-1)$, die also von der Summe der angrenzenden Kanten abzuziehen sind.

Abgeleitete Kantenzentralitäten

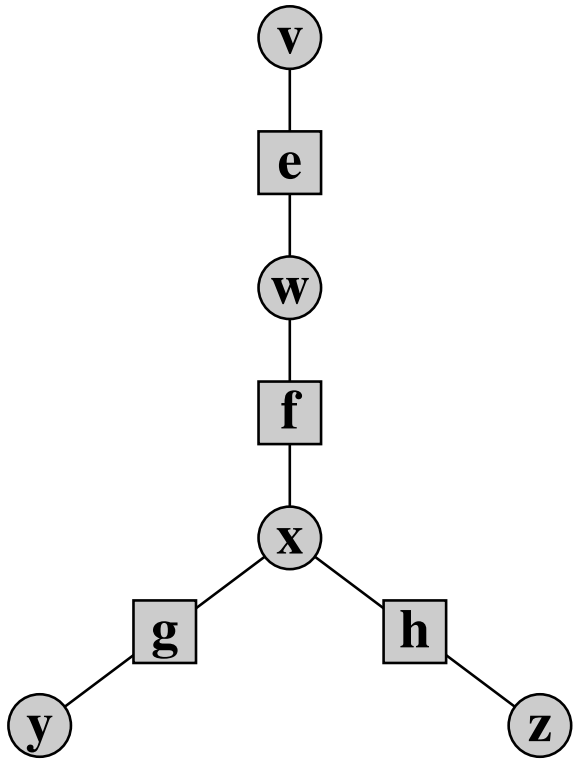
Wie kann man aus Knotenzentralitäten automatisch Definitionen von Kantenzentralität ableiten?



Graph



Kantengraph



Inzidenzgraph

Kantenzentralität als Knotenzentralität im Kantengraph

Definition

Kantengraph von Graph $G = (V, E)$ ist $G' = (E, K)$, wobei K die Menge der Kanten $e = ((x, y), (y, z))$ mit $(x, y) \in E$ und $(y, z) \in E$ ist.

Zwei Knoten im Kantengraph sind also benachbart, wenn die entsprechenden Kanten im ursprünglichen Graphen einen Knoten gemeinsam haben (im gerichteten Fall als Zielknoten der einen Kante und Startknoten der anderen).

$\Rightarrow$ Wende Knotenzentralität auf den Kantengraph an
Nachteile:

- Größe des Kantengraphen kann quadratisch in der Größe des ursprünglichen Graphen sein,
- Kantengewichte in G werden zu Knotengewichten in G' (Nutzung unklar)
- keine natürliche Interpretation / Generalisierung

Kantenzentralität als Knotenzentralität im Inzidenzgraph

Definition

Inzidenzgraph von Graph $G = (V, E)$ ist $G'' = (V'', E'')$, wobei

$$V'' = V \cup E \quad \text{und} \quad E'' = \{(v, e) \mid \exists w : e = (v, w) \in E\} \cup \{(e, w) \mid \exists v : e = (v, w) \in E\}.$$

Im Inzidenzgraphen sind also ein 'echter Knoten' und ein 'Kantenknoten' benachbart, wenn der entsprechende Knoten und die entsprechende Kante im ursprünglichen Graphen inzident sind.

$\Rightarrow$ Wende Knotenzentralität auf den Inzidenzgraph an, wobei nur die Pfade zwischen 'echten Knoten' als relevant betrachtet werden

Vitalität

Vitalitätsmaße bewerten die Wichtigkeit eines Knotens oder einer Kante anhand eines Qualitätsverlusts durch das Löschen des Knotens bzw. der Kante.

Definition (Vitalitätsindex)

Sei $\mathcal{G}$ die Menge aller einfachen ungerichteten ungewichteten Graphen $G = (V, E)$ und $f : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion auf $G \in \mathcal{G}$.
Dann ist ein Vitalitätsindex $\mathcal{V}(G, x)$ definiert als die Differenz der Werte von f auf G und $G \setminus \{x\}$:

$$\mathcal{V}(G, x) = f(G) - f(G \setminus \{x\})$$

Flow Betweenness Vitality

- ähnlich zu Shortest Path Betweenness
- Motivation: Information in einem Kommunikationsnetzwerk muss sich nicht unbedingt auf kürzesten Pfaden bewegen.
- Maß: Abhängigkeit des maximalen Flusses zwischen zwei Knoten von der Existenz des betrachteten Knotens

Flow Betweenness Vitality

- f_{st}: Maximum-Fluss zwischen Knoten s und t unter Berücksichtigung der Kantenkapazitäten
- $f_{st}(v)$: Fluss zwischen Knoten s und t, der bei Maximum-Fluss von s nach t durch v gehen muss
- $\tilde{f}_{st}(v)$: Maximum-Fluss von s nach t in $G - v$

$$c_{mf}(v) = \sum_{\substack{s,t \in V \\ v \neq s, v \neq t \\ f_{st} > 0}} \frac{f_{st}(v)}{f_{st}} = \sum_{\substack{s,t \in V \\ v \neq s, v \neq t \\ f_{st} > 0}} \frac{f_{st} - \tilde{f}_{st}(v)}{f_{st}}$$

Closeness Vitality

- Wiener Index:

$$I_W(G) = \sum_{v \in V} \sum_{w \in V} d(v, w)$$

- oder in Abhängigkeit der Closeness-Zentralitäten:

$$I_W(G) = \sum_{v \in V} \frac{1}{c_C(v)}$$

- Closeness Vitality für Knoten/Kante x:

$$c_{CV}(x) = I_W(G) - I_W(G - x)$$

- Interpretation: Um wieviel steigen die Gesamtkommunikationskosten, wenn jeder Knoten mit jedem kommuniziert?

Closeness Vitality - Durchschnitt

- Durchschnittliche Distanz:

$$\overline{d}(G) = \frac{I_W(G)}{n(n-1)}$$

- Das Vitalitätsmaß auf der Basis $f(G) = \overline{d}(G)$ misst die durchschnittliche Verschlechterung der Entfernung zwischen zwei Knoten beim Entfernen eines Knotens / einer Kante x.

- Vorsicht! Beim Entfernen eines Artikulationsknotens (cut vertex) oder einer Brücke (cut edge) x ist $c_{CV}(x) = -\infty$.

Shortcut-Werte

- kein echter Vitalitätsindex im Sinne der Definition
- maximale Erhöhung eines Distanzwerts, wenn Kante $e = (v, w)$ entfernt wird

$\Rightarrow$ nur relevant für Knoten, bei denen alle kürzesten Pfade über e laufen

- maximale Erhöhung tritt direkt zwischen Knoten v und w auf
- alternativ: maximale relative Erhöhung
- Berechnung: mit $m = |E|$ Single Source Shortest Path Instanzen (und Vergleich mit der jeweiligen Kante)
- später: mit $n = |V|$ SSSP-Bäumen
- Anwendung auch auf Knotenlöschungen möglich

Stress-Zentralität als Vitalitätsindex

- Stress-Zentralität zählt die Anzahl der kürzesten Pfade, an denen ein Knoten oder eine Kante beteiligt ist

$\Rightarrow$ kann als Vitalitätsmaß betrachtet werden

- Aber: Anzahl der kürzesten Pfade kann sich durch Löschung erhöhen (wenn sich die Distanz zwischen zwei Knoten erhöht)

$\Rightarrow$ Längere kürzeste Pfade müssen ignoriert werden

Stress-Zentralität als Vitalitätsindex

- $f(G \setminus \{v\})$ muss ersetzt werden durch

$$\sum_{s \in V} \sum_{t \in V} \sigma_{st}[d_G(s,t) = d_{G \setminus \{v\}}(s,t)]$$

- Ausdruck in Klammern ist 1 (wahr) oder 0 (falsch)
- $f(G \setminus \{e\})$ analog:

$$\sum_{s \in V} \sum_{t \in V} \sigma_{st}[d_G(s,t) = d_{G \setminus \{e\}}(s,t)]$$

- Also: $f(G) - f(G - x) = \sum_{s \in V} \sum_{t \in V} \sigma_{st}(x)$
- kein echter Vitalitätsindex im Sinne der Definition, weil der Index-Wert nach der Löschung von der Distanz vor der Löschung abhängt

Übersicht

Kürzeste Wege

Zentrale Frage: Wie kommt man am schnellsten von A nach B?

Kürzeste Wege

Zentrale Frage: Wie kommt man am schnellsten von A nach B?

Fälle:

- Kantenkosten 1
- DAG, beliebige Kantenkosten
- beliebiger Graph, positive Kantenkosten
- beliebiger Graph, beliebige Kantenkosten

Kürzeste-Wege-Problem

gegeben:

- gerichteter Graph $G = (V, E)$
- Kantenkosten $c : \ E \mapsto \mathbb{R}$

2 Varianten:

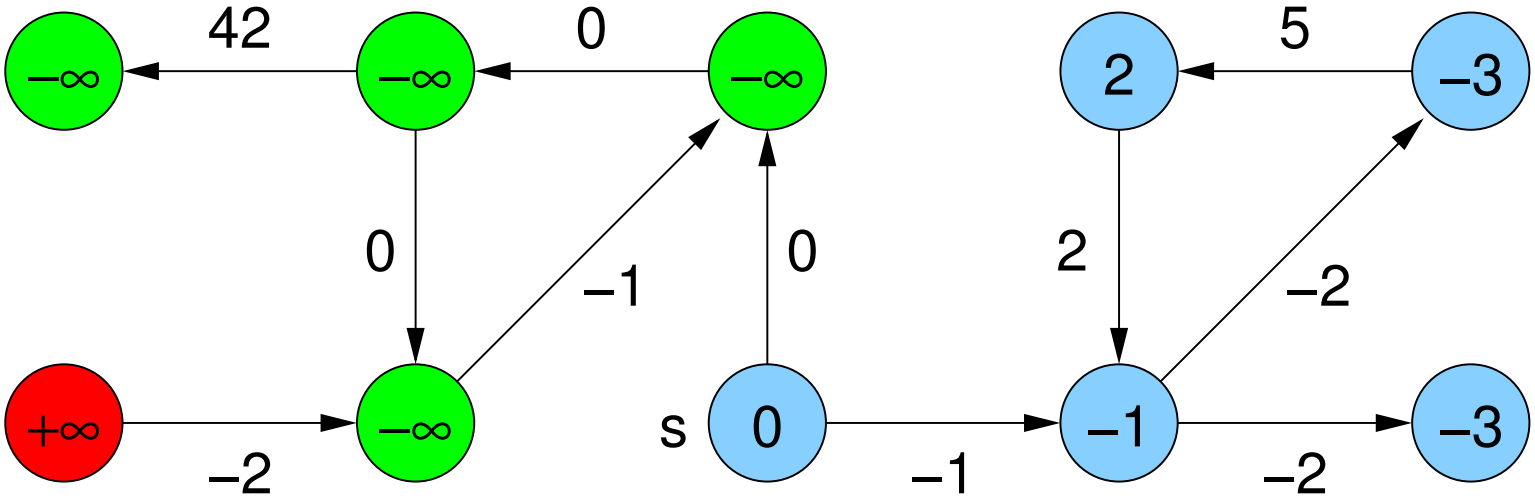
- SSSP (single source shortest paths):

  kürzeste Wege von einer Quelle zu allen anderen Knoten

- APSP (all pairs shorstest paths):

  kürzeste Wege zwischen allen Paaren

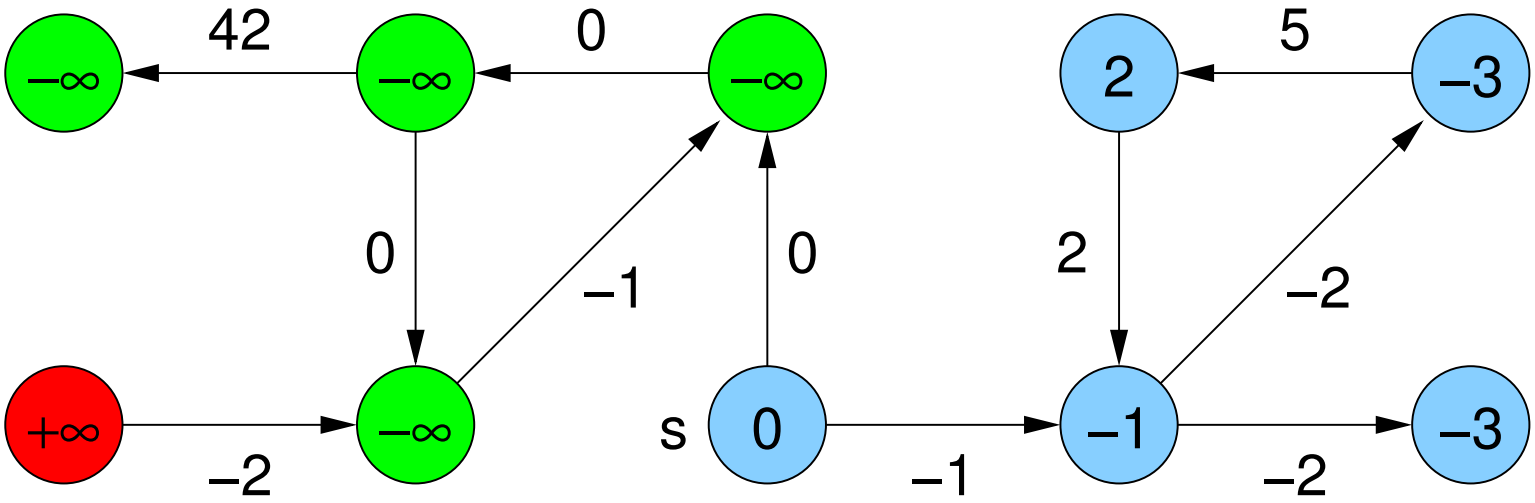
Distanzen



$\mu(s, v)$: Distanz von s nach v

$$\mu(s,v) = \begin{cases} +\infty & \text{kein Weg von } s \text{ nach } v \\ -\infty & \text{Weg beliebig kleiner Kosten von } s \text{ nach } v \\ \min\{c(p) : p \text{ ist Weg von } s \text{ nach } v\} \end{cases}$$

Distanzen



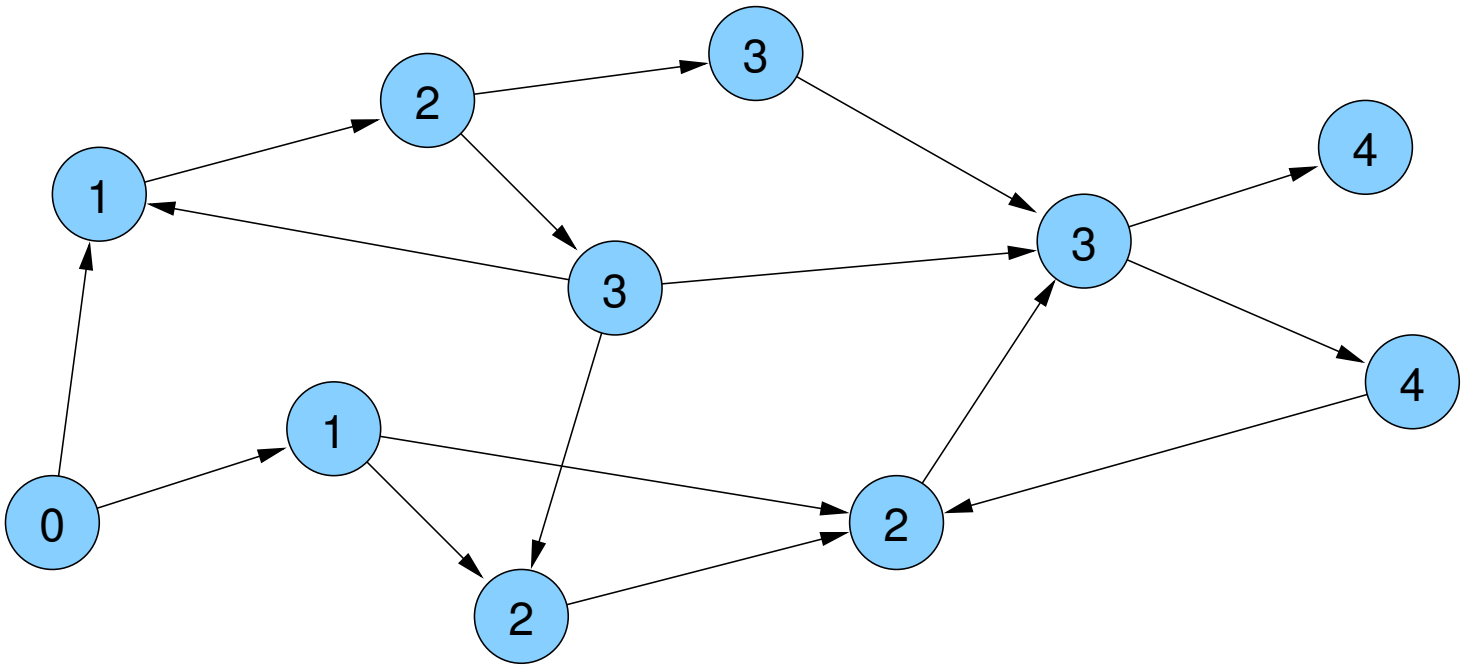
Wann sind die Kosten $-\infty$?

wenn es einen Kreis mit negativer Gewichtssumme gibt
(hinreichende und notwendige Bedingung)

Kürzeste Wege

Graph mit Kantenkosten 1:

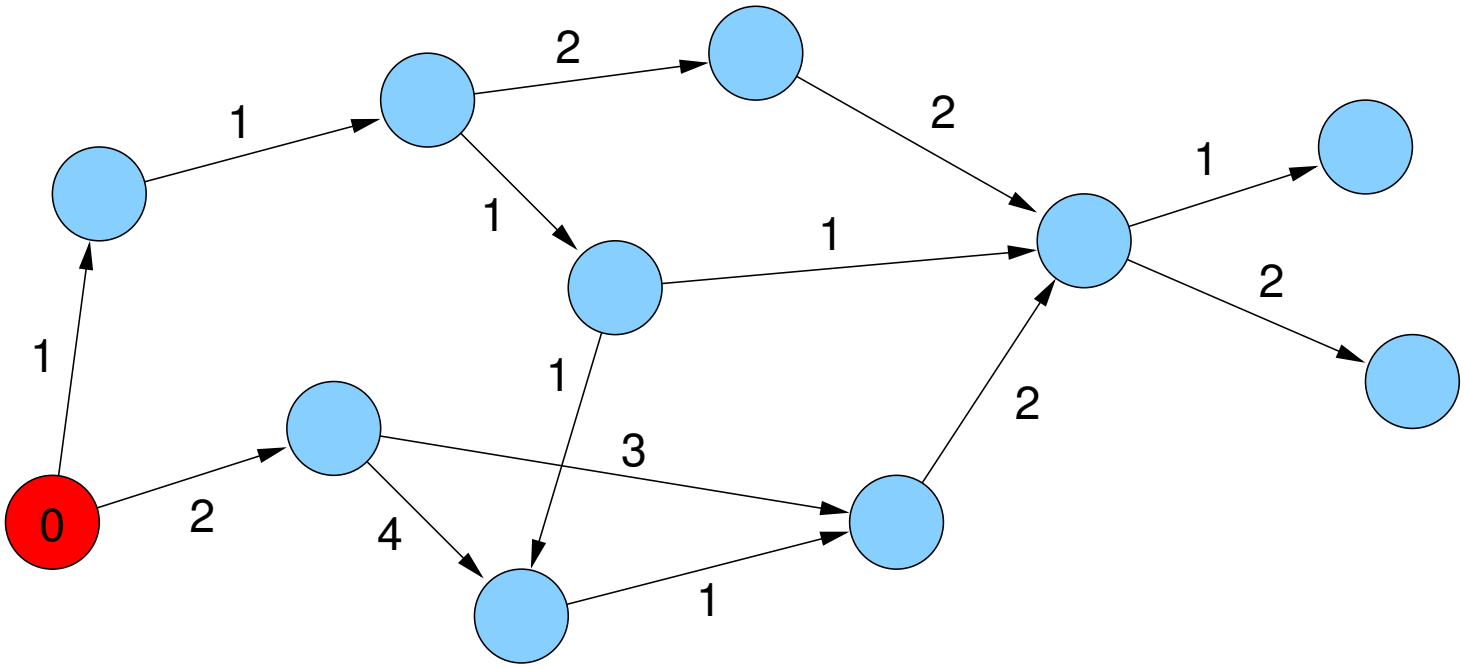
$\Rightarrow$ Breitensuche (BFS)



Kürzeste Wege

Beliebige Kantengewichte in DAGs

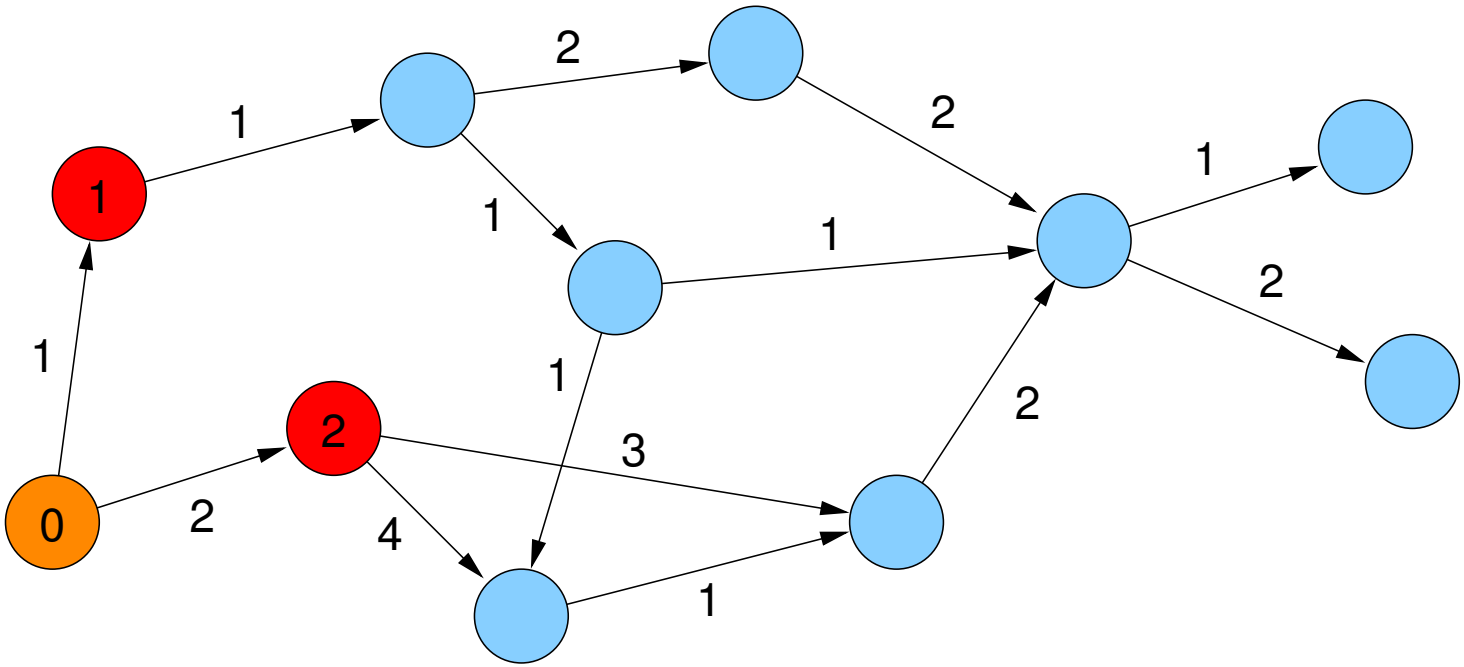
Einfache Breitensuche funktioniert nicht.



Kürzeste Wege

Beliebige Kantengewichte in DAGs

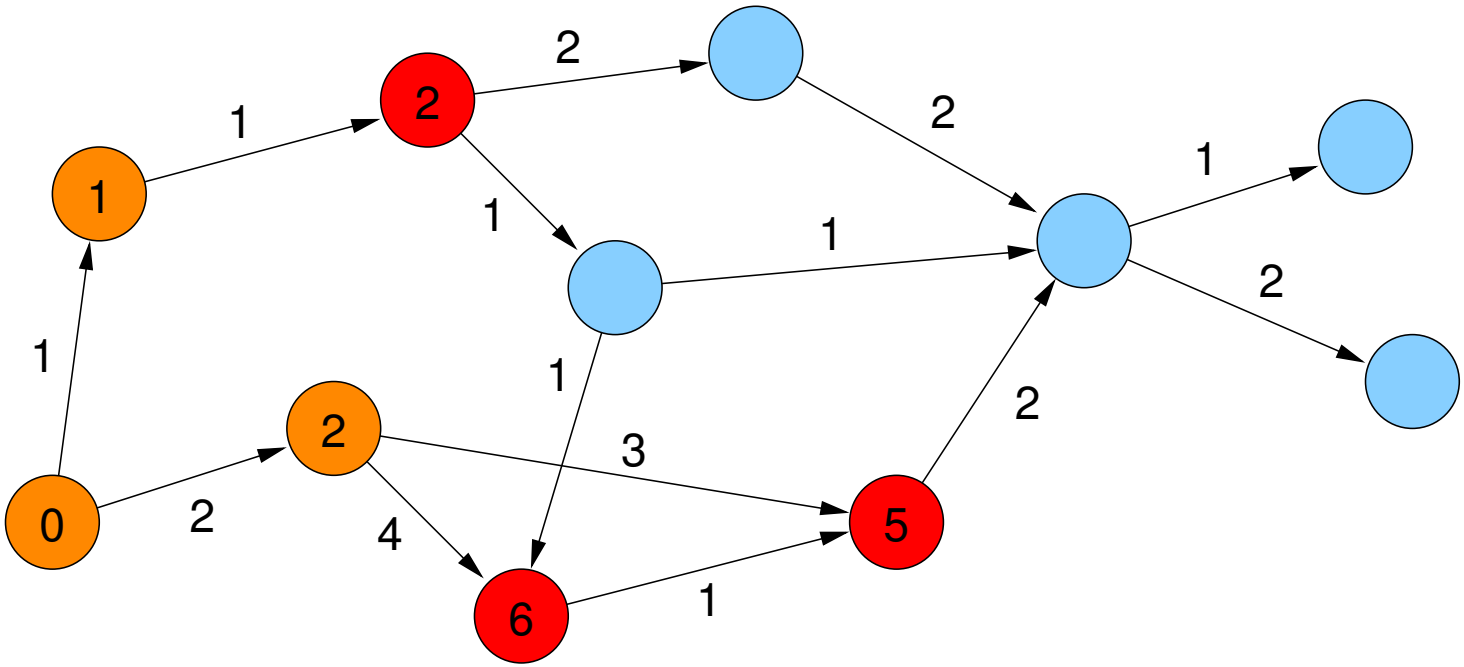
Einfache Breitensuche funktioniert nicht.



Kürzeste Wege

Beliebige Kantengewichte in DAGs

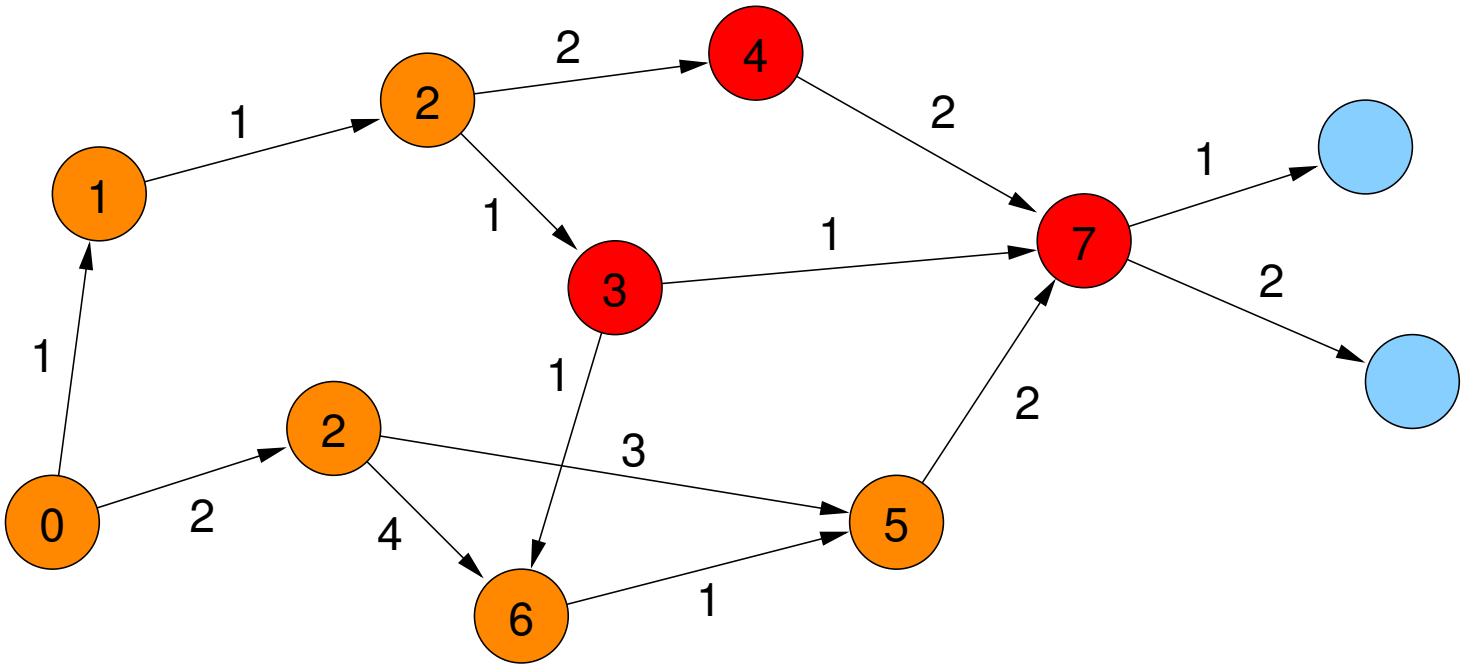
Einfache Breitensuche funktioniert nicht.



Kürzeste Wege

Beliebige Kantengewichte in DAGs

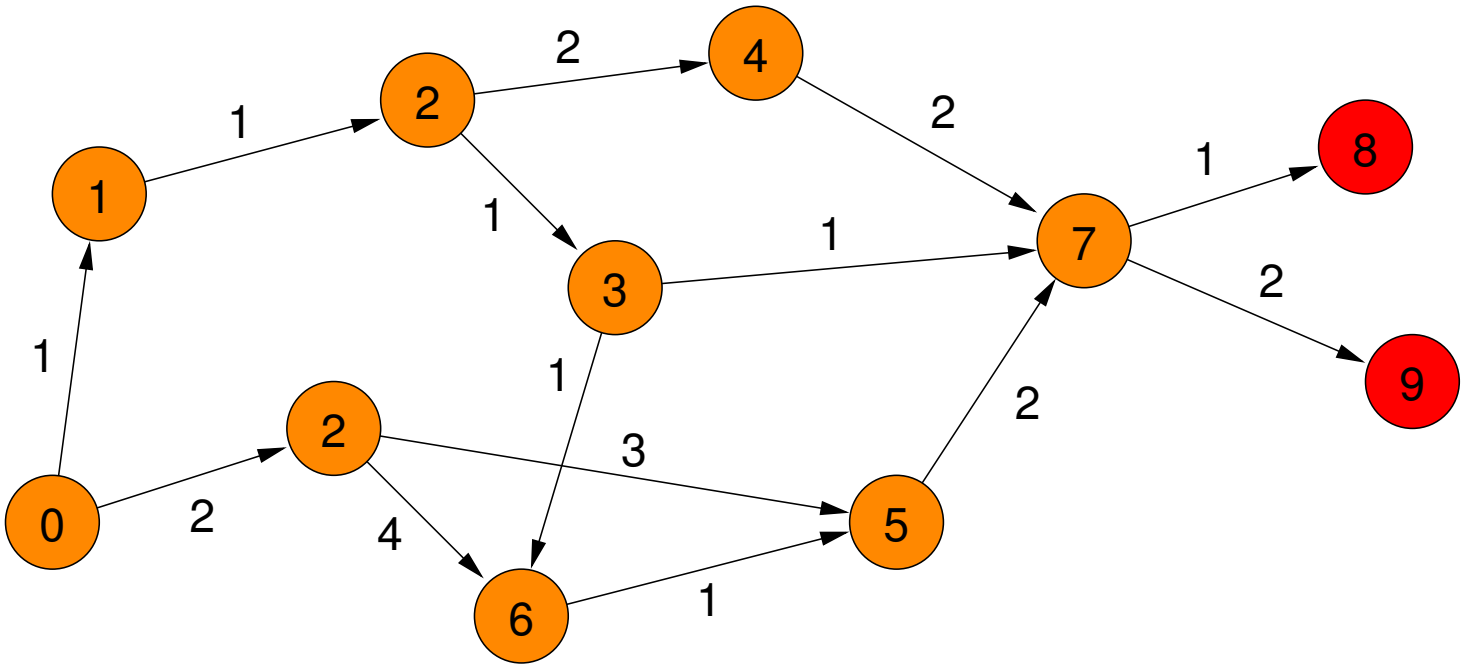
Einfache Breitensuche funktioniert nicht.



Kürzeste Wege

Beliebige Kantengewichte in DAGs

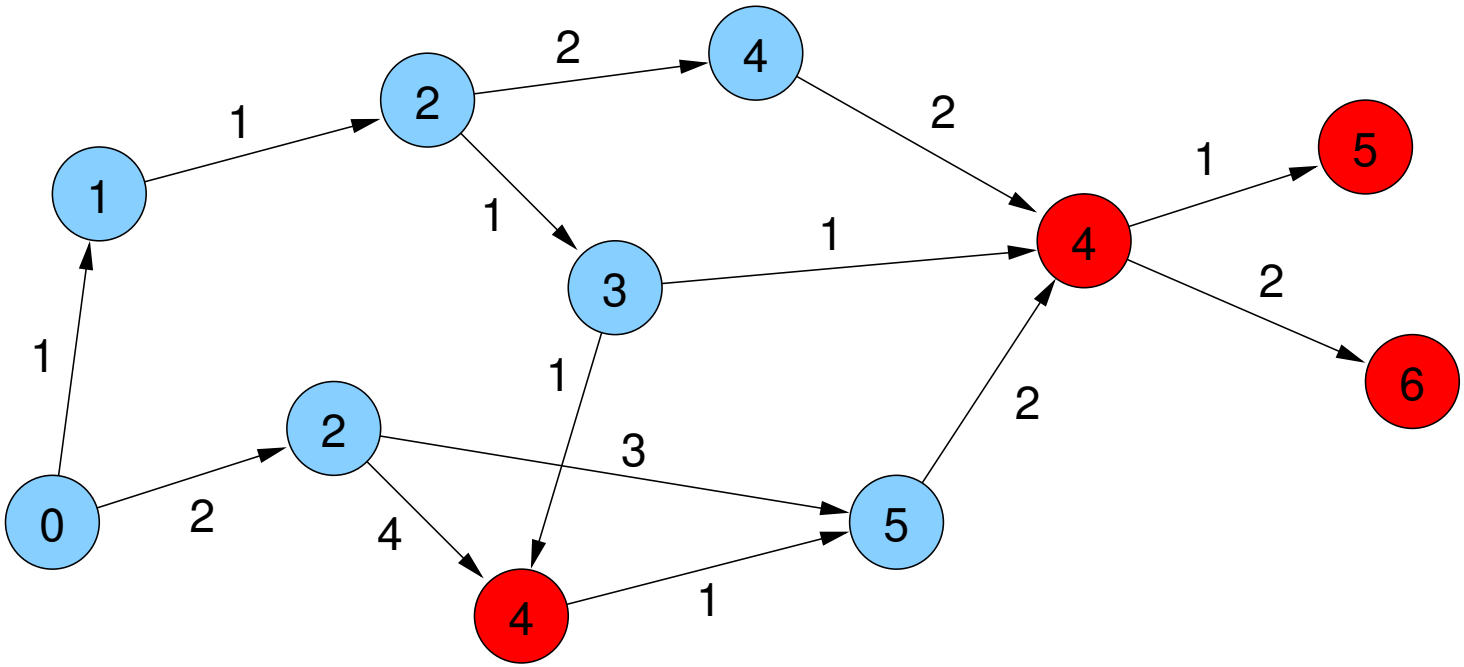
Einfache Breitensuche funktioniert nicht.



Kürzeste Wege

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Einfache Breitensuche funktioniert nicht.

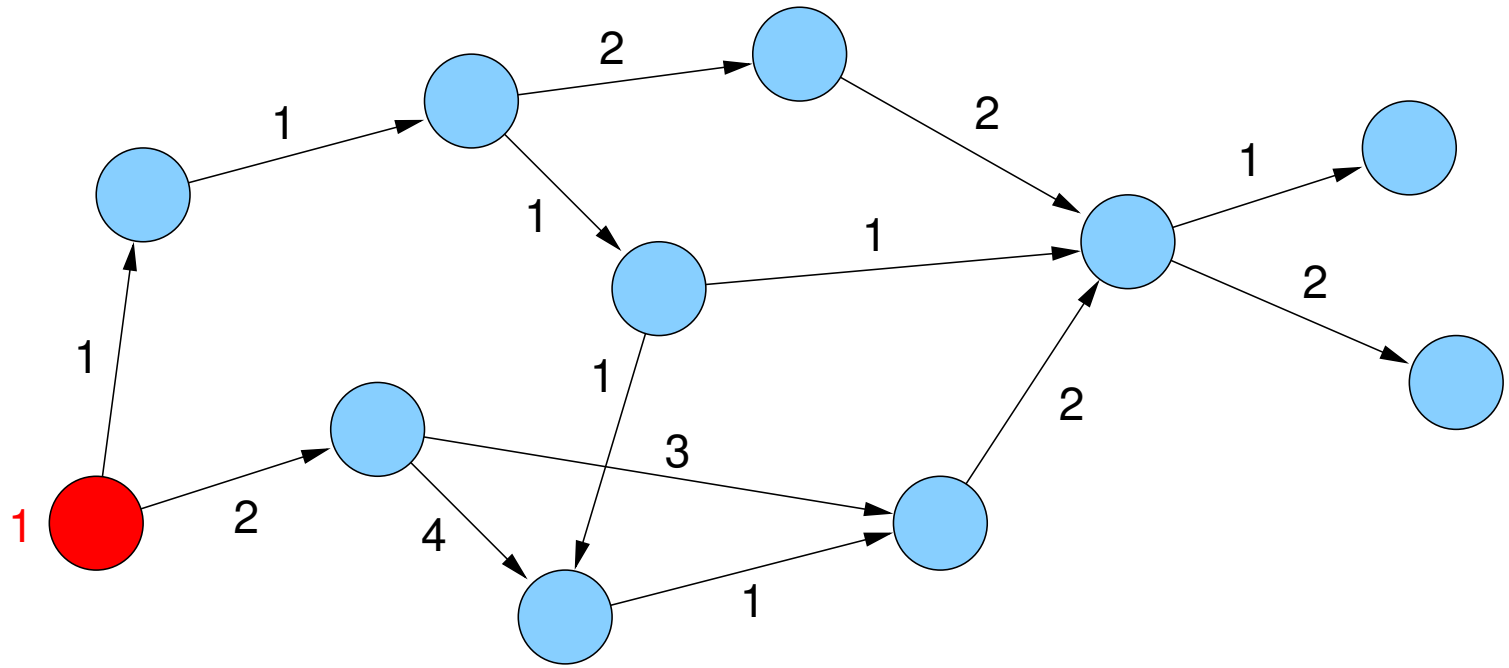


Kürzeste Wege

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Strategie: in DAGs gibt es topologische Sortierung

(für alle Kanten e=(v,w) gilt topoNum(v) $<$ topoNum(w))

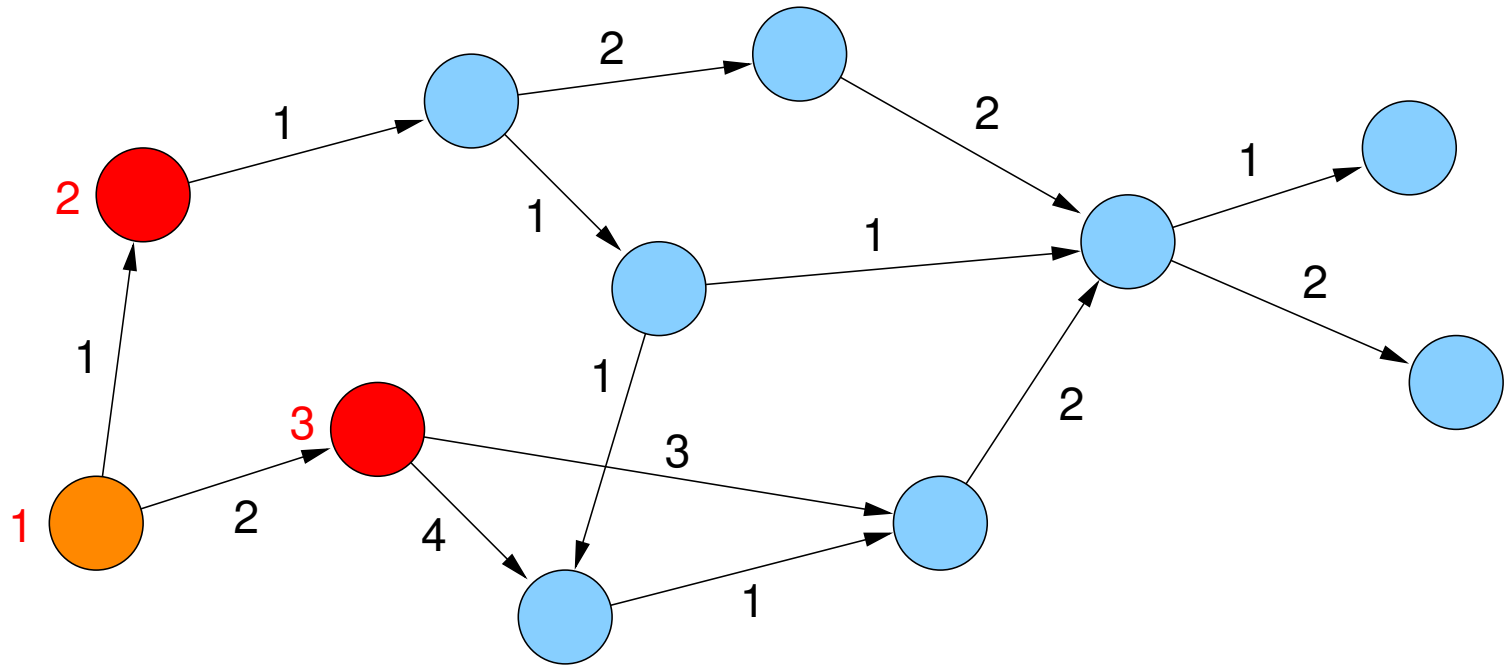


Kürzeste Wege

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Strategie: in DAGs gibt es topologische Sortierung

(für alle Kanten e=(v,w) gilt topoNum(v) $<$ topoNum(w))

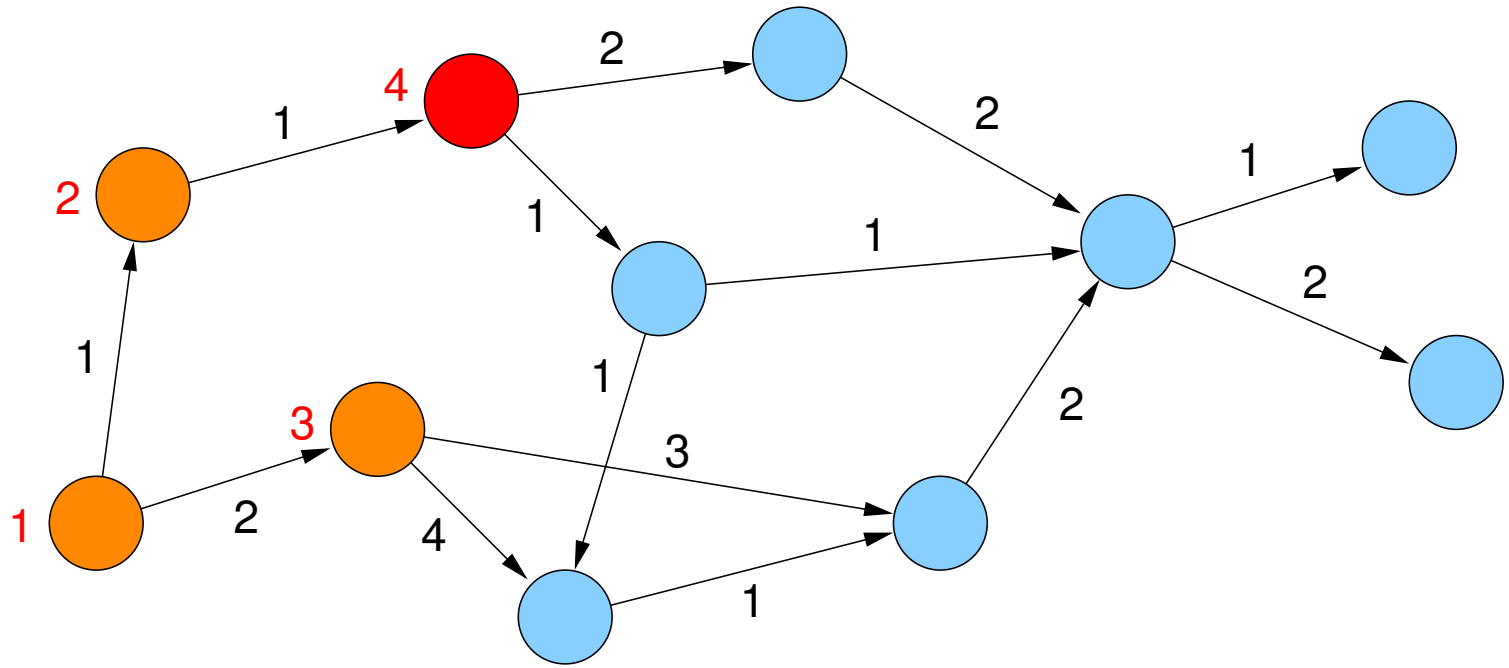


Kürzeste Wege

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Strategie: in DAGs gibt es topologische Sortierung

(für alle Kanten e=(v,w) gilt topoNum(v) $<$ topoNum(w))

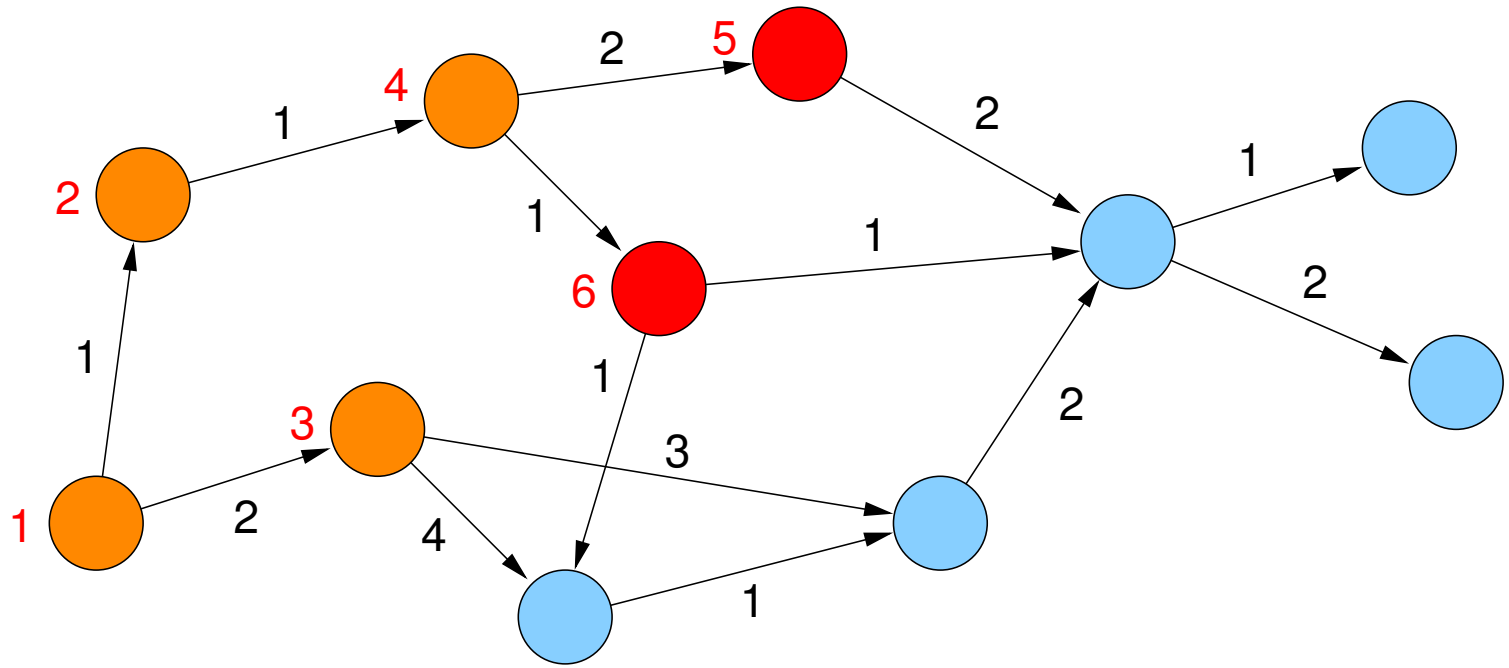


Kürzeste Wege

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Strategie: in DAGs gibt es topologische Sortierung

(für alle Kanten e=(v,w) gilt topoNum(v) $<$ topoNum(w))

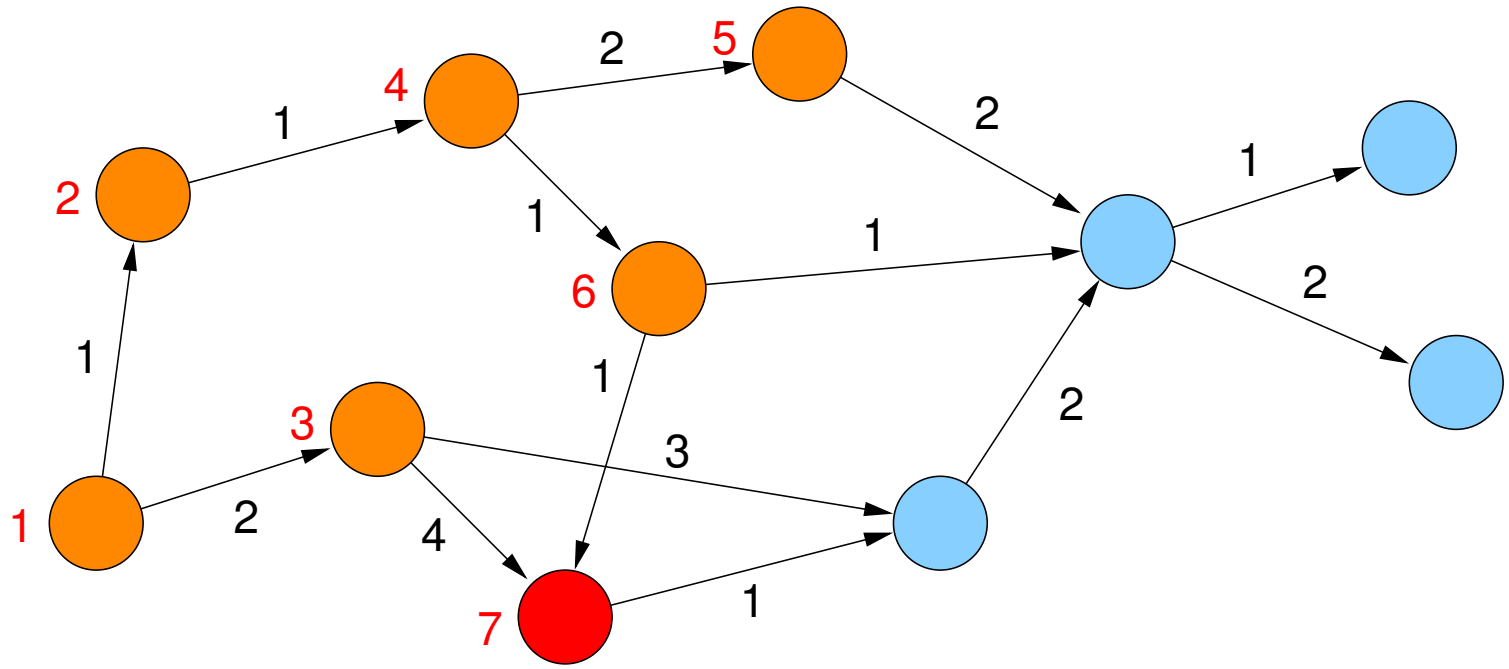


Kürzeste Wege

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Strategie: in DAGs gibt es topologische Sortierung

(für alle Kanten e=(v,w) gilt topoNum(v) $<$ topoNum(w))

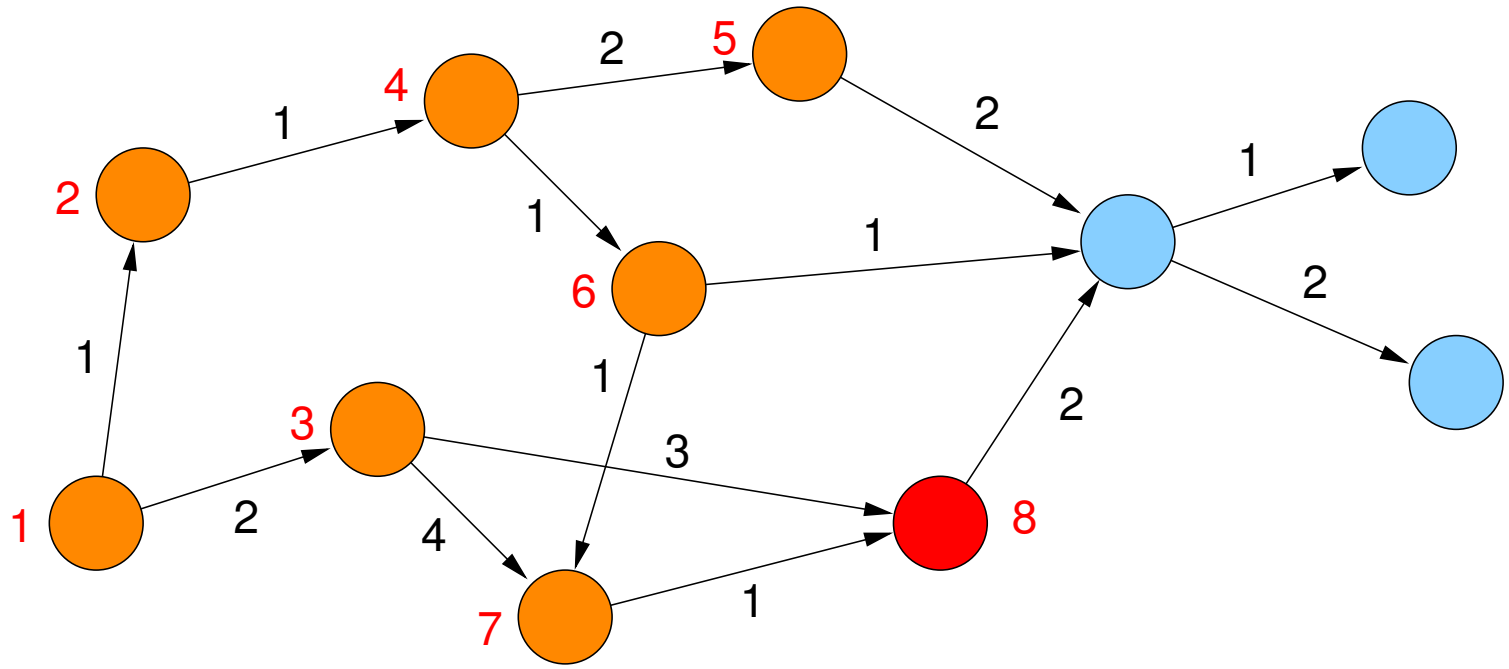


Kürzeste Wege

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Strategie: in DAGs gibt es topologische Sortierung

(für alle Kanten e=(v,w) gilt topoNum(v) $<$ topoNum(w))

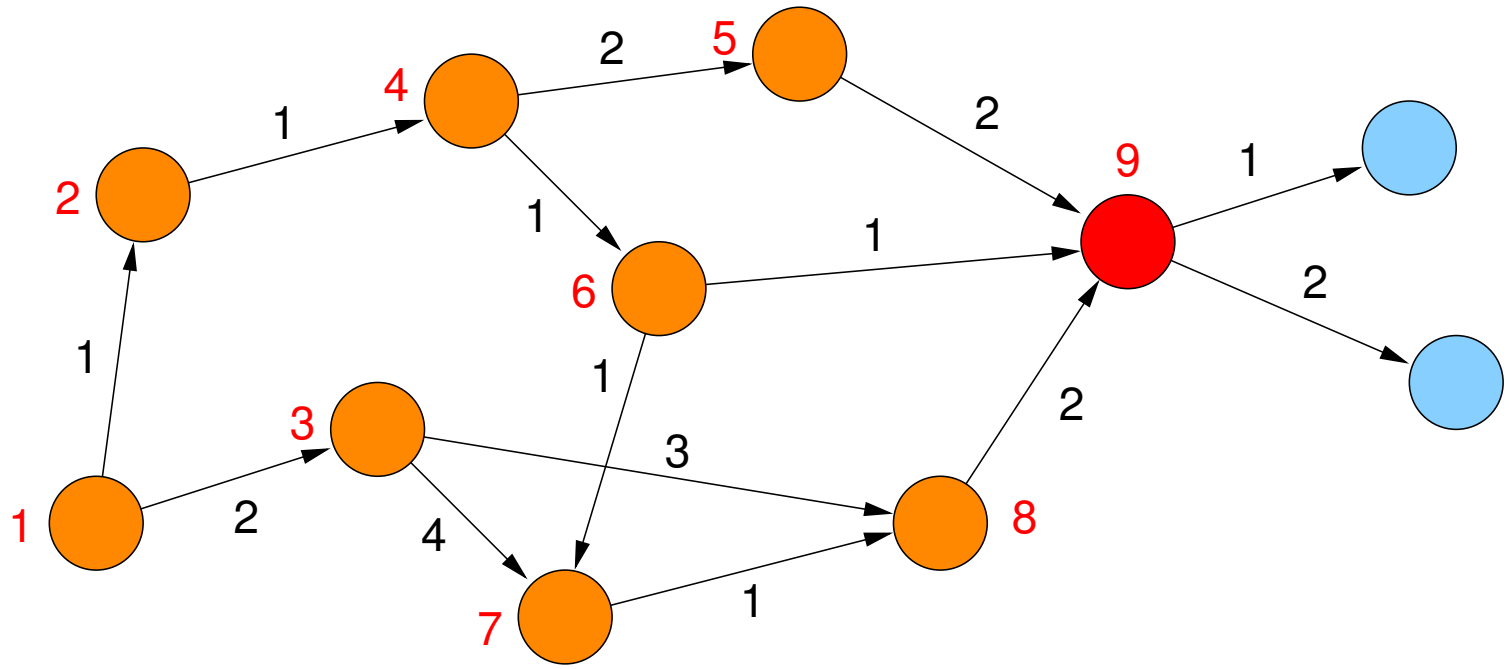


Kürzeste Wege

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Strategie: in DAGs gibt es topologische Sortierung

(für alle Kanten e=(v,w) gilt topoNum(v) $<$ topoNum(w))

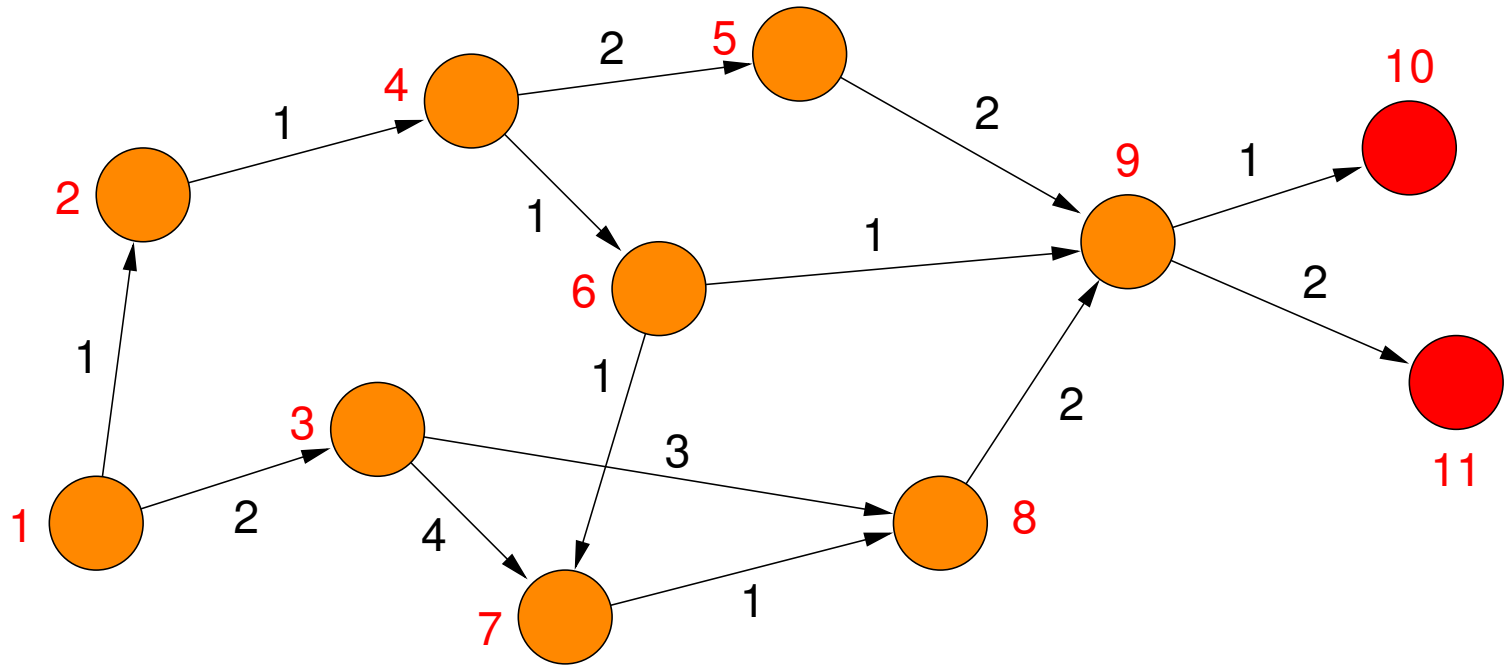


Kürzeste Wege

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Strategie: in DAGs gibt es topologische Sortierung

(für alle Kanten e=(v,w) gilt topoNum(v) $<$ topoNum(w))

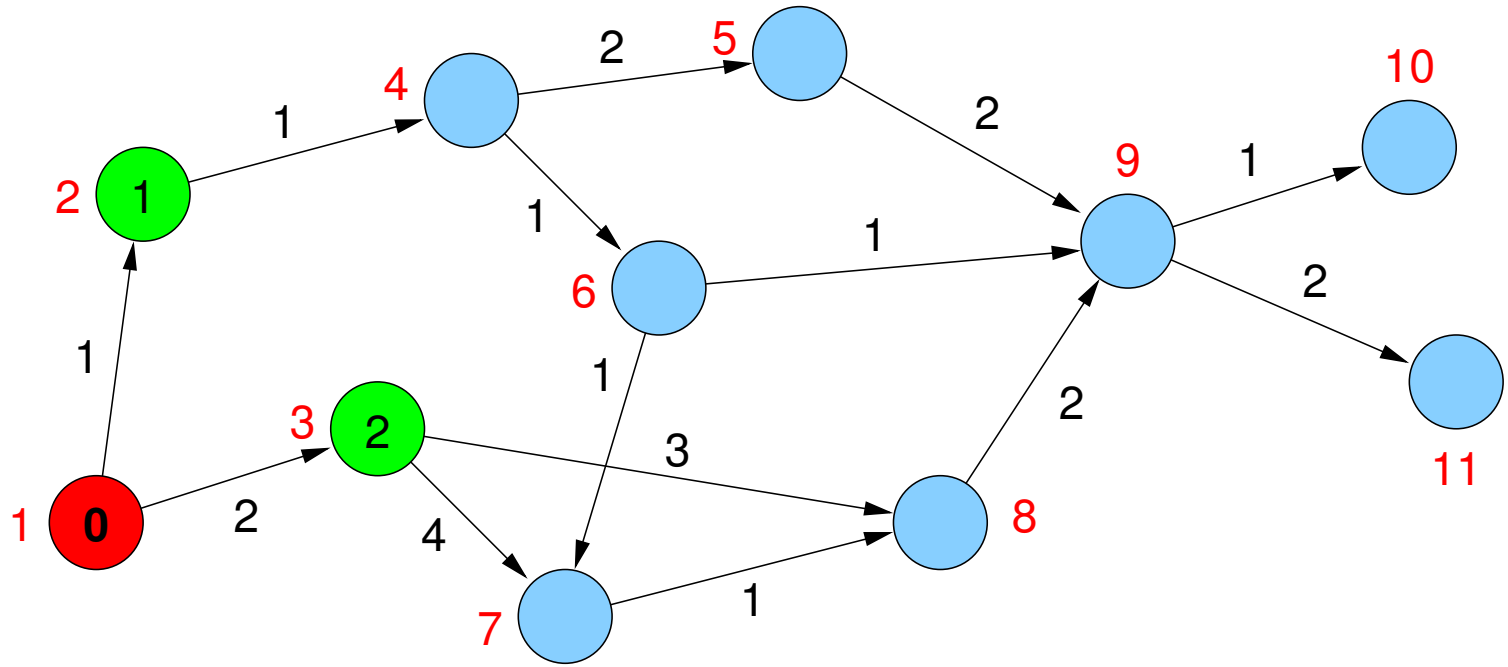


Kürzeste Wege

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Strategie:

- betrachte Knoten in Reihenfolge der topologischen Sortierung
- aktualisiere Distanzwerte

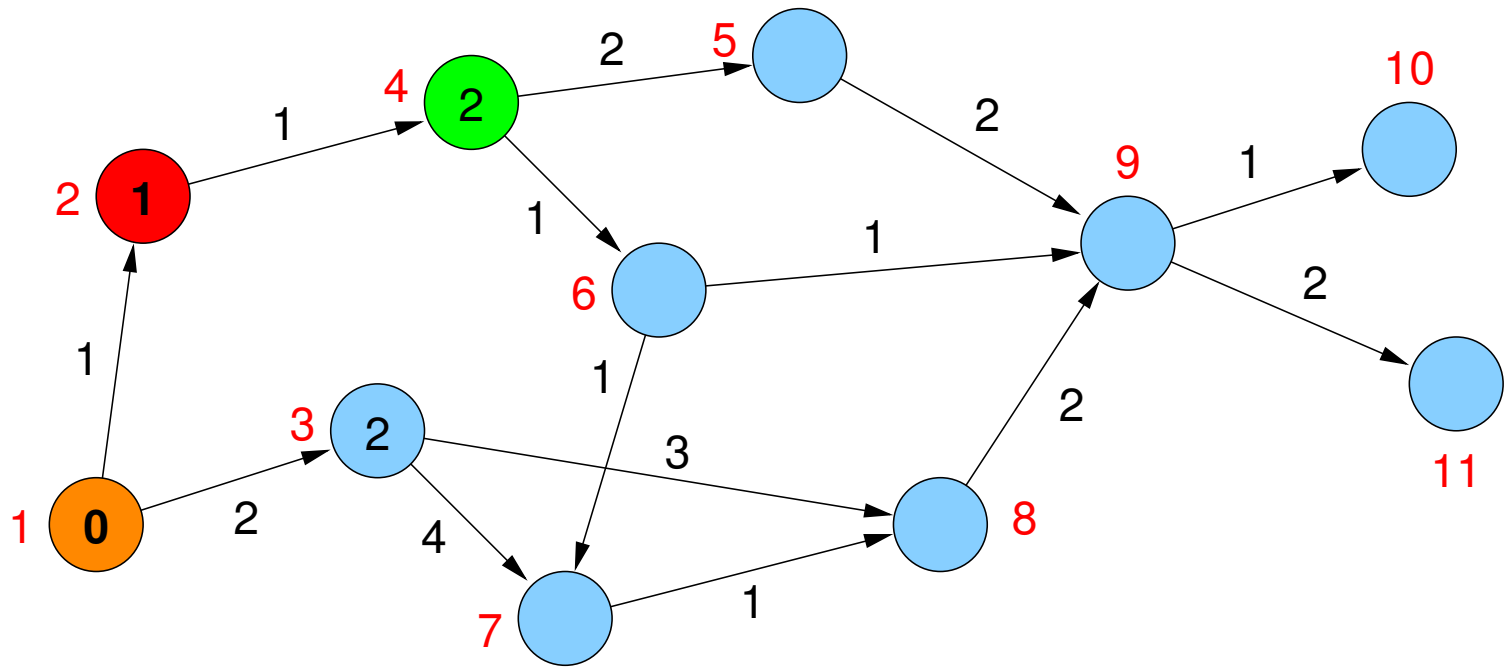


Kürzeste Wege

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Strategie:

- betrachte Knoten in Reihenfolge der topologischen Sortierung
- aktualisiere Distanzwerte

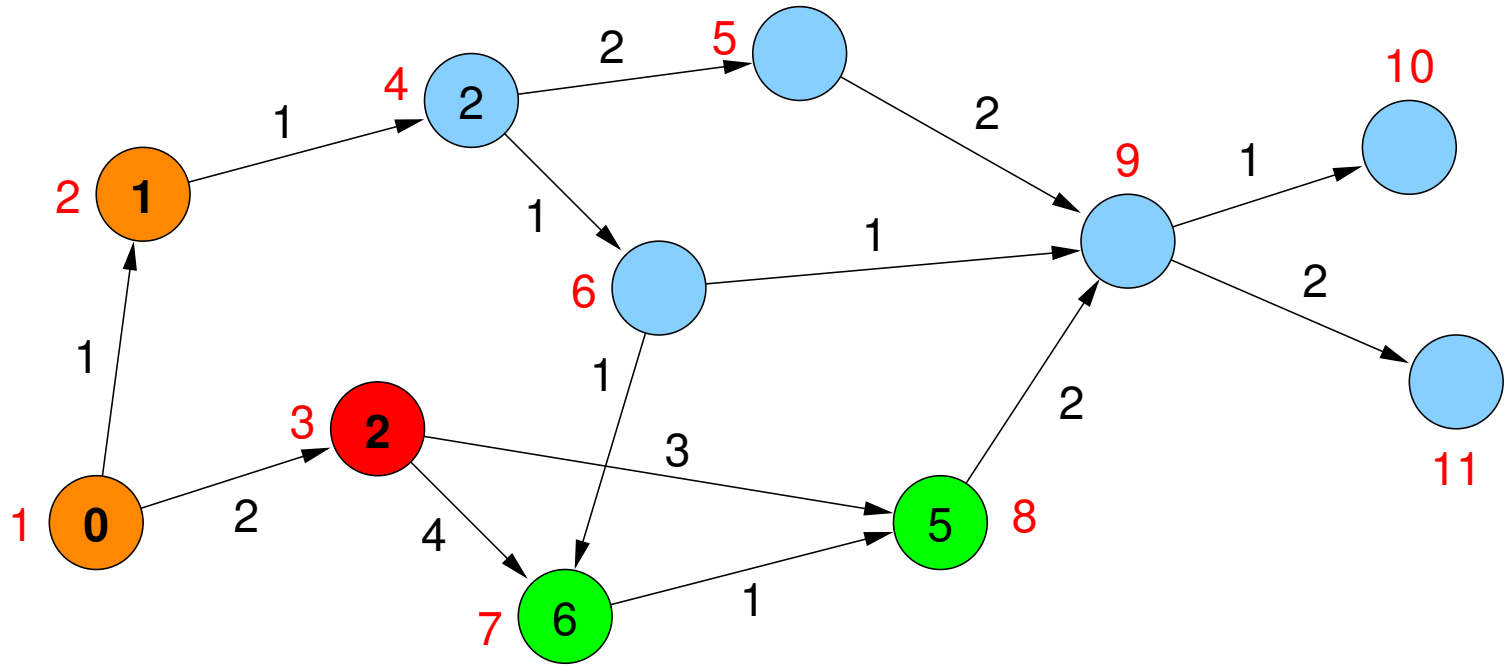


Kürzeste Wege

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Strategie:

- betrachte Knoten in Reihenfolge der topologischen Sortierung
- aktualisiere Distanzwerte

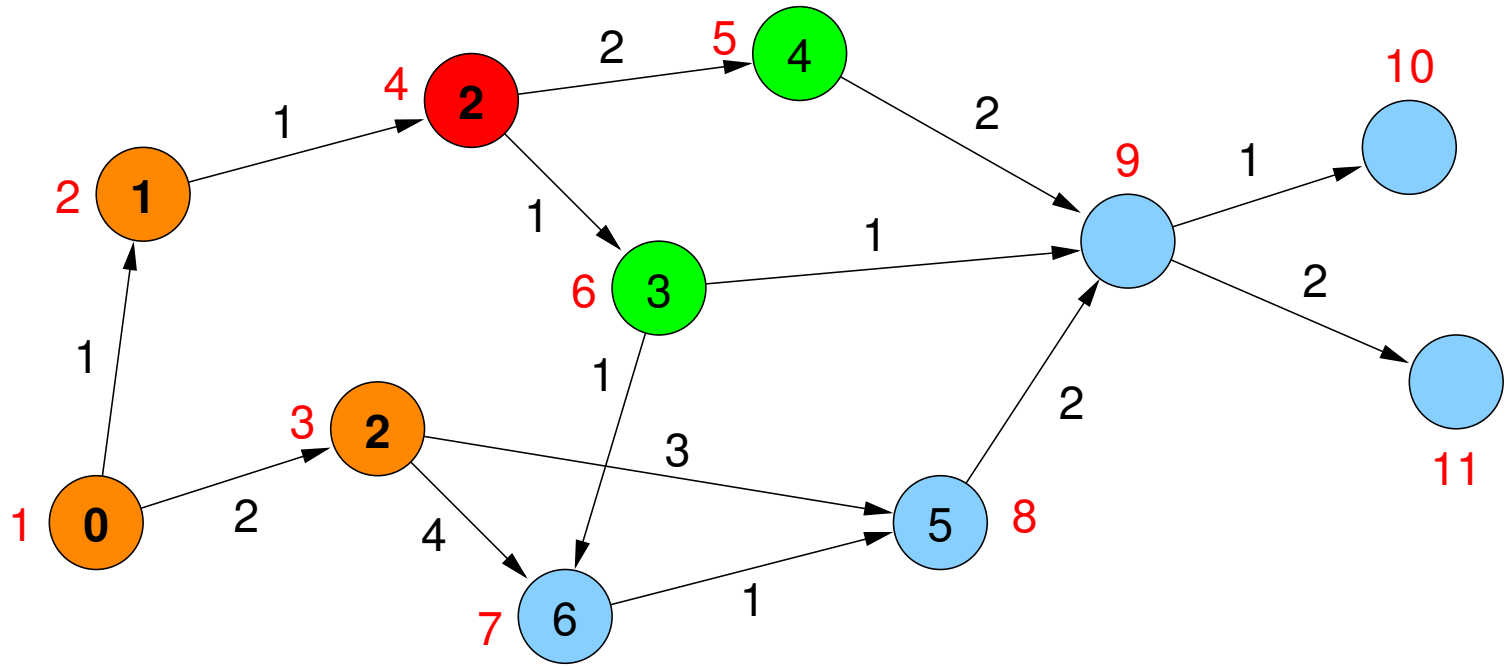


Kürzeste Wege

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Strategie:

- betrachte Knoten in Reihenfolge der topologischen Sortierung
- aktualisiere Distanzwerte

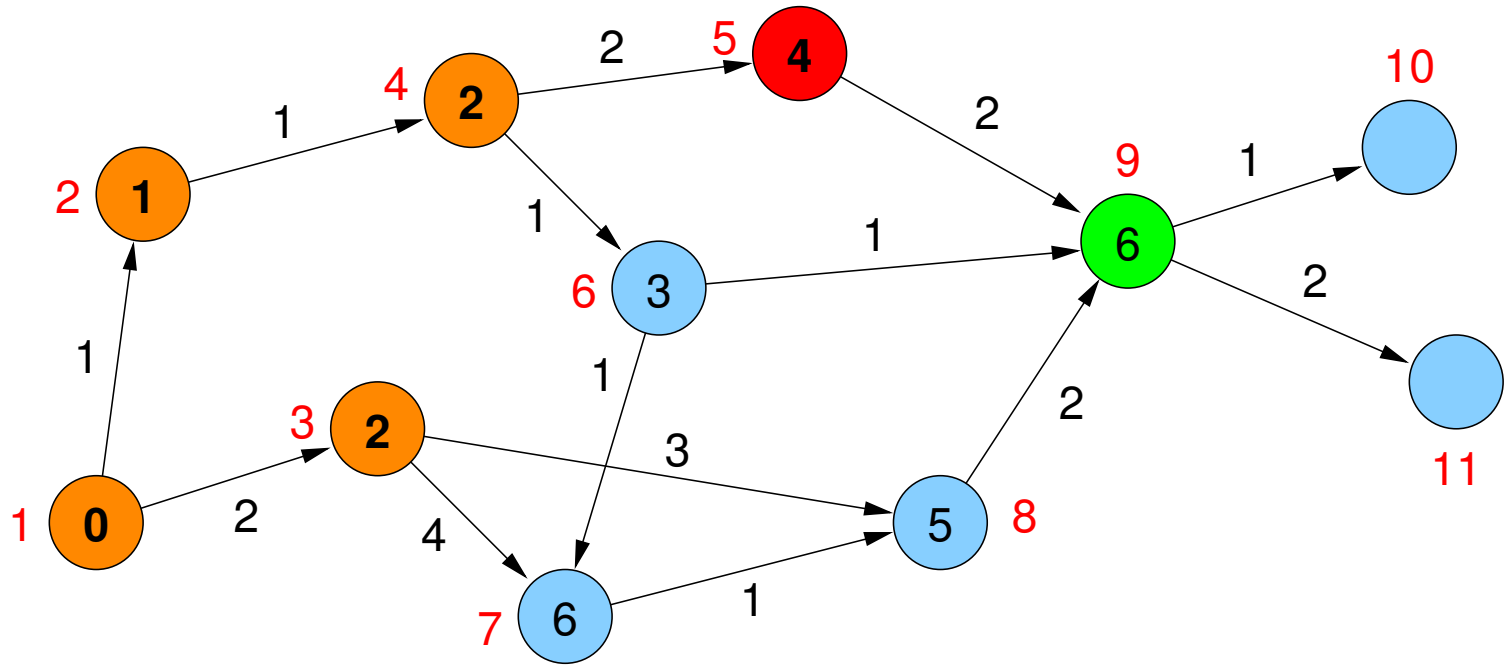


Kürzeste Wege

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Strategie:

- betrachte Knoten in Reihenfolge der topologischen Sortierung
- aktualisiere Distanzwerte

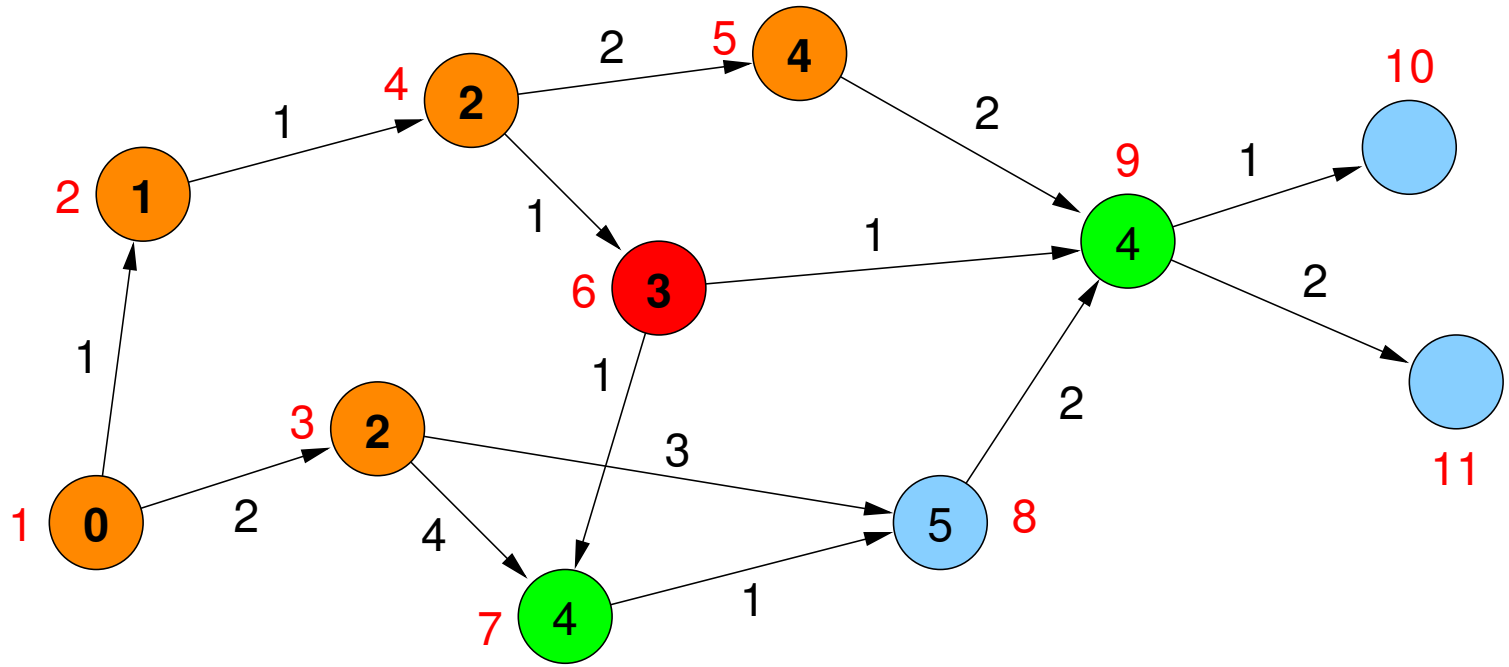


Kürzeste Wege

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Strategie:

- betrachte Knoten in Reihenfolge der topologischen Sortierung
- aktualisiere Distanzwerte

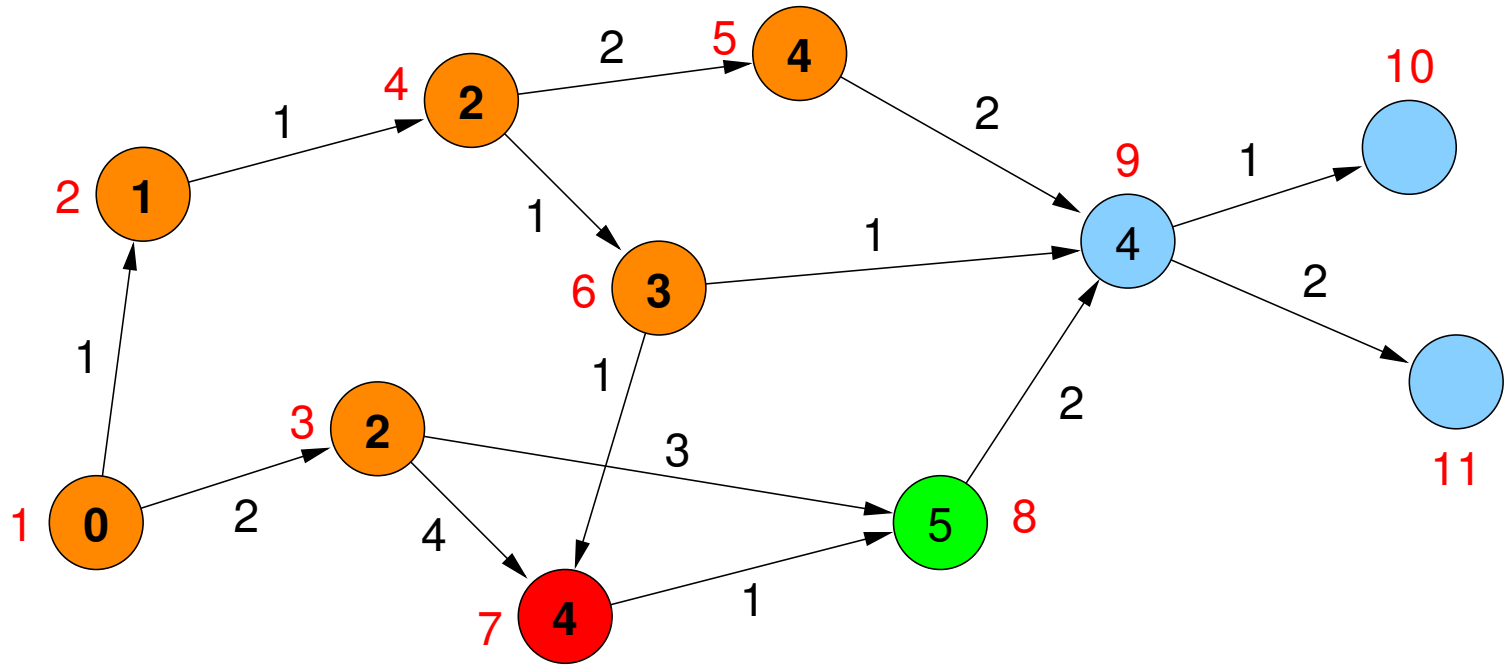


Kürzeste Wege

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Strategie:

- betrachte Knoten in Reihenfolge der topologischen Sortierung
- aktualisiere Distanzwerte

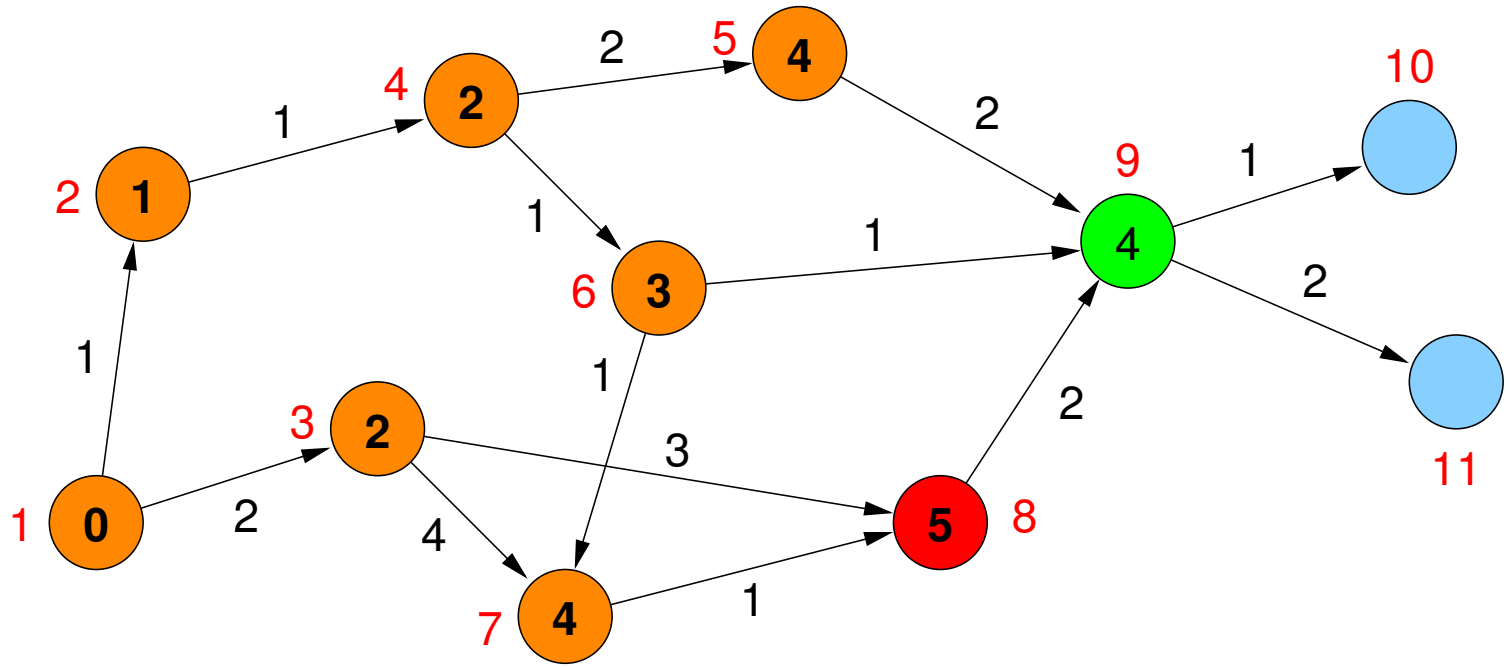


Kürzeste Wege

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Strategie:

- betrachte Knoten in Reihenfolge der topologischen Sortierung
- aktualisiere Distanzwerte

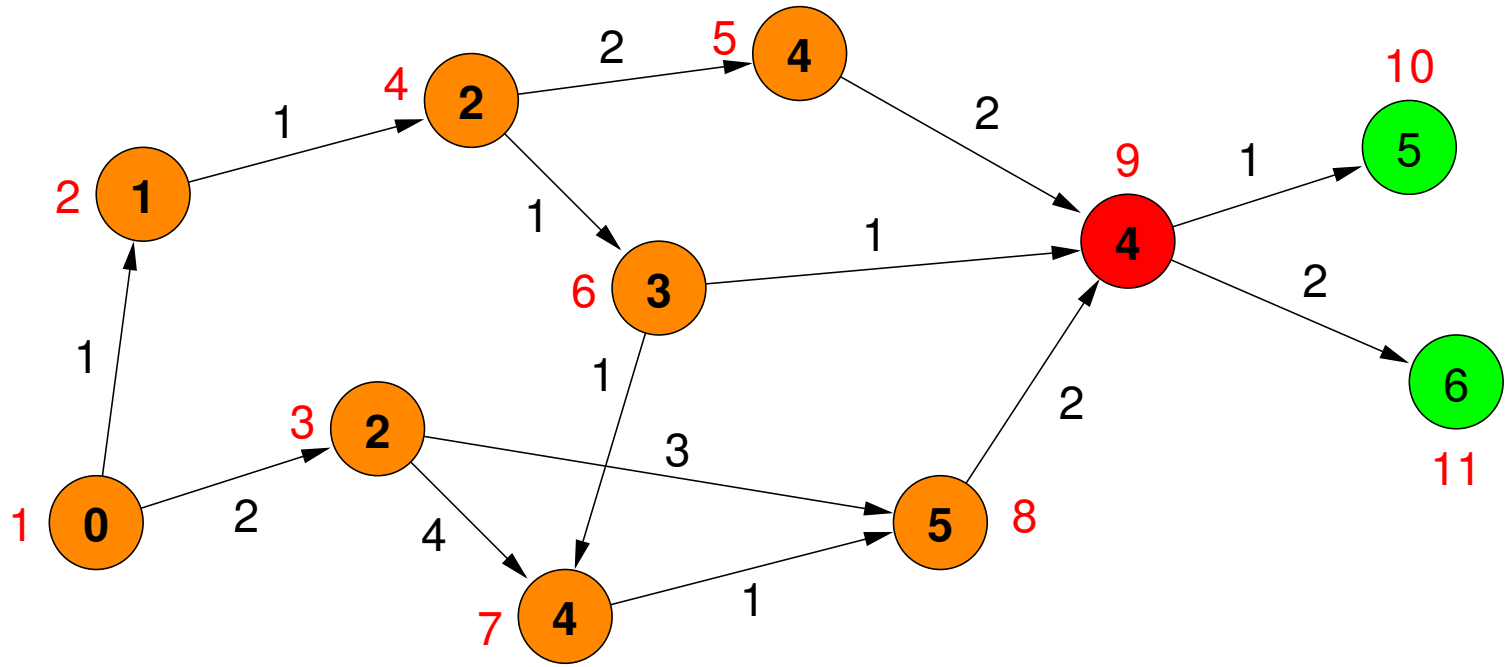


Kürzeste Wege

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Strategie:

- betrachte Knoten in Reihenfolge der topologischen Sortierung
- aktualisiere Distanzwerte

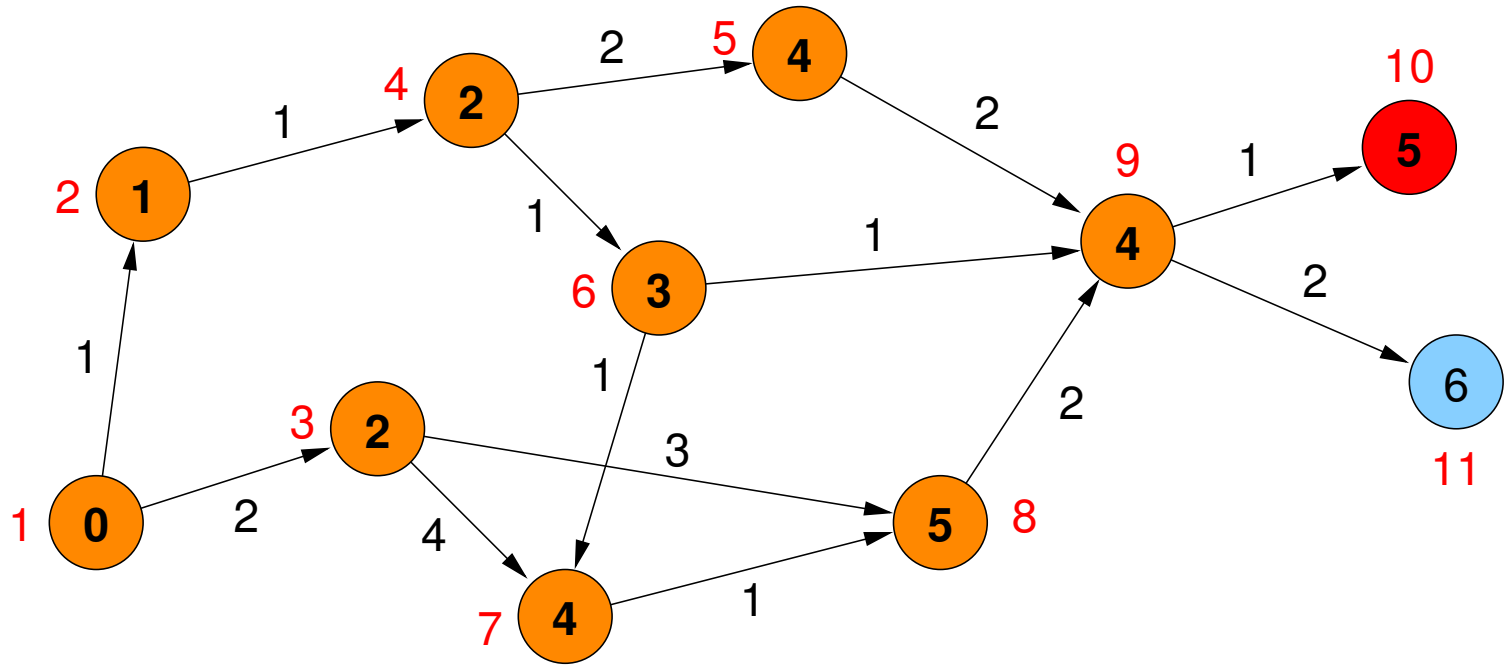


Kürzeste Wege

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Strategie:

- betrachte Knoten in Reihenfolge der topologischen Sortierung
- aktualisiere Distanzwerte

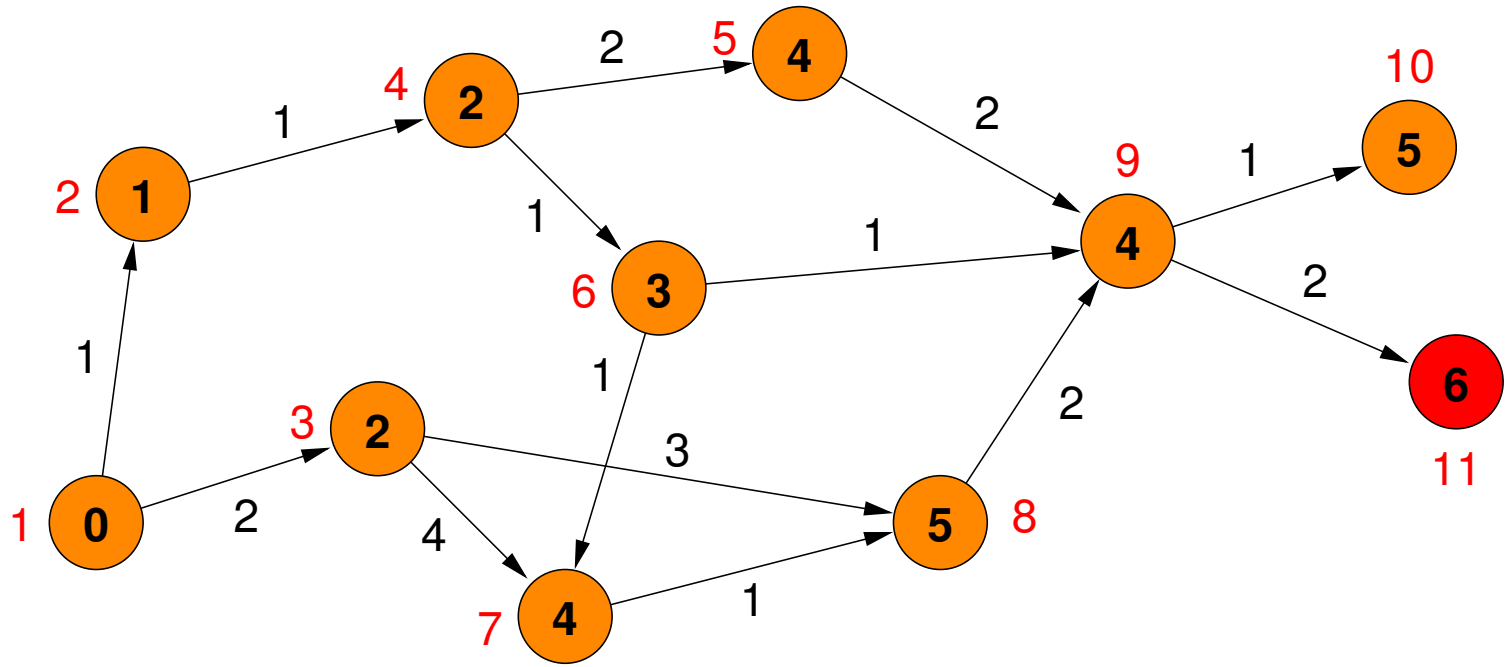


Kürzeste Wege

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Strategie:

- betrachte Knoten in Reihenfolge der topologischen Sortierung
- aktualisiere Distanzwerte



Kürzeste Wege

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Topologische Sortierung – warum funktioniert das?

- betrachte einen kürzesten Weg von s nach v
- der ganze Pfad beachtet die topologische Sortierung
- d.h., die Distanzen werden in der Reihenfolge der Knoten vom Anfang des Pfades zum Ende hin betrachtet
- damit ergibt sich für v der richtige Distanzwert

- ein Knoten x kann auch nie einen Wert erhalten, der echt kleiner als seine Distanz zu s ist
- die Kantenfolge von s zu x, die jeweils zu den Distanzwerten an den Knoten geführt hat, wäre dann ein kürzerer Pfad (Widerspruch)

Kürzeste Wege

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Allgemeine Strategie:

- Anfang: setze $d(s) = 0$ und
  für alle anderen Knoten v setze $d(v) = \infty$
- besuche Knoten in einer Reihenfolge, die sicherstellt, dass mindestens ein kürzester Weg von s zu jedem v in der Reihenfolge seiner Knoten besucht wird
- für jeden besuchten Knoten v aktualisiere die Distanzen der Knoten w mit $(v, w) \in E$, d.h. setze

$$d(w) = \min\{\ d(w),\ d(v) + c(v, w)\ \}$$

Kürzeste Wege

Topologische Sortierung

- verwende FIFO-Queue q
- verwalte für jeden Knoten einen Zähler für die noch nicht markierten eingehenden Kanten
- initialisiere q mit allen Knoten, die keine eingehende Kante haben (Quellen)
- nimm nächsten Knoten v aus q und
  markiere alle $(v, w) \in E$, d.h. dekrementiere Zähler für w
- falls der Zähler von w dabei Null wird, füge w in q ein
- wiederhole das, bis q leer wird

Kürzeste Wege

Topologische Sortierung

Korrektheit

- Knoten wird erst dann nummeriert, wenn alle Vorgänger nummeriert sind

Laufzeit

- für die Anfangswerte der Zähler muss der Graph einmal traversiert werden $\mathcal{O}(n+m)$
- danach wird jede Kante genau einmal betrachtet

$\Rightarrow$ gesamt: $\mathcal{O}(n+m)$

Test auf DAG-Eigenschaft

- topologische Sortierung erfasst genau dann alle Knoten, wenn der Graph ein DAG ist
- bei gerichteten Kreisen erhalten diese Knoten keine Nummer

Kürzeste Wege

DAG-Strategie

1. Topologische Sortierung der Knoten

   Laufzeit $\mathcal{O}(n+m)$

2. Aktualisierung der Distanzengemäß der topologischen Sortierung

   Laufzeit $\mathcal{O}(n+m)$

Gesamtlaufzeit: $\mathcal{O}(n+m)$

Kürzeste Wege für beliebige Graphen mit nicht-negativen Gewichten

Gegeben:

- beliebiger Graph
  (gerichtet oder ungerichtet, muss diesmal kein DAG sein)
- mit nicht-negativen Kantengewichten

$\Rightarrow$ keine Knoten mit Distanz $-\infty$

Problem:

- besuche Knoten eines kürzesten Weges in der richtigen Reihenfolge
- wie bei Breitensuche, jedoch diesmal auch mit Distanzen $\neq 1$

Lösung:

- besuche Knoten in der Reihenfolge der kürzesten Distanz zum Startknoten s

Kürzeste Pfade: SSSP / Dijkstra

Algorithmus 1 : Dijkstra-Algorithmus

Input : $G = (V, E), \quad c : E \to \mathbb{R}, \quad s \in V$

Output : Distanzen $d(s, v)$ zu allen $v \in V$

$P = \emptyset; \quad T = V;$

$d(s, v) = \infty$ for all $v \in V \setminus s;$

$d(s, s) = 0; \quad pred(s) = 0;$

while $P \neq V$ **do**

  $v = \text{argmin}_{v \in T}\{d(s, v)\};$

  $P = P \cup v; \quad T = T \setminus v;$

  forall the $(v, w) \in E$ **do**

    if $d(s, w) > d(s, v) + c(v, w)$ **then**

      $d(s, w) = d(s, v) + c(v, w);$

      $pred(w) = v;$

Algorithmus 2 : Dijkstra-Algorithmus für SSSP

Input : $G = (V, E)$, $c : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $s \in V$

Output : Distanzen $d[v]$ von s zu allen $v \in V$

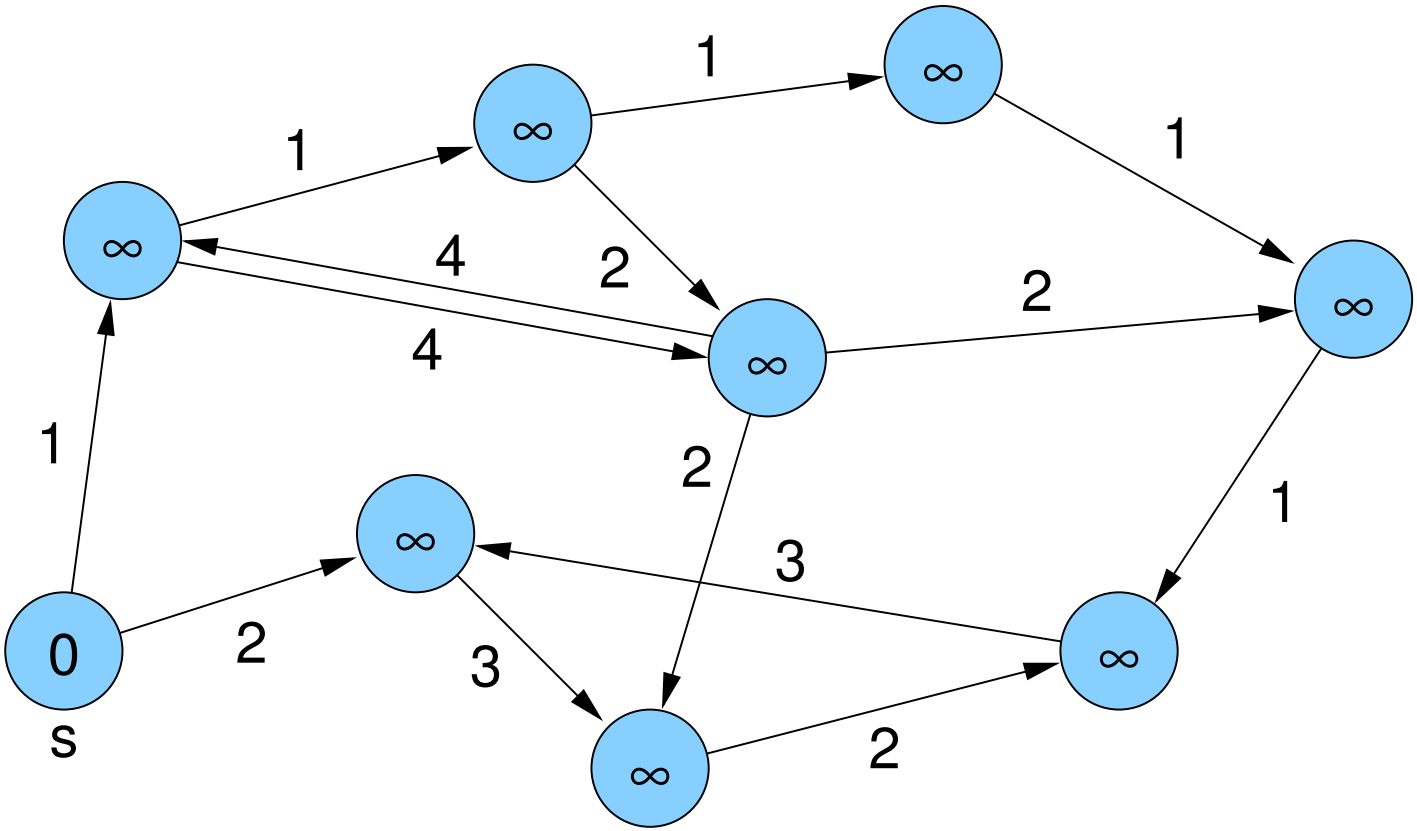
$d[v] = \infty$ for all $v \in V \setminus s$;
$d[s] = 0$; $pred[s] = \perp$;
$pq = \langle\rangle$; pq.insert$(s, 0)$;
while $\neg pq.empty()$ **do**
  $v = pq$.deleteMin();
  forall the $(v, w) \in E$ **do**
    newDist $= d[v] + c(v, w)$;
    if $newDist < d[w]$ **then**
      $pred[w] = v$;
      if $d[w] == \infty$ **then** pq.insert$(w$, newDist$)$;
      else pq.decreaseKey$(w$, newDist$)$;
      $d[w] =$ newDist;

Dijkstra-Algorithmus

- setze Startwert $d(s, s) = 0$ und zunächst $d(s, v) = \infty$
- verwende Prioritätswarteschlange, um die Knoten zusammen mit ihren aktuellen Distanzen zuspeichern
- am Anfang nur Startknoten (mit Distanz 0) in Priority Queue
- dann immer nächsten Knoten v (mit kleinster Distanz) entnehmen, endgültige Distanz dieses Knotens v steht nun fest
- betrachte alle Nachbarn von v,
  füge sie ggf. in die PQ ein bzw.
  aktualisiere deren Priorität in der PQ

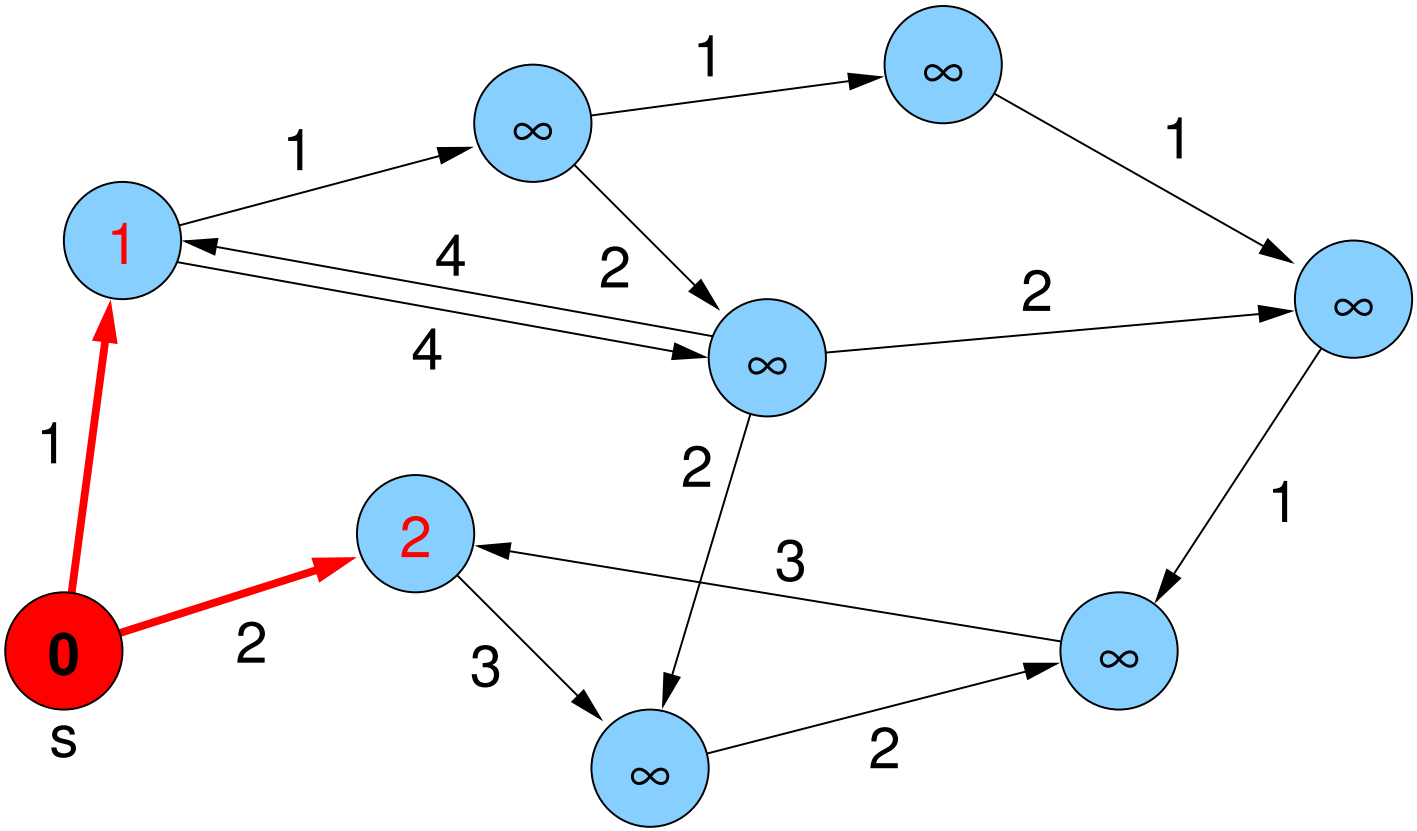
Dijkstra-Algorithmus

Beispiel:



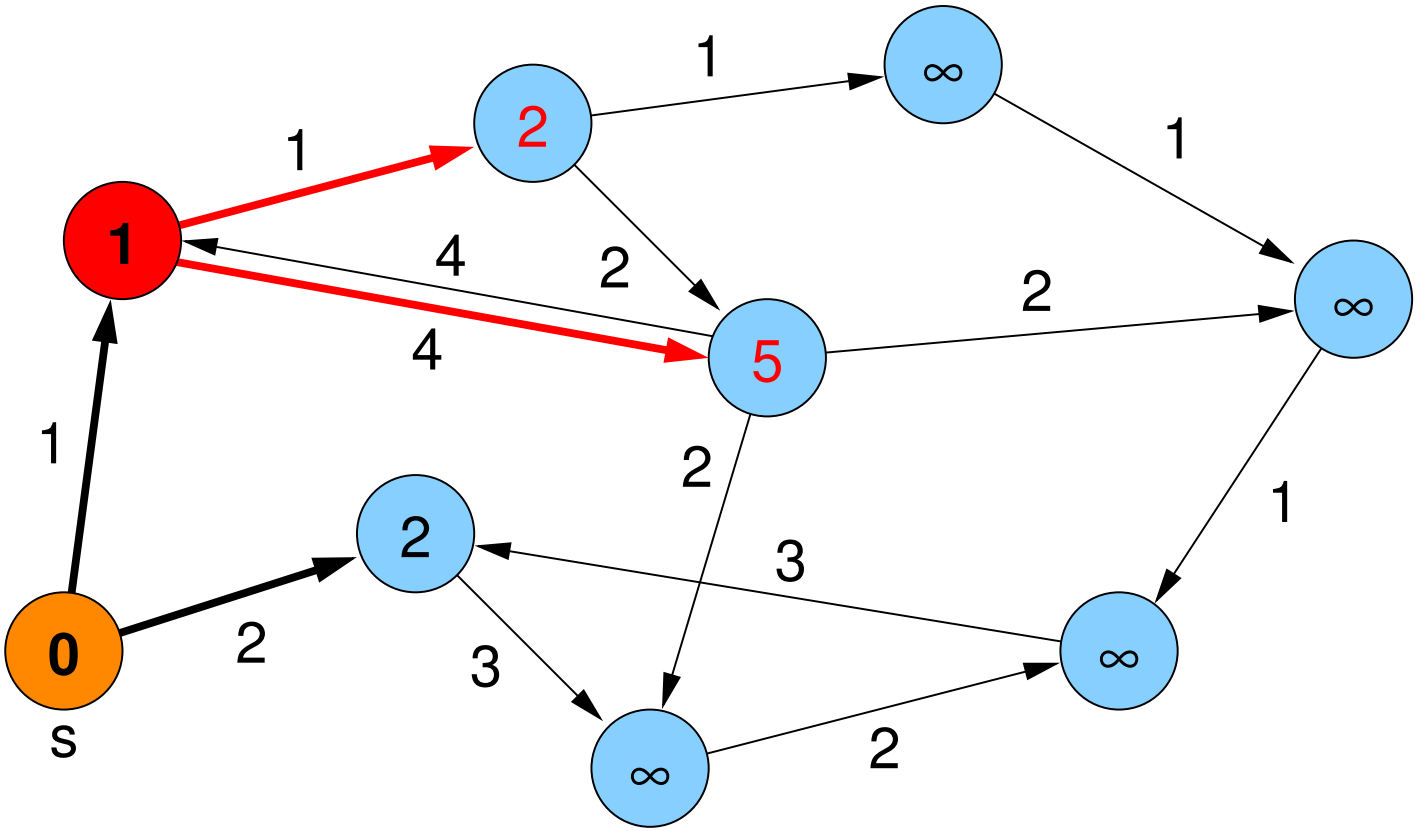
Dijkstra-Algorithmus

Beispiel:



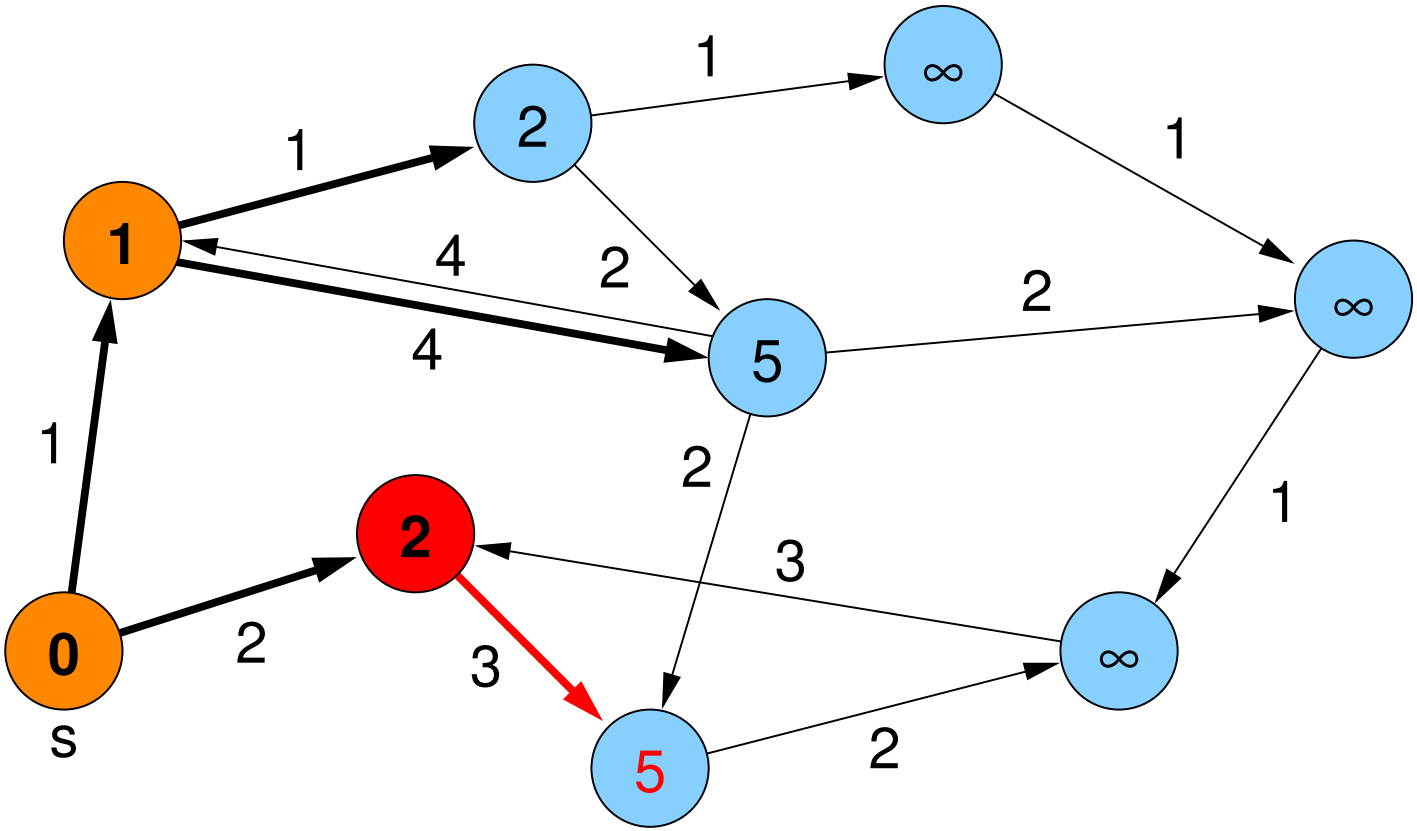
Dijkstra-Algorithmus

Beispiel:



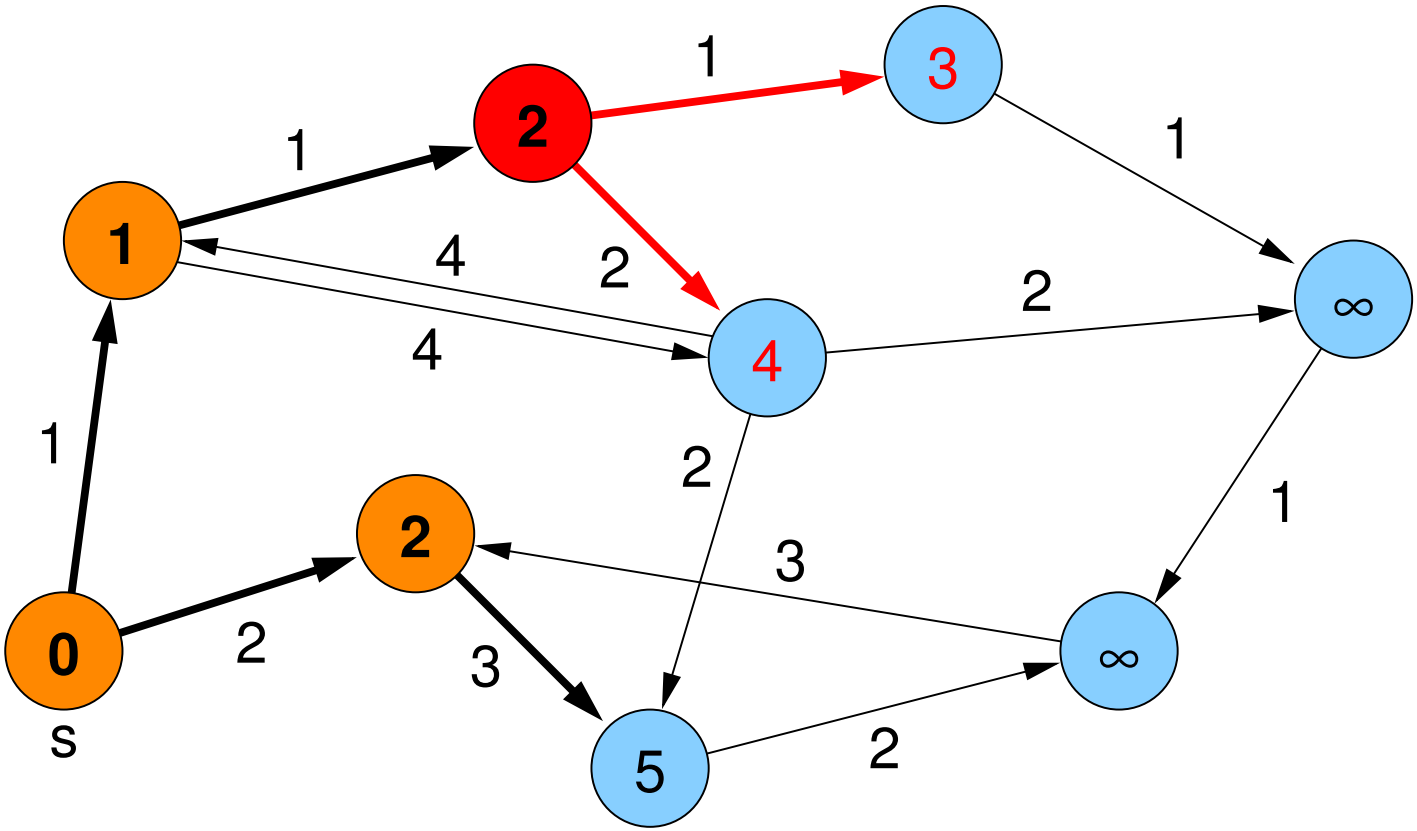
Dijkstra-Algorithmus

Beispiel:



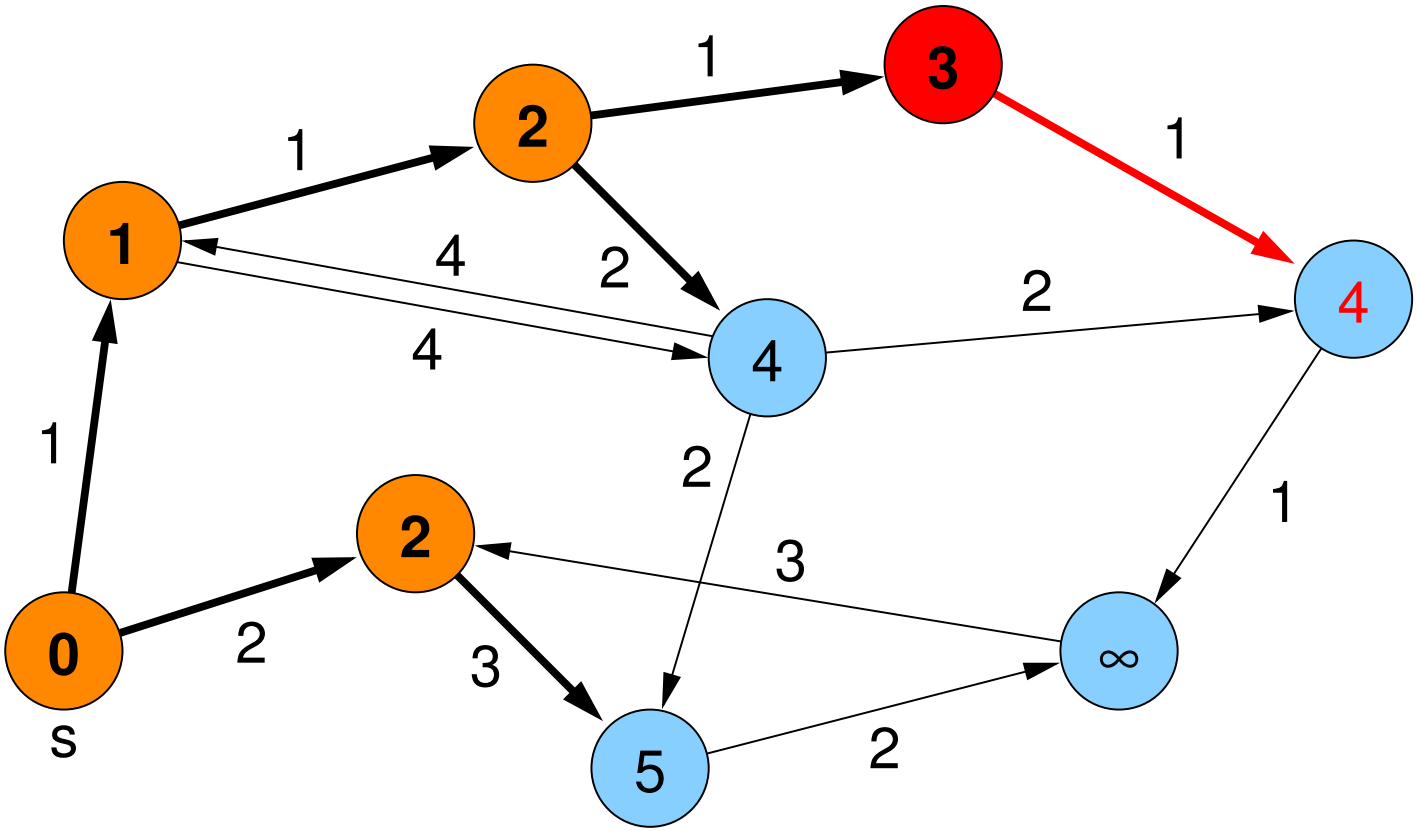
Dijkstra-Algorithmus

Beispiel:



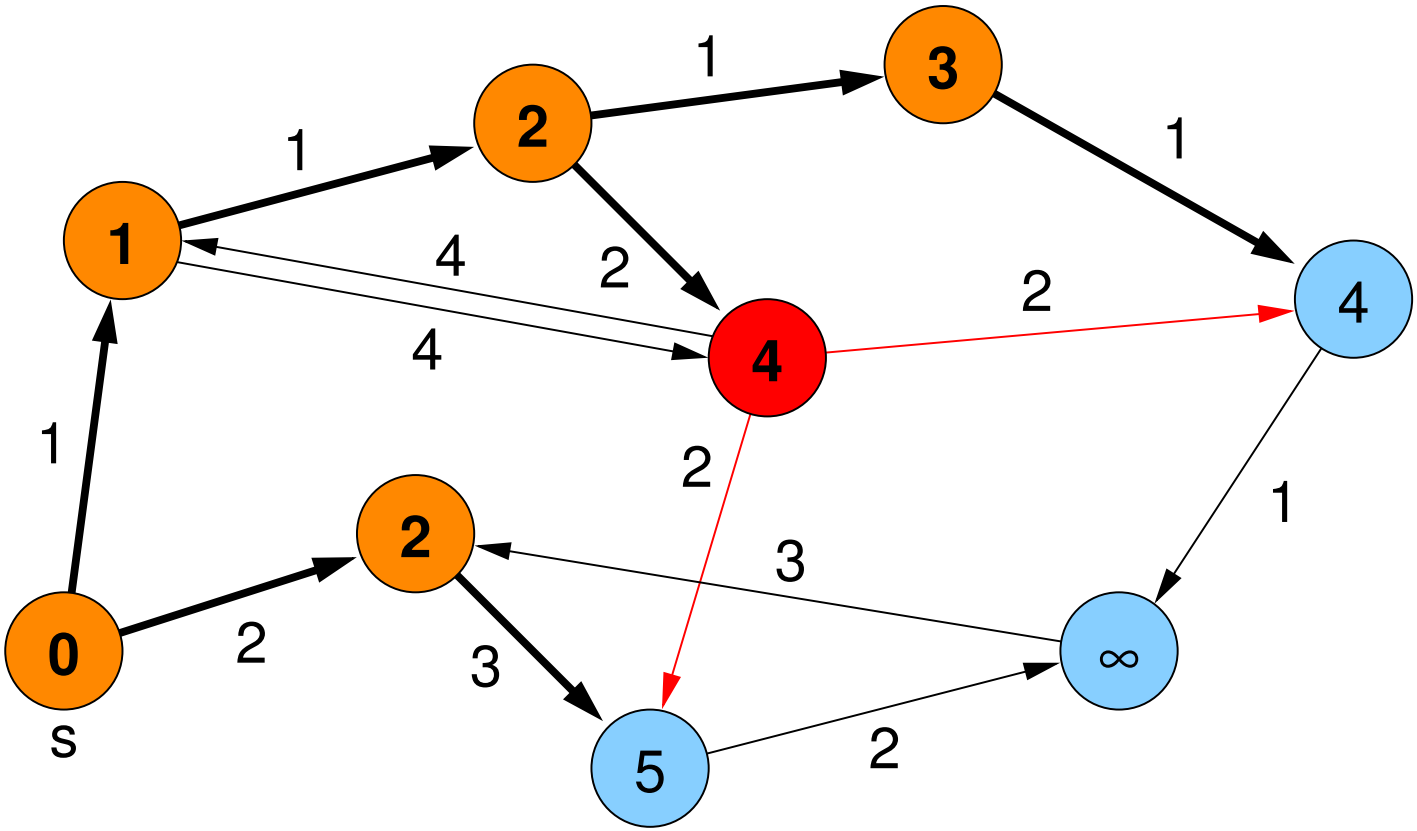
Dijkstra-Algorithmus

Beispiel:



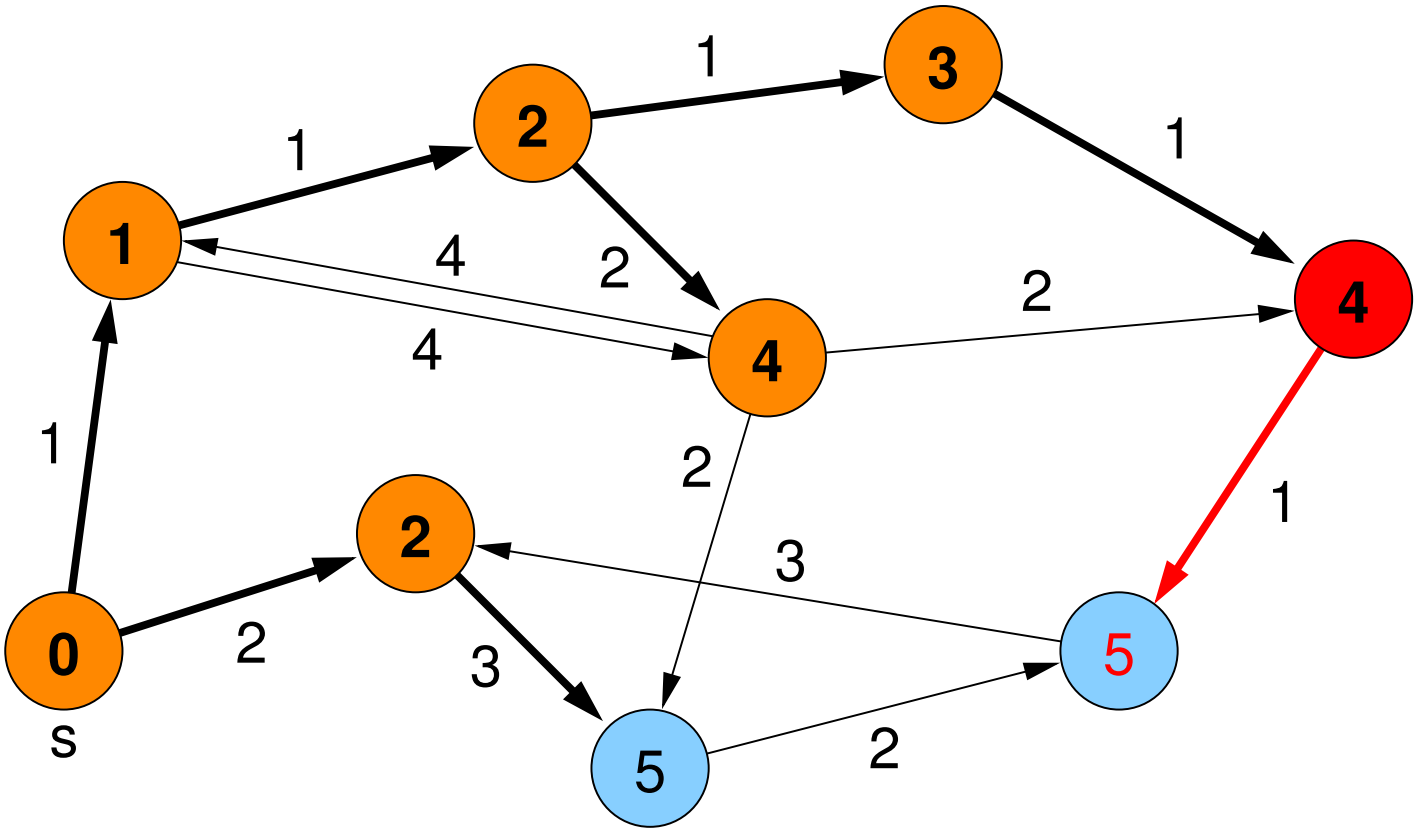
Dijkstra-Algorithmus

Beispiel:



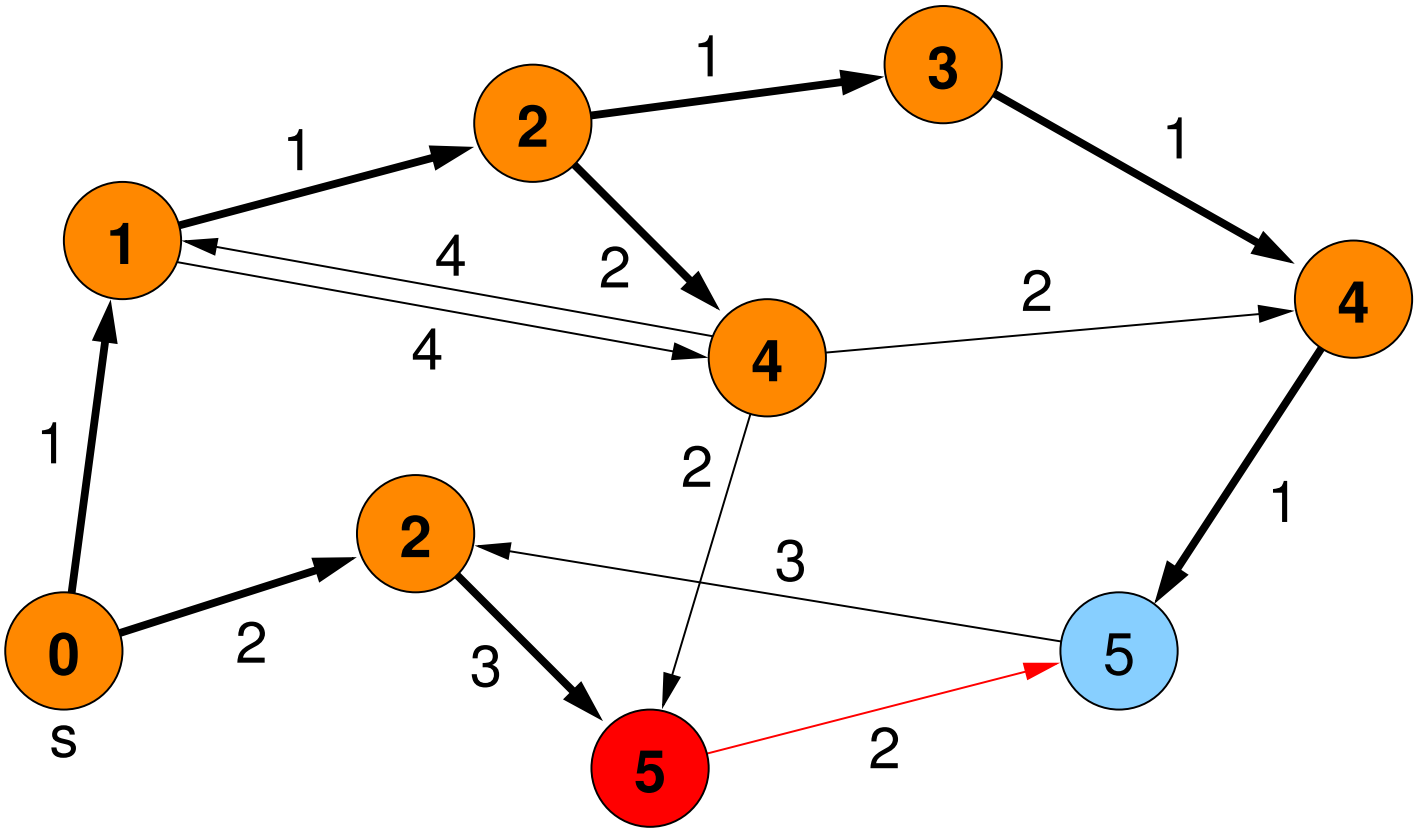
Dijkstra-Algorithmus

Beispiel:



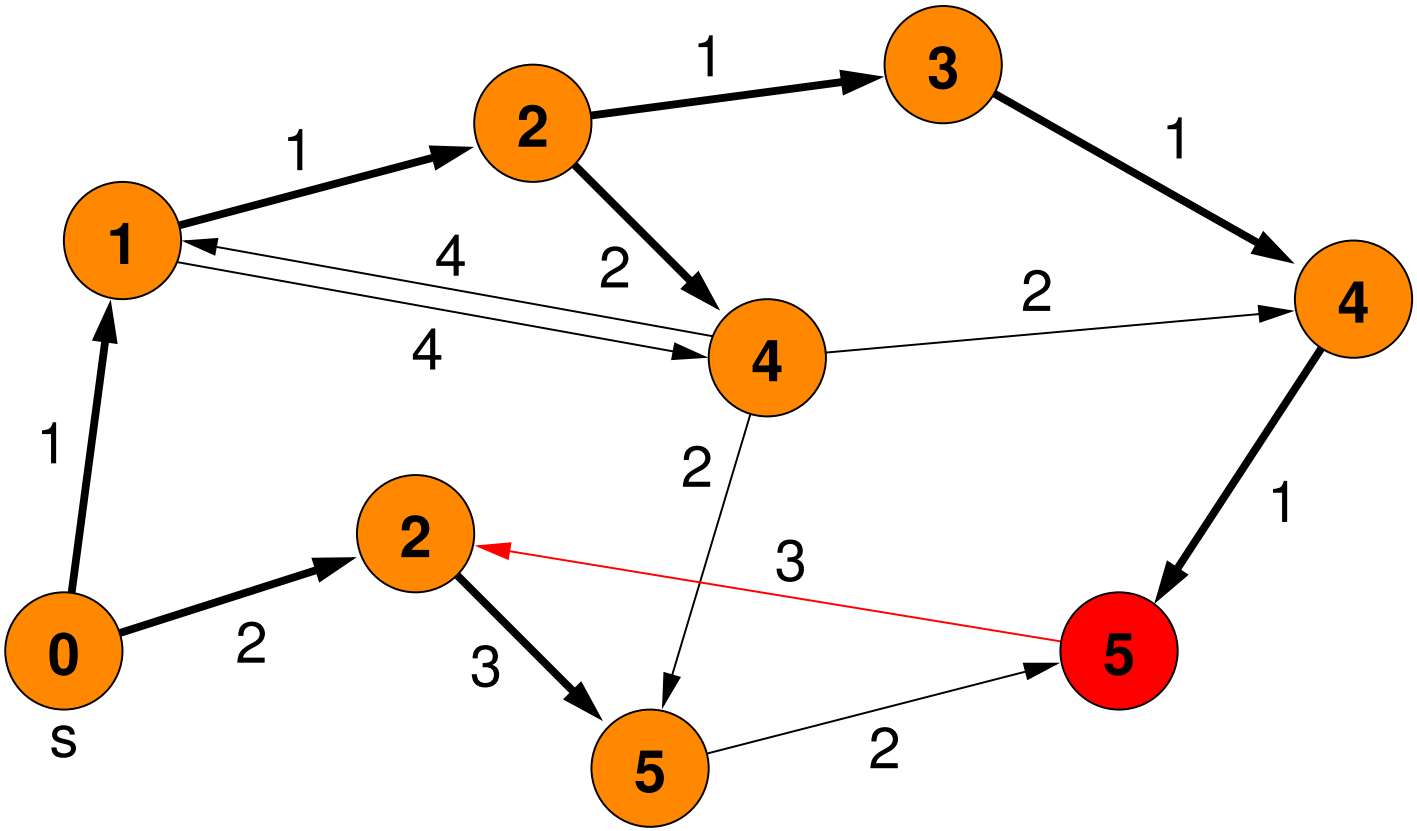
Dijkstra-Algorithmus

Beispiel:



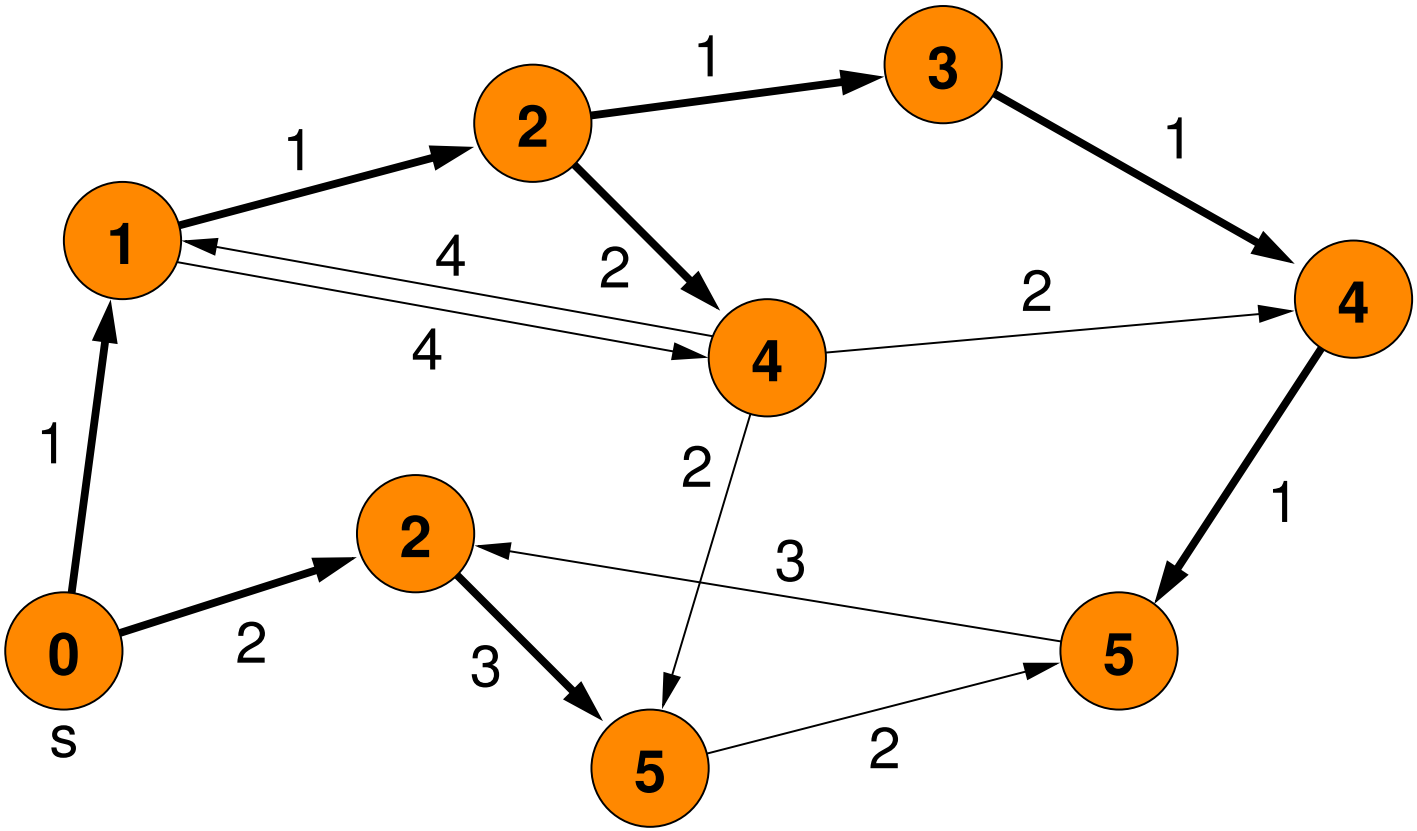
Dijkstra-Algorithmus

Beispiel:



Dijkstra-Algorithmus

Beispiel:



Dijkstra-Algorithmus

Korrektheit:

- Annahme: Algorithmus liefert für w einen zu kleinen Wert $d(s, w)$
- sei w der erste Knoten, für den die Distanz falsch festgelegt wird (kann nicht s sein, denn die Distanz $d(s, s)$ bleibt immer 0)
- kann nicht sein, weil $d(s, w)$ nur dann aktualisiert wird, wenn man über einen von s schon erreichten Knoten v mit Distanz $d(s, v)$ den Knoten w über die Kante (v, w) mit Distanz $d(s, v) + c(v, w)$ erreichen kann
- d.h. $d(s, v)$ müsste schon falsch gewesen sein (Widerspruch zur Annahme, dass w der erste Knoten mit falscher Distanz war)

Dijkstra-Algorithmus

- Annahme: Algorithmus liefert für w einen zu großen Wert $d(s, w)$
- sei w der Knoten mit der kleinsten (wirklichen) Distanz, für den der Wert $d(s, w)$ falsch festgelegt wird (wenn es davon mehrere gibt, der Knoten, für den die Distanz zuletzt festgelegt wird)
- kann nicht sein, weil $d(s, w)$ immer aktualisiert wird, wenn man über einen von s schon erreichten Knoten v mit Distanz $d(s, v)$ den Knoten w über die Kante (v, w) mit Distanz $d(s, v) + c(v, w)$ erreichen kann (dabei steht $d(s, v)$ immer schon fest, so dass auch die Länge eines kürzesten Wegs über v zu w richtig berechnet wird)
- d.h. entweder wurde auch der Wert von v zu klein berechnet (Widerspruch zur Def. von w) oder die Distanz von v wurde noch nicht festgesetzt
- weil die berechneten Distanzwerte monoton wachsen, kann letzteres nur passieren, wenn v die gleiche Distanz hat wie w (auch Widerspruch zur Def. von w)

Dijkstra-Algorithmus

- Datenstruktur: Prioritätswarteschlange
  (z.B. Fibonacci Heap: amortisierte Komplexität $\mathcal{O}(1)$ für `insert` und `decreaseKey`, $\mathcal{O}(\log n)$ `deleteMin`)

- Komplexität:
  - $\mathcal{O}(n)$ `insert`
  - $\mathcal{O}(n)$ `deleteMin`
  - $\mathcal{O}(m)$ `decreaseKey`

  $\Rightarrow$ $\mathcal{O}(m + n \log n)$

- aber: nur für nichtnegative Kantengewichte(!)

Monotone Priority Queues

Beobachtung:

- aktuelles Distanz-Minimum der verbleibenden Knoten ist beim Dijkstra-Algorithmus monoton wachsend

Monotone Priority Queue

- Folge der entnommenen Elemente hat monoton steigende Werte
- effizientere Implementierung möglich, falls Kantengewichte ganzzahlig

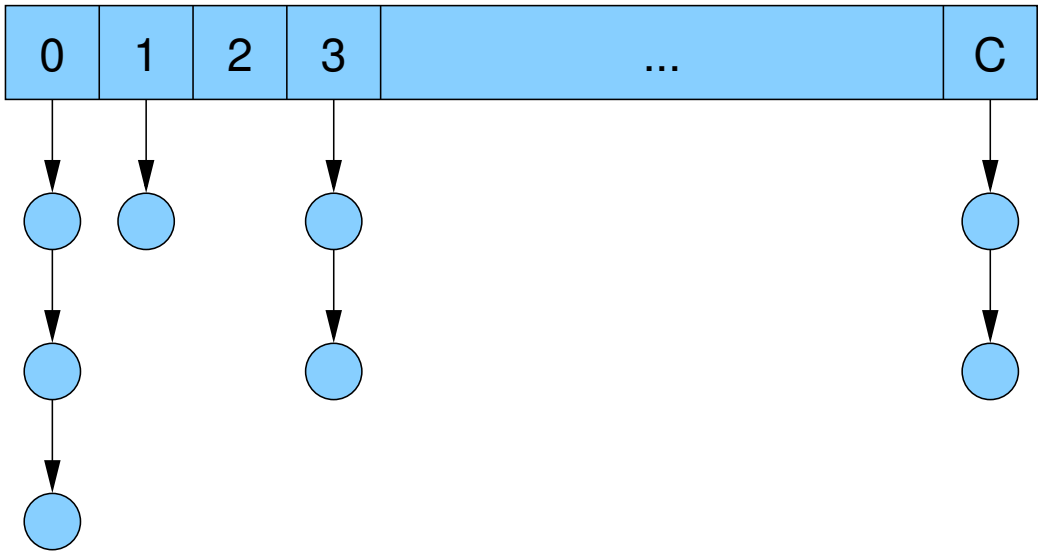
Annahme: alle Kantengewichte im Bereich $[0, C]$

Konsequenz für Dijkstra-Algorithmus:

$\Rightarrow$ enthaltene Distanzwerte immer im Bereich $[d, d + C]$

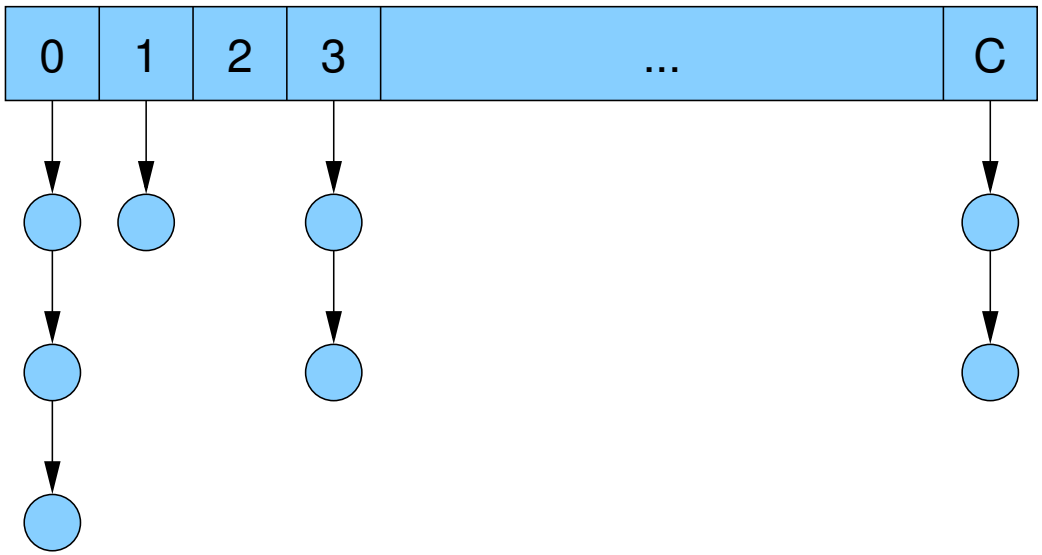
Bucket Queue

- Array B aus $C + 1$ Listen
- Variable d_{min} für aktuelles Distanzminimum $\bmod(C + 1)$



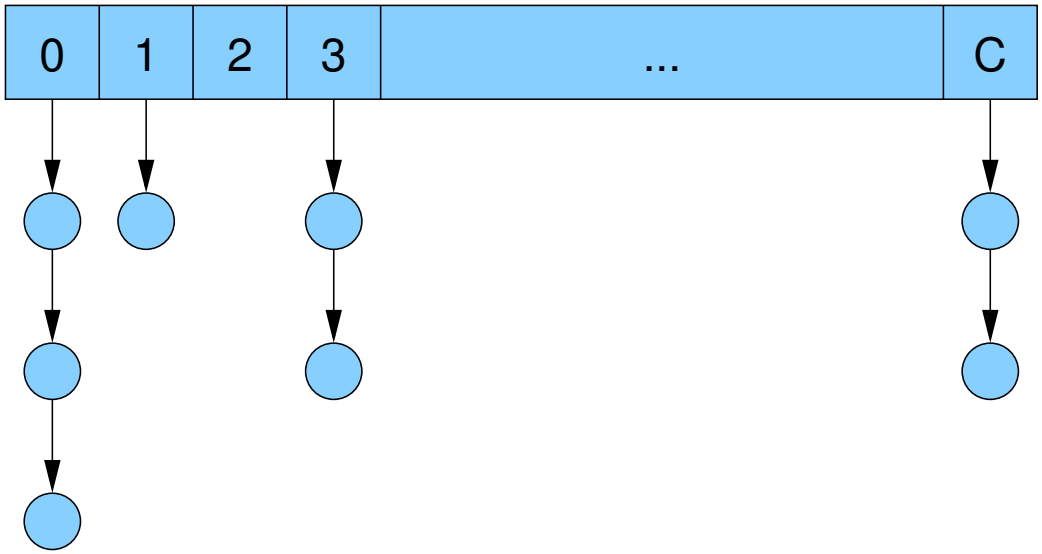
Bucket Queue

- jeder Knoten v mit aktueller Distanz $d[v]$ in Liste $B[d[v] \bmod (C+1)]$
- alle Knoten in Liste $B[d]$ haben dieselbe Distanz, weil alle aktuellen Distanzen im Bereich $[d, d+C]$ liegen



Bucket Queue / Operationen

- insert(v): fügt v in Liste $B[d[v] \bmod (C+1)]$ ein ($\mathcal{O}(1)$)
- decreaseKey(v): entfernt v aus momentaner Liste ($\mathcal{O}(1)$ falls Handle auf Listenelement in v gespeichert) und fügt v in Liste $B[d[v] \bmod (C+1)]$ ein ($\mathcal{O}(1)$)
- deleteMin(): solange $B[d_{\min}] = \emptyset$, setze $d_{\min} = (d_{\min} + 1) \bmod (C+1)$.
  Nimm dann einen Knoten u aus $B[d_{\min}]$ heraus ($\mathcal{O}(C)$)



Dijkstra mit Bucket Queue

- insert, decreaseKey: $\mathcal{O}(1)$
- deleteMin: $\mathcal{O}(C)$
- Dijkstra: $\mathcal{O}(m + C \cdot n)$

- lässt sich mit Radix Heaps noch verbessern
- verwendet exponentiell wachsende Bucket-Größen
- Details in der Vorlesung Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen
- Laufzeit ist dann $\mathcal{O}(m + n \log C)$

Kürzeste Wege für beliebige Graphen mit beliebigen Gewichten

Gegeben:

- beliebiger Graph mit beliebigen Kantengewichten

$\Rightarrow$ Anhängen einer Kante an einen Weg kann zur Verkürzung des Weges (Kantengewichtssumme) führen (wenn Kante negatives Gewicht hat)

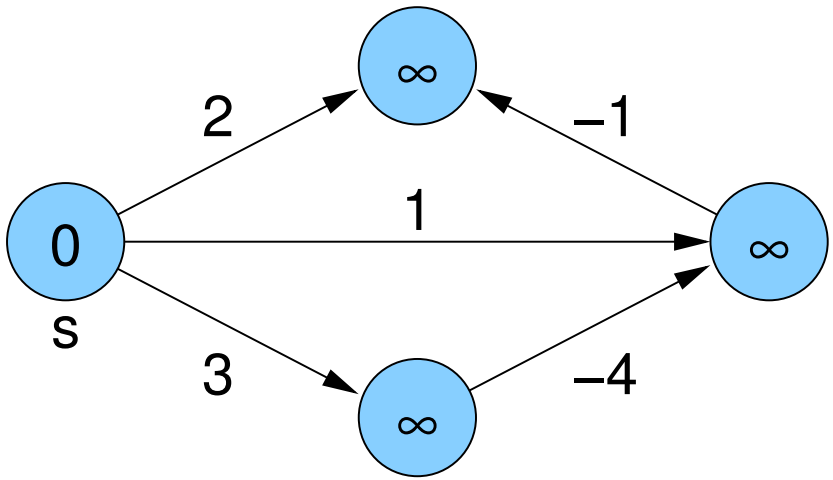
$\Rightarrow$ es kann negative Kreise und Knoten mit Distanz $-\infty$ geben

Problem:

- besuche Knoten eines kürzesten Weges in der richtigen Reihenfolge
- Dijkstra kann nicht mehr verwendet werden, weil Knoten nicht unbedingt in der Reihenfolge der kürzesten Distanz zum Startknoten s besucht werden

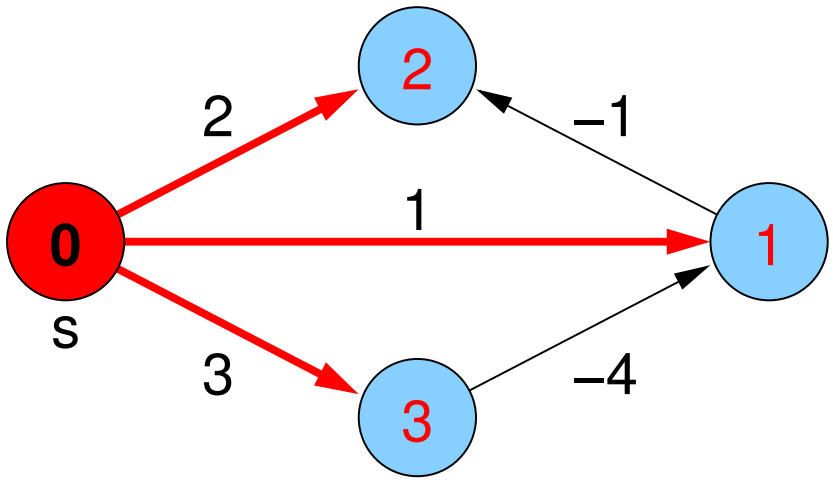
Kürzeste Wege für beliebige Graphen mit beliebigen Gewichten

Gegenbeispiel für Dijkstra-Algorithmus:



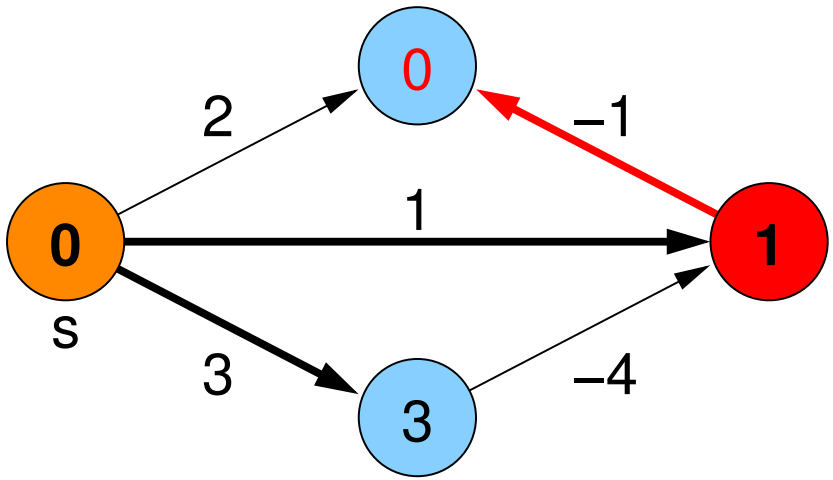
Kürzeste Wege für beliebige Graphen mit beliebigen Gewichten

Gegenbeispiel für Dijkstra-Algorithmus:



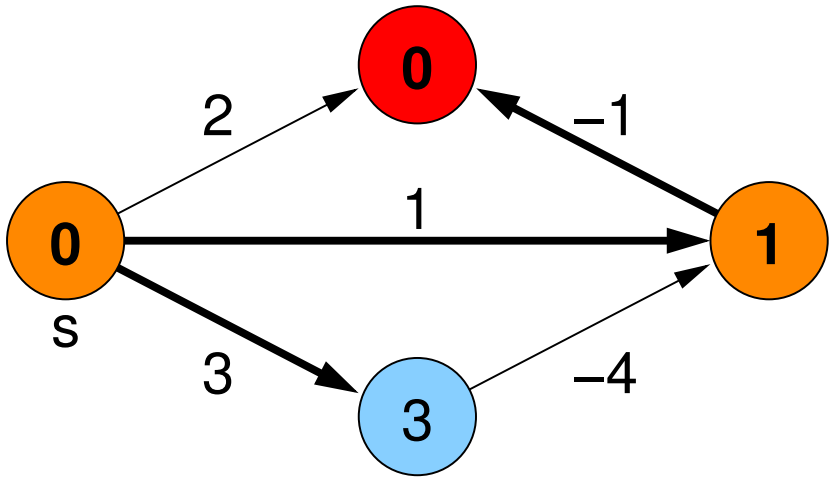
Kürzeste Wege für beliebige Graphen mit beliebigen Gewichten

Gegenbeispiel für Dijkstra-Algorithmus:



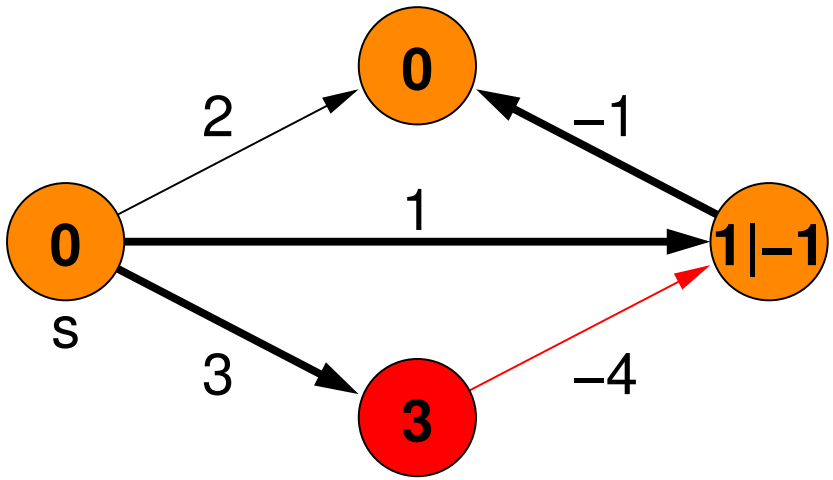
Kürzeste Wege für beliebige Graphen mit beliebigen Gewichten

Gegenbeispiel für Dijkstra-Algorithmus:



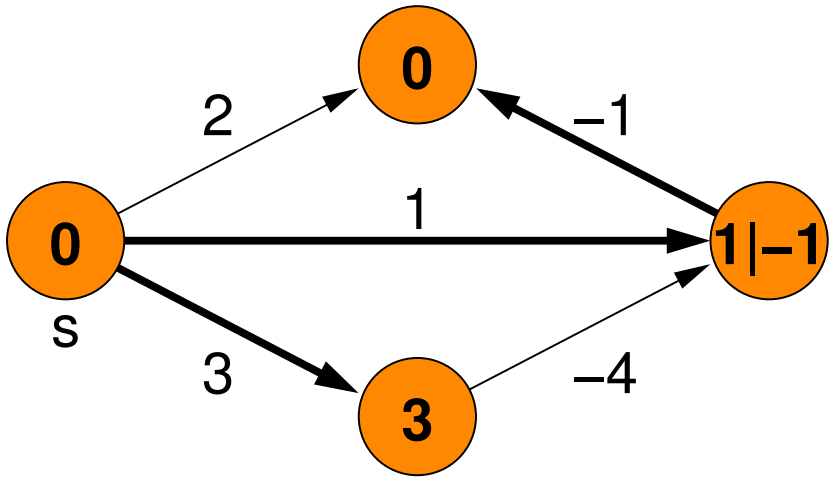
Kürzeste Wege für beliebige Graphen mit beliebigen Gewichten

Gegenbeispiel für Dijkstra-Algorithmus:



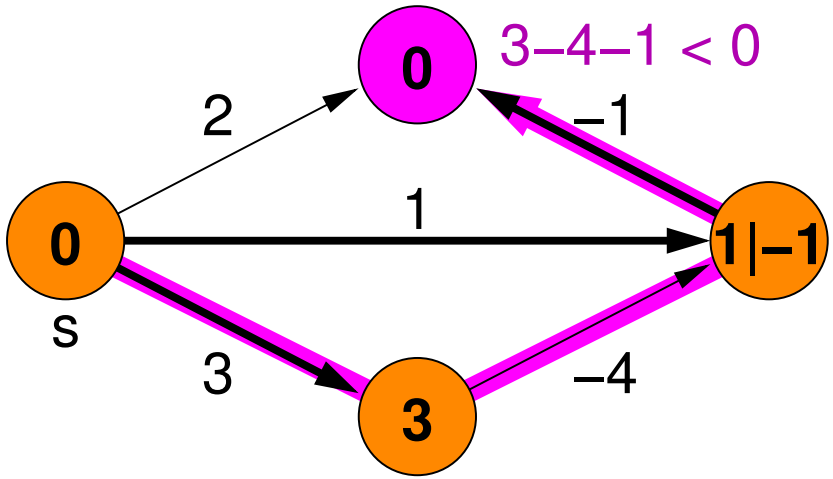
Kürzeste Wege für beliebige Graphen mit beliebigen Gewichten

Gegenbeispiel für Dijkstra-Algorithmus:



Kürzeste Wege für beliebige Graphen mit beliebigen Gewichten

Gegenbeispiel für Dijkstra-Algorithmus:



Kürzeste Wege für beliebige Graphen mit beliebigen Gewichten

Lemma

Für jeden Knoten v mit $d(s,v) > -\infty$ gibt es einen einfachen Pfad (ohne Kreis) von s nach v der Länge $d(s,v)$.

Beweis.

- Weg mit Kreis mit Kantengewichtssumme ≥ 0:
  Entfernen des Kreises erhöht nicht die Kosten
- Weg mit Kreis mit Kantengewichtssumme < 0:
  Distanz von s ist $-\infty$

Bellman-Ford-Algorithmus

Folgerung

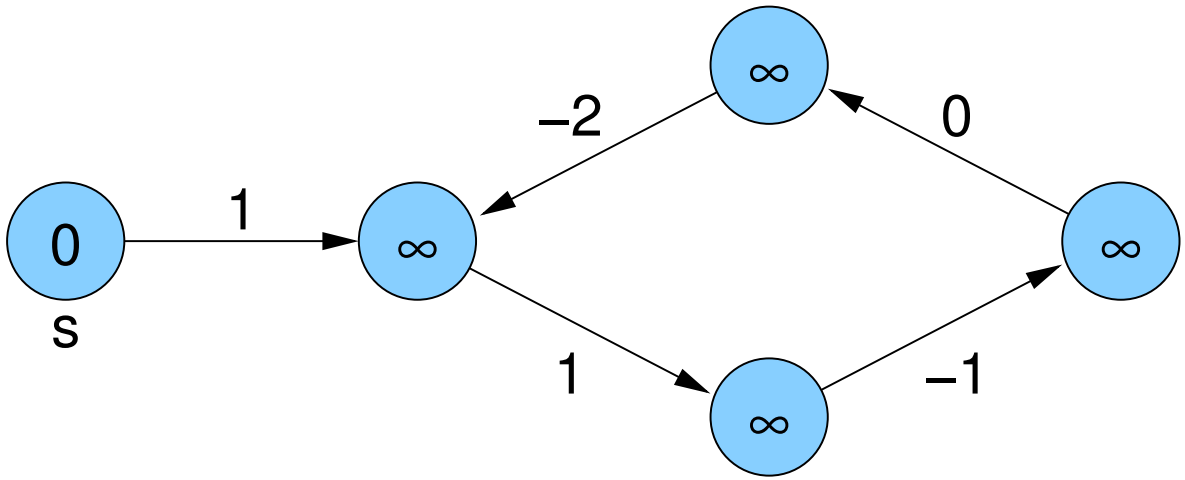
In einem Graph mit n Knoten gibt es für jeden erreichbaren Knoten v mit $d(s,v) > -\infty$ einen kürzesten Weg bestehend aus $< n$ Kanten zwischen s und v.

Strategie:

- anstatt kürzeste Pfade in Reihenfolge wachsender Gewichtssumme zu berechnen, betrachte sie in Reihenfolge steigender Kantenanzahl
- durchlaufe $(n-1)$-mal alle Kanten im Graph
  und aktualisiere die Distanz
- dann alle kürzesten Wege berücksichtigt

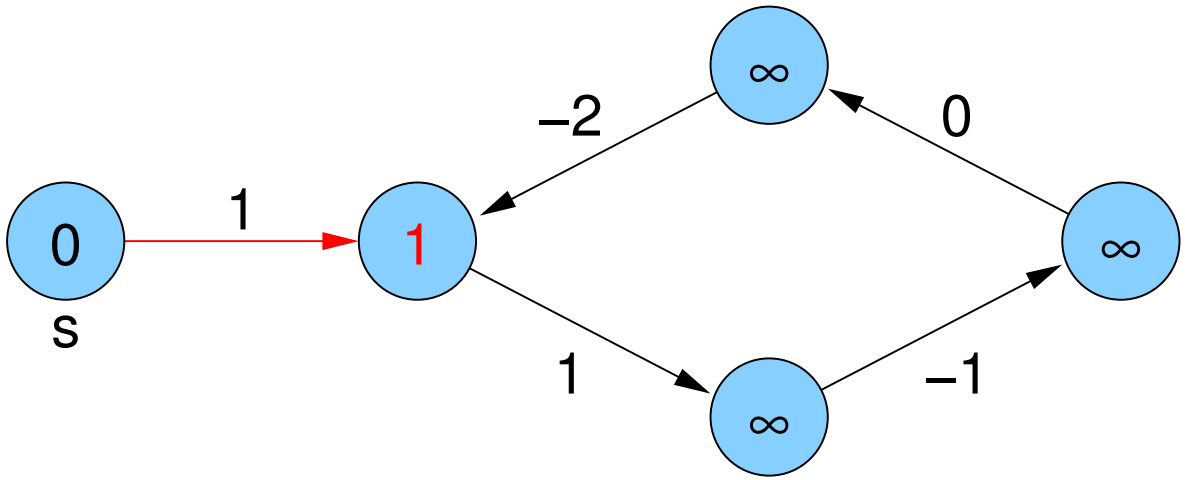
Bellman-Ford-Algorithmus

Problem: Erkennung negativer Kreise



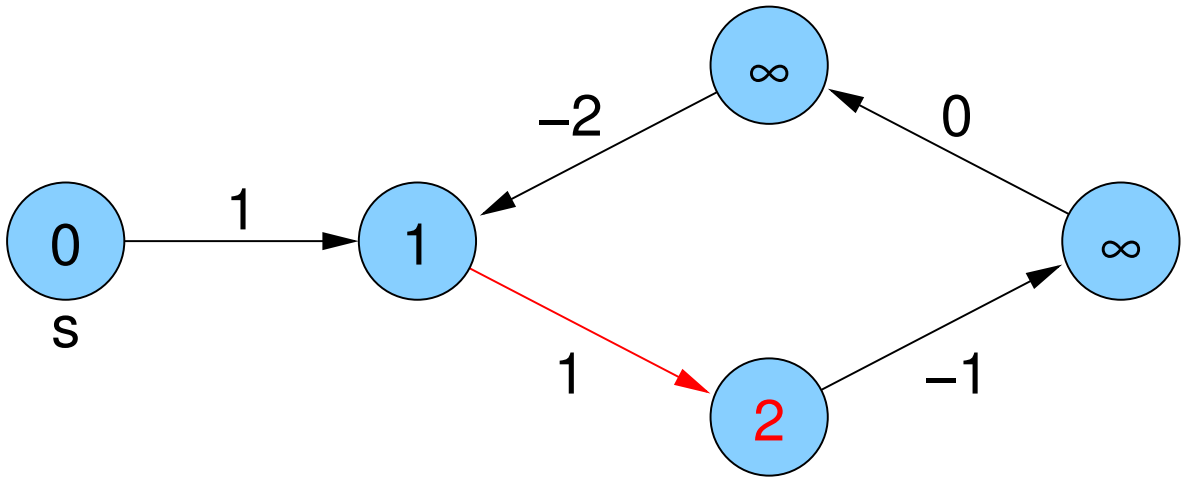
Bellman-Ford-Algorithmus

Problem: Erkennung negativer Kreise



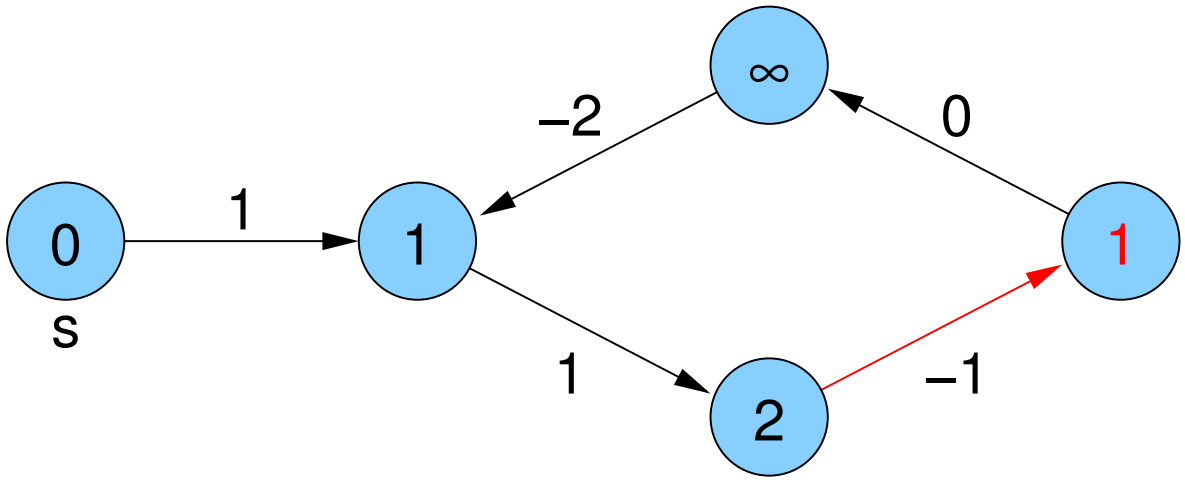
Bellman-Ford-Algorithmus

Problem: Erkennung negativer Kreise



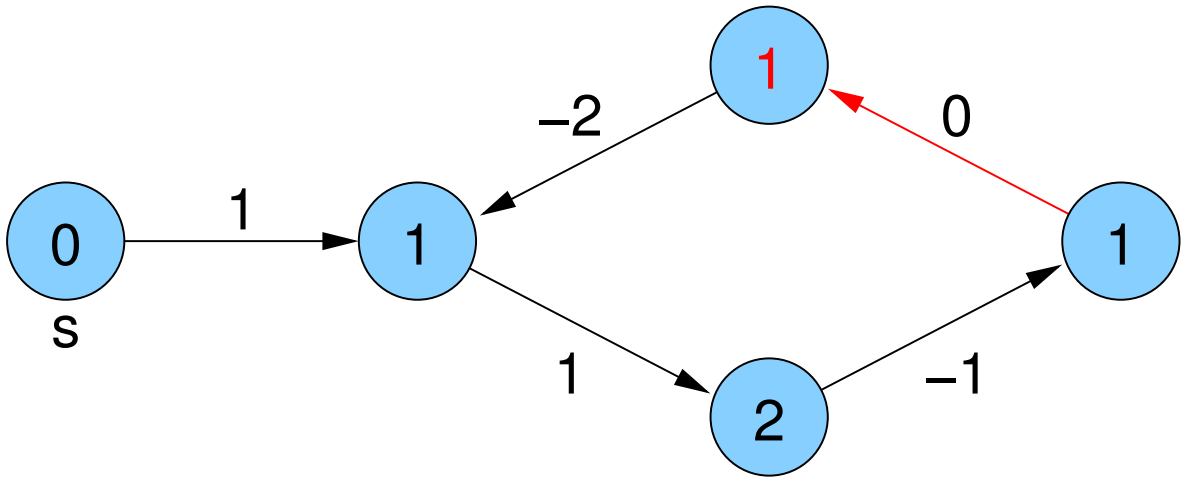
Bellman-Ford-Algorithmus

Problem: Erkennung negativer Kreise



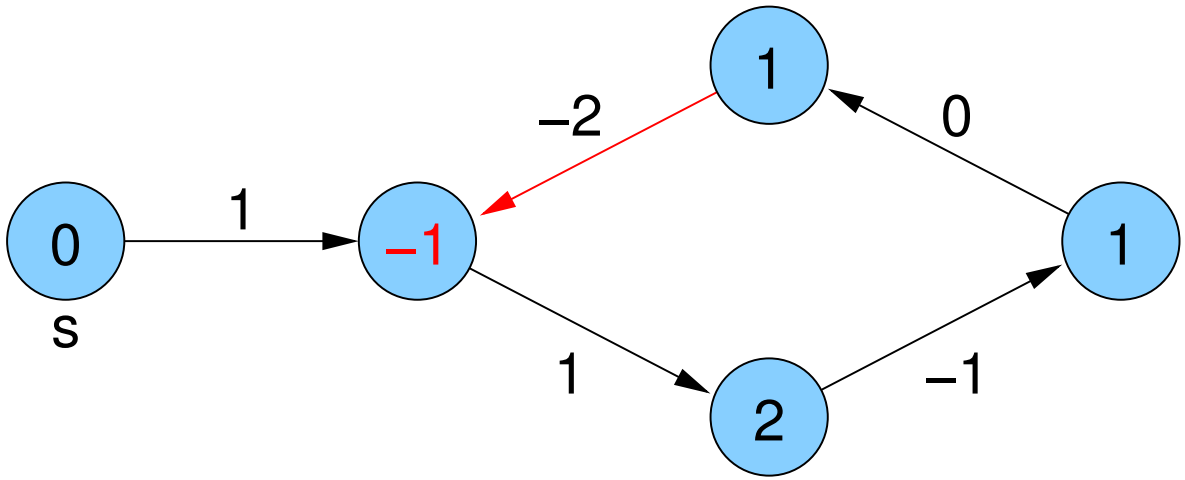
Bellman-Ford-Algorithmus

Problem: Erkennung negativer Kreise



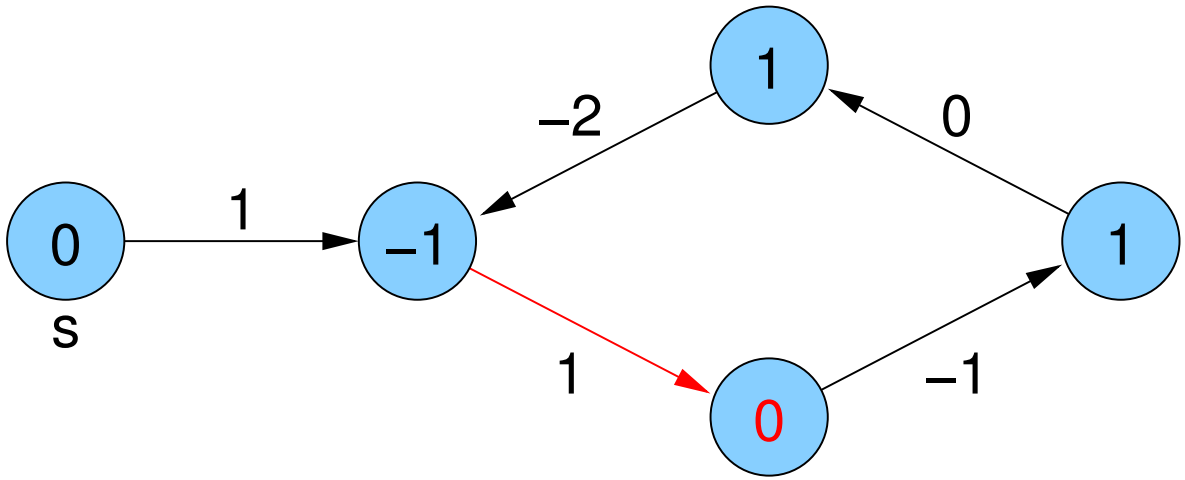
Bellman-Ford-Algorithmus

Problem: Erkennung negativer Kreise



Bellman-Ford-Algorithmus

Problem: Erkennung negativer Kreise



Bellman-Ford-Algorithmus

Keine Distanzerniedrigung möglich:

- Annahme: zu einem Zeitpunkt gilt für alle Kanten (v, w) $d[v] + c(v, w) \geq d[w]$
- dann gilt (per Induktion) für jeden Weg p von s nach w, dass $d[s] + c(p) \geq d[w]$ für alle Knoten w
- falls sichergestellt, dass zu jedem Zeitpunkt für kürzesten Weg p von s nach w gilt $d[w] \geq c(p)$, dann ist $d[w]$ zum Schluss genau die Länge eines kürzesten Pfades von s nach w (also korrekte Distanz)

Bellman-Ford-Algorithmus

Zusammenfassung:

- keine Distanzerniedrigung mehr möglich
  ($d[v] + c(v, w) \geq d[w]$ für alle w):
  fertig, alle $d[w]$ korrekt für alle w

- Distanzerniedrigung möglich selbst noch in n-ter Runde
  ($d[v] + c(v, w) < d[w]$ für ein w):
  Es gibt einen negativen Kreis, also Knoten w mit Distanz $-\infty$.

Bellman-Ford-Algorithmus

```
void BellmanFord(Node s) {
  d[s] = 0;   parent[s] = s;
  for (int i = 0; i < n − 1; i++) {   // n − 1 Runden
    foreach (e = (v, w) ∈ E)
      if (d[v] + c(e) < d[w]) {   // kürzerer Weg?
        d[w] = d[v] + c(e);
        parent[w] = v;
      }
  }
  foreach (e = (v, w) ∈ E)
    if (d[v] + c(e) < d[w]) {   // kürzerer Weg in n-ter Runde?
      infect(w);
}
```

Bellman-Ford-Algorithmus

```
void infect(Node v) {   // −∞-Knoten
  if (d[v] > −∞) {
    d[v] = −∞;
    foreach (e = (v, w) ∈ E)
      infect(w);
  }
}
```

Gesamtlaufzeit: $\mathcal{O}(m \cdot n)$

Bellman-Ford-Algorithmus

Bestimmung der Knoten mit Distanz $-\infty$:

- betrachte alle Knoten, die in der n-ten Phase noch Distanzverbesserung erfahren
- aus jedem Kreis mit negativem Gesamtgewicht muss mindestens ein Knoten dabei sein
- jeder von diesen Knoten aus erreichbare Knoten muss Distanz $-\infty$ bekommen
- das erledigt hier die infect-Funktion
- wenn ein Knoten zweimal auftritt (d.h. der Wert ist schon $-\infty$), wird die Rekursion abgebrochen

Bellman-Ford-Algorithmus

Bestimmung eines negativen Zyklus:

- bei den oben genannten Knoten sind vielleicht auch Knoten, die nur an negativen Kreisen über ausgehende Kanten angeschlossen sind, die selbst aber nicht Teil eines negativen Kreises sind
- Rückwärtsverfolgung der parent-Werte, bis sich ein Knoten wiederholt
- Kanten vom ersten bis zum zweiten Auftreten bilden einen negativen Zyklus

Bellman-Ford-Algorithmus

Ursprüngliche Idee der Updates vorläufiger Distanzwerte stammt von Lester R. Ford Jr.

Verbesserung (Richard E. Bellman / Edward F. Moore):

- verwalte eine FIFO-Queue von Knoten, zu denen ein kürzerer Pfad gefunden wurde und deren Nachbarn am anderen Ende ausgehender Kanten noch auf kürzere Wege geprüft werden müssen
- wiederhole: nimm ersten Knoten aus der Queue und prüfe für jede ausgehende Kante die Distanz des Nachbarn

  falls kürzerer Weg gefunden, aktualisiere Distanzwert des Nachbarn und hänge ihn an Queue an (falls nicht schon enthalten)
- Phase besteht immer aus Bearbeitung der Knoten, die am Anfang des Algorithmus (bzw. der Phase) in der Queue sind
  (dabei kommen während der Phase schon neue Knoten ans Ende der Queue)

Kürzeste einfache Pfade bei beliebigen Kantengewichten

Achtung!

Fakt

Die Suche nach kürzesten einfachen Pfaden
(also ohne Knotenwiederholungen / Kreise)
in Graphen mit beliebigen Kantengewichten
(also möglichen negativen Kreisen)
ist ein $\mathcal{NP}$-vollständiges Problem.

(Man könnte Hamilton-Pfad-Suche damit lösen.)

All Pairs Shortest Paths

gegeben:

- Graph mit beliebigen Kantengewichten,
  der aber keine negativen Kreise enthält

gesucht:

- Distanzen / kürzeste Pfade zwischen allen Knotenpaaren

Naive Strategie:

- n-mal Bellman-Ford-Algorithmus
  (jeder Knoten einmal als Startknoten)

$\Rightarrow \mathcal{O}(n^2 \cdot m)$

All Pairs Shortest Paths

Bessere Strategie:

- reduziere n Aufrufe des Bellman-Ford-Algorithmus auf n Aufrufe des Dijkstra-Algorithmus

Problem:

- Dijkstra-Algorithmus funktioniert nur für nichtnegative Kantengewichte

Lösung:

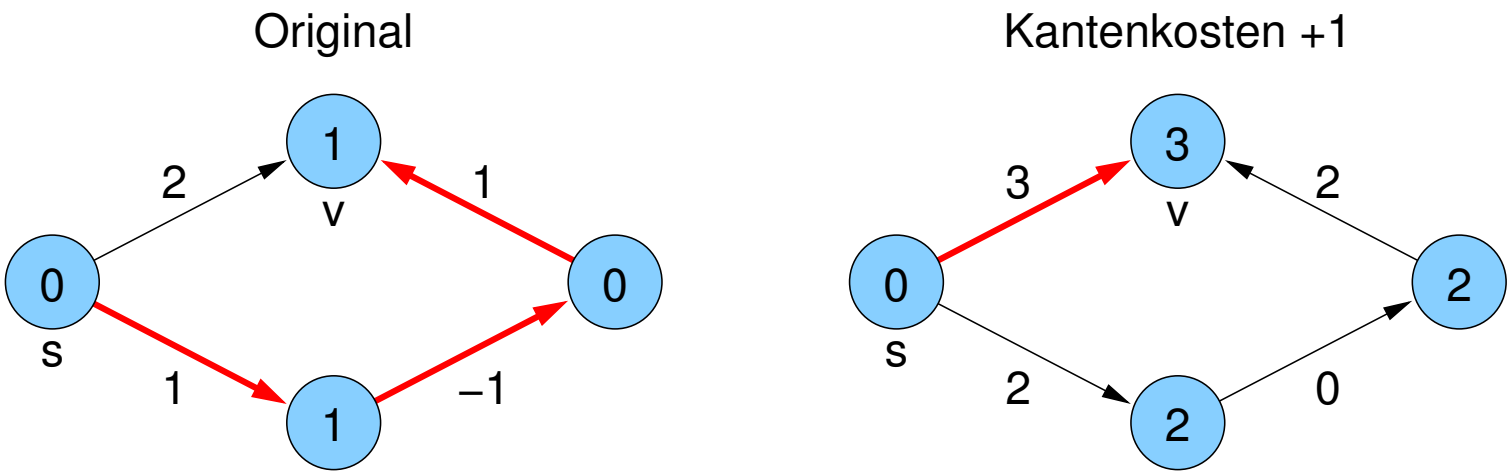
- Umwandlung in nichtnegative Kantenkosten ohne Verfälschung der kürzesten Wege

All Pairs Shortest Paths

Naive Idee:

- negative Kantengewichte eliminieren, indem auf jedes Kantengewicht der gleiche Wert c addiert wird

$\Rightarrow$ verfälscht kürzeste Pfade



All Pairs Shortest Paths

Sei $\Phi : V \mapsto \mathbb{R}$ eine Funktion, die jedem Knoten ein Potential zuordnet.

Modifizierte Kantenkosten von $e = (v, w)$:

$$\bar{c}(e) = \Phi(v) + c(e) - \Phi(w)$$

Lemma

Seien p und q Wege von v nach w in G.

$c(p)$ und $c(q)$ bzw. $\bar{c}(p)$ und $\bar{c}(q)$ seien die aufsummierten Kosten bzw. modifizierten Kosten der Kanten des jeweiligen Pfads.

Dann gilt für jedes Potential Φ:

$$\bar{c}(p) < \bar{c}(q) \quad \Leftrightarrow \quad c(p) < c(q)$$

All Pairs Shortest Paths

Beweis.

Sei $p = (v_1, \ldots, v_k)$ beliebiger Weg und $\forall i: \; e_i = (v_i, v_{i+1}) \in E$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \bar{c}(p) &= \sum_{i=1}^{k-1} \bar{c}(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} (\Phi(v_i) + c(e_i) - \Phi(v_{i+1})) \\ &= \Phi(v_1) + c(p) - \Phi(v_k) \end{aligned}$$

d.h. modifizierte Kosten eines Pfads hängen nur von ursprünglichen Pfadkosten und vom Potential des Anfangs- und Endknotens ab.
(Im Lemma ist $v_1 = v$ und $v_k = w$) □

All Pairs Shortest Paths

Lemma

Annahme:

- *Graph hat keine negativen Kreise*
- *alle Knoten von s aus erreichbar*

Sei für alle Knoten v das Potential $\Phi(v) = d(s, v)$.

Dann gilt für alle Kanten e: $\bar{c}(e) \geq 0$

Beweis.

- für alle Knoten v gilt nach Annahme: $d(s, v) \in \mathbb{R}$ (also $\neq \pm\infty$)
- für jede Kante $e = (v, w)$ ist

$$\begin{aligned} d(s, v) + c(e) &\geq d(s, w) \\ d(s, v) + c(e) - d(s, w) &\geq 0 \end{aligned}$$

□

All Pairs Shortest Paths / Johnson-Algorithmus

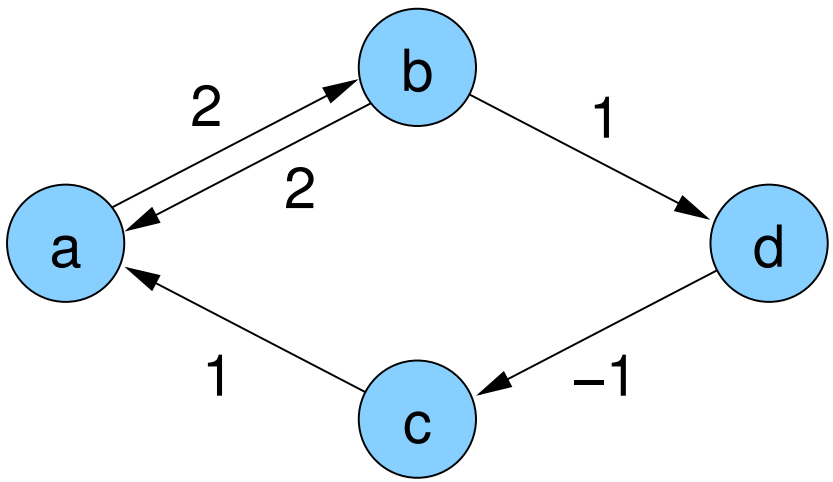
- füge neuen Knoten s und Kanten (s, v) für alle v hinzu mit $c(s, v) = 0$

$\Rightarrow$ alle Knoten erreichbar

- berechne $d(s, v)$ mit Bellman-Ford-Algorithmus
- setze $\Phi(v) = d(s, v)$ für alle v
- berechne modifizierte Kosten $\bar{c}(e)$
- berechne für alle Knoten v die Distanzen $\bar{d}(v, w)$ mittels Dijkstra-Algorithmus mit modifizierten Kantenkosten auf dem Graph ohne Knoten s
- berechne korrekte Distanzen $d(v, w) = \bar{d}(v, w) + \Phi(w) - \Phi(v)$

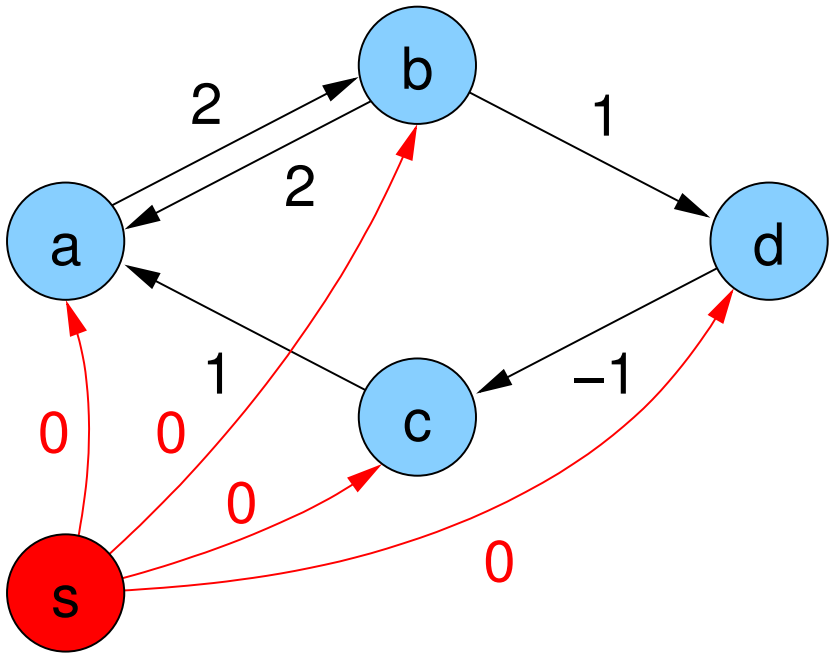
All Pairs Shortest Paths / Johnson-Algorithmus

Beispiel:



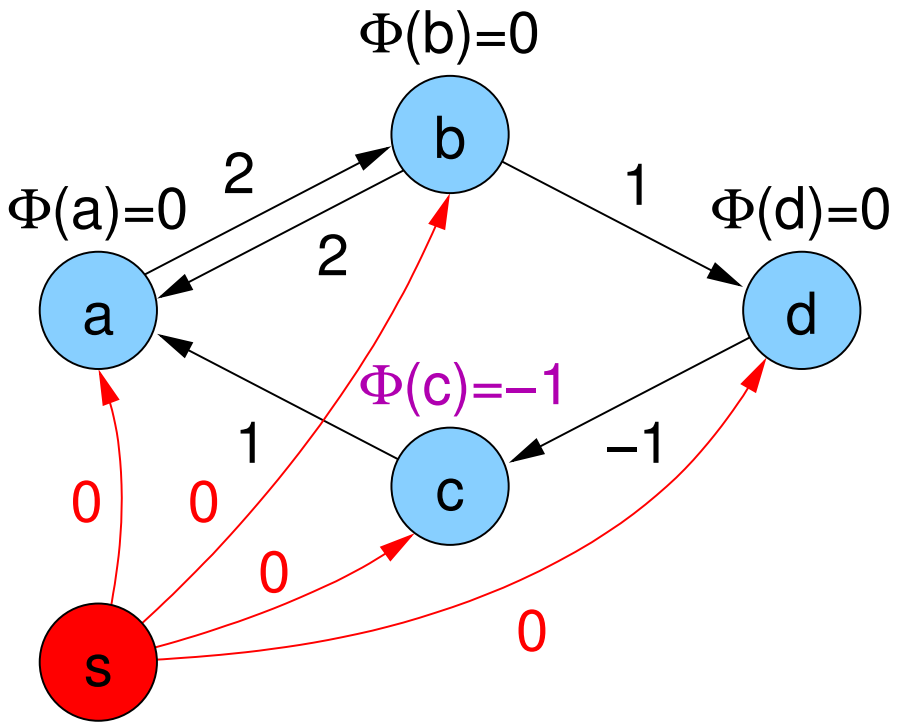
All Pairs Shortest Paths / Johnson-Algorithmus

1. künstliche Quelle s:



All Pairs Shortest Paths / Johnson-Algorithmus

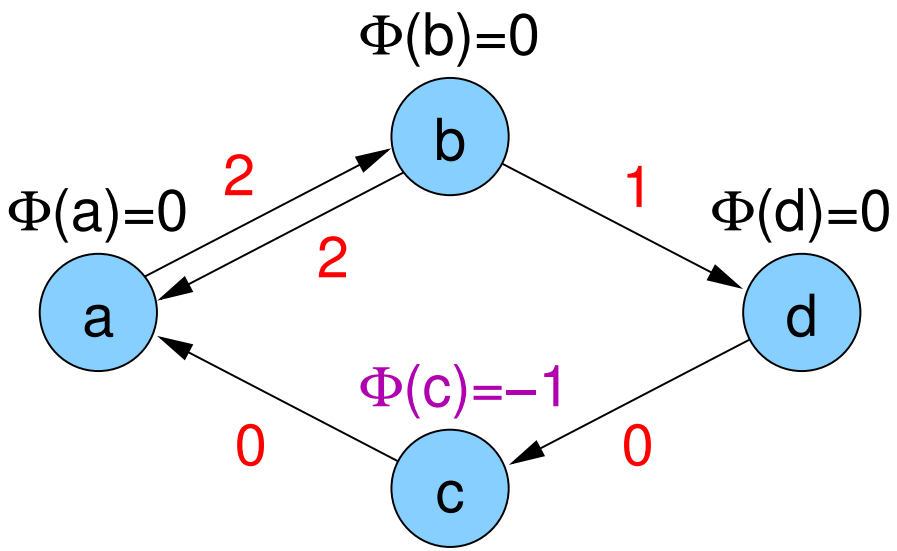
2. Bellman-Ford-Algorithmus auf s:



All Pairs Shortest Paths / Johnson-Algorithmus

3. $\bar{c}(e)$-Werte für alle $e = (v, w)$ berechnen:

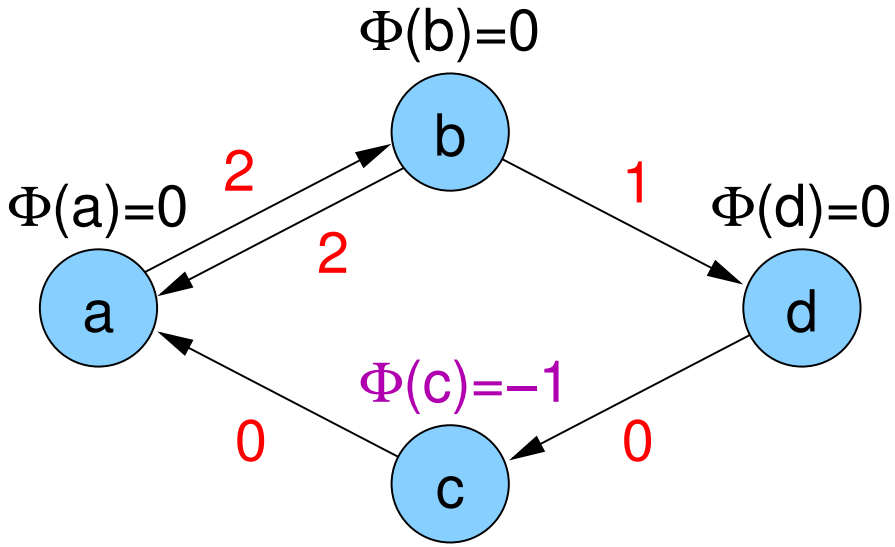
$$\bar{c}(e) = \Phi(v) + c(e) - \Phi(w)$$



All Pairs Shortest Paths / Johnson-Algorithmus

4. Distanzen $\bar{d}$ mit modifizierten Kantengewichten via Dijkstra:

$\bar{d}$	a	b	c	d
a	0	2	3	3
b	1	0	1	1
c	0	2	0	3
d	0	2	0	0

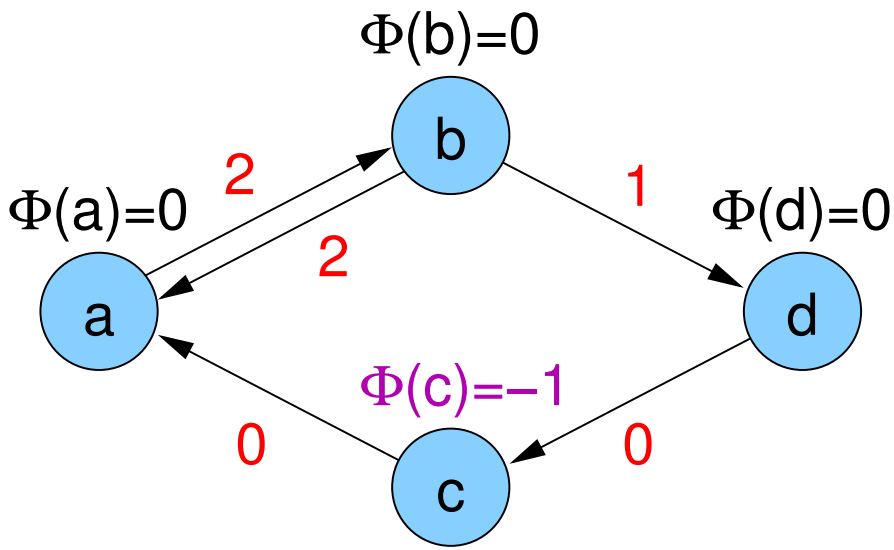


All Pairs Shortest Paths / Johnson-Algorithmus

5. korrekte Distanzen berechnen mit Formel

$$d(v,w) = \bar{d}(v,w) + \Phi(w) - \Phi(v)$$

d	a	b	c	d
a	0	2	2	3
b	1	0	0	1
c	1	3	0	4
d	0	2	−1	0



All Pairs Shortest Paths / Johnson-Algorithmus

Laufzeit:

$$\begin{aligned} T(APSP) &= \mathcal{O}(T_{\text{Bellman-Ford}}(n+1, m+n) + n \cdot T_{\text{Dijkstra}}(n, m)) \\ &= \mathcal{O}((m+n) \cdot (n+1) + n(n \log n + m)) \\ &= \mathcal{O}(m \cdot n + n^2 \log n) \end{aligned}$$

(bei Verwendung von Fibonacci Heaps)

APSP / Floyd-Warshall-Algorithmus

Grundlage:

- geht der kürzeste Weg von u nach w über v, dann sind auch die beiden Teile von u nach v und von v nach w kürzeste Pfade zwischen diesen Knoten
- Annahme: alle kürzeste Wege bekannt, die nur über Zwischenknoten mit Index kleiner als k gehen

$\Rightarrow$ kürzeste Wege über Zwischenknoten mit Indizes bis einschließlich k können leicht berechnet werden:

  - entweder der schon bekannte Weg über Knoten mit Indizes kleiner als k
  - oder über den Knoten mit Index k (hier im Algorithmus der Knoten v)

APSP / Floyd-Warshall-Algorithmus

Algorithmus 3 : Floyd-Warshall APSP Algorithmus

Input : Graph $G = (V, E)$, $c : E \to R$

Output : Distanzen $d(u, v)$ zwischen allen $u, v \in V$

for $u, v \in V$ **do**
  $d(u, v) = \infty$; $\text{pred}(u, v) = 0$;
for $v \in V$ **do** $d(v, v) = 0$;
for $\{u, v\} \in E$ **do**
  $d(u, v) = c(u, v)$; $\text{pred}(u, v) = u$;
for $v \in V$ **do**
  for $\{u, w\} \in V \times V$ **do**
    if $d(u, w) > d(u, v) + d(v, w)$ **then**
      $d(u, w) = d(u, v) + d(v, w)$;
      $\text{pred}(u, w) = \text{pred}(v, w)$;

APSP / Floyd-Warshall-Algorithmus

- Komplexität: $\mathcal{O}(n^3)$
- funktioniert auch, wenn Kanten mit negativem Gewicht existieren
- Kreise negativer Länge werden nicht direkt erkannt und verfälschen das Ergebnis, sind aber indirekt am Ende an negativen Diagonaleinträgen der Distanzmatrix erkennbar

Übersicht

Betweenness Centrality

$$c_B(v) = \sum_{s \in V \setminus \{v\}} \sum_{t \in V \setminus \{v\}} \delta_{st}(v) = \sum_{s \in V \setminus \{v\}} \sum_{t \in V \setminus \{v\}} \frac{\sigma_{st}(v)}{\sigma_{st}}$$

Mögliche Berechnung:

1. Berechne Länge und Anzahl kürzester Pfade zwischen allen Knotenpaaren
2. Betrachte zu jedem Knoten v alle möglichen Paare s, t und berechne den Anteil kürzester Pfade durch v
   Bedingung(Bellman-Kriterium):

$$d(s,t) = d(s,v) + d(v,t)$$

Betweenness Centrality

1. Modifiziere BFS bzw. Dijkstras Algorithmus
   - Ersetze einzelne Vorgängerknoten durch eine Vorgängermenge $\text{pred}(s,v) = \{u \in V : \{u,v\} \in E, d(s,v) = d(s,u) + w(u,v)\}$
   - Es gilt dann

$$\sigma_{sv} = \sum_{u \in \text{pred}(s,v)} \sigma_{su}$$

$\Rightarrow$ Für einen Startknoten $s \in V$ kann die Anzahl kürzester Pfade zu jedem anderen Knoten in $\mathcal{O}(m + n \log n)$ für gewichtete und in $\mathcal{O}(m)$ für ungewichtete Graphen berechnet werden.

$\Rightarrow$ Die Berechnung von σ_{st} für alle Paare $s, t \in V$ kann in $\mathcal{O}(mn + n^2 \log n)$ bzw. $\mathcal{O}(mn)$ berechnet werden.

Betweenness Centrality

2. Im Fall $d(s,t) = d(s,v) + d(v,t)$ gilt

$$\sigma_{st}(v) = \sigma_{sv} \cdot \sigma_{vt}$$

ansonsten $(d(s,t) < d(s,v) + d(v,t))$ ist $\sigma_{st}(v) = 0$

$\Rightarrow$ naive Berechnung:
$\mathcal{O}(n^2)$ pro Knoten v (Summation über alle $s \neq v \neq t$),
also insgesamt Zeit $\mathcal{O}(n^3)$ und Platz $\mathcal{O}(n^2)$ für Speicherung aller $d(s,t)$ und σ_{st}

Betweenness Centrality (Brandes)

Abhängigkeit eines Paares (s, t) von v:

$$\delta_{st}(v) = \frac{\sigma_{st}(v)}{\sigma_{st}}$$

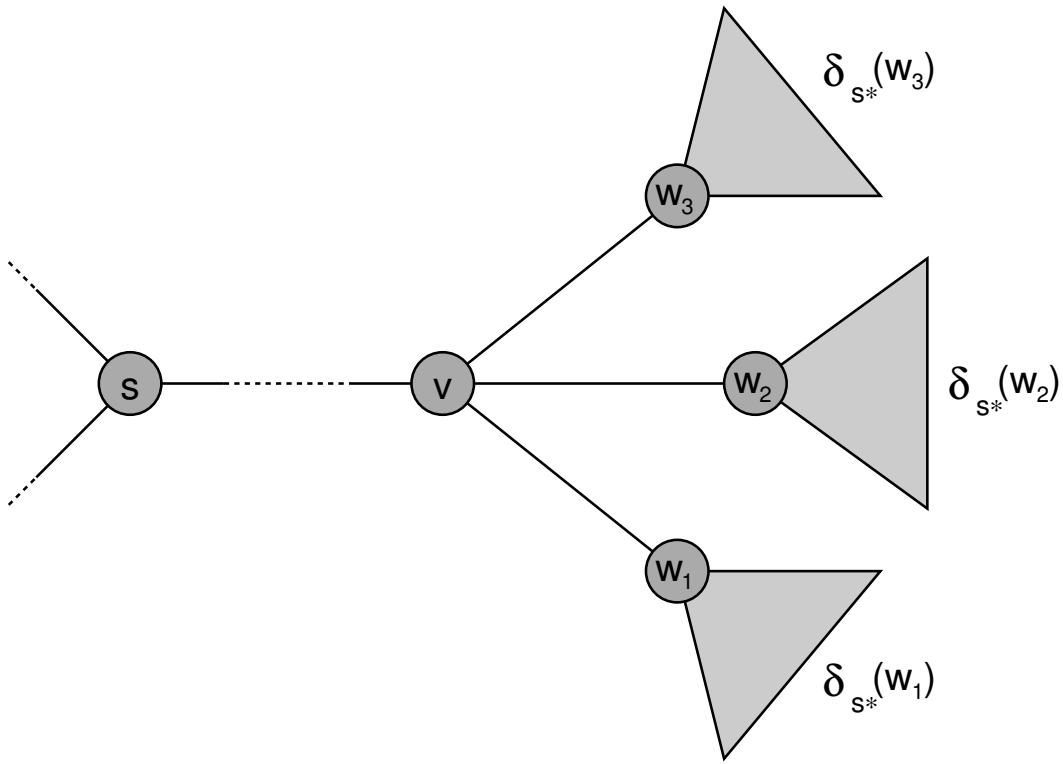
Abhängigkeit eines Startknotens s von v:

$$\delta_{s*}(v) = \sum_{t \in V \setminus \{v\}} \delta_{st}(v)$$

Betweenness von v:

$$\Rightarrow \qquad c_B(v) = \sum_{s \in V \setminus \{v\}} \delta_{s*}(v)$$

Betweenness Centrality (Brandes)



Betweenness Centrality (Brandes)

Lemma

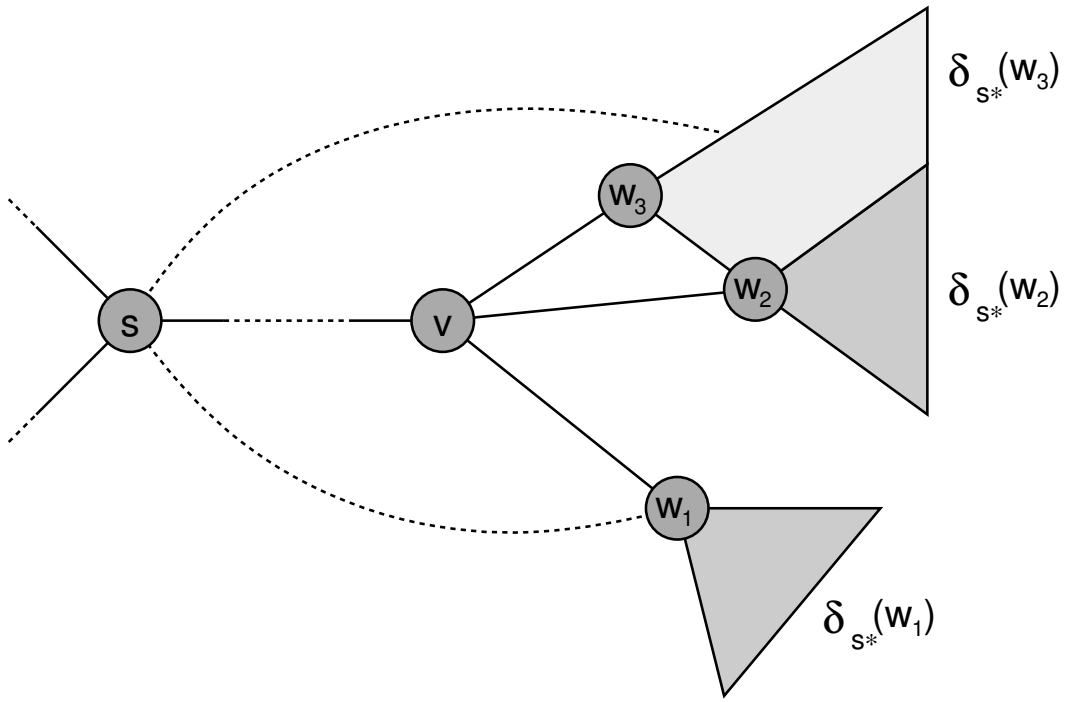
Für den Fall, dass es von $s \in V$ genau einen kürzesten Pfad zu jedem $t \in V$ gibt, gilt

$$\delta_{s*}(v) = \sum_{w:\ v \in pred(s,w)} (1 + \delta_{s*}(w))$$

Beweis.

- Die kürzesten Pfade von s formen einen Baum.
- Also liegt v auf *allen* kürzesten Pfaden von s zu einem t oder auf *keinem*, d.h. $\delta_{st}(v)$ ist 1 oder 0.
- v liegt auf allen kürzesten Pfaden zu den Nachfolgern, sowie auf allen kürzesten Pfaden, auf denen diese Nachfolger liegen.

Betweenness Centrality (Brandes)



Im allgemeinen Fall werden die Anteile der Abhängigkeiten von den Nachfolgern über die Kanten des Kürzeste-Pfade-DAGs propagiert.

Betweenness Centrality (Brandes)

Satz

Für die Abhängigkeit $\delta_{s*}(v)$ eines Startknotens $s \in V$ von den anderen Knoten $v \in V$ gilt:

$$\delta_{s*}(v) = \sum_{w:\ v \in pred(s,w)} \frac{\sigma_{sv}}{\sigma_{sw}}(1 + \delta_{s*}(w))$$

Betweenness Centrality (Brandes)

Beweis.

- $\delta_{st}(v) > 0$ gilt nur für die $t \in V \setminus \{s\}$, für die v auf mindestens einem kürzesten Pfad von s nach t liegt.
- Jeder solche Pfad hat exakt eine Kante $\{v, w\}$ mit $v \in \text{pred}(s, w)$ (siehe Abbildung).

Betweenness Centrality (Brandes)

Beweis.

- Definiere $\sigma_{st}(v, e)$: Anzahl kürzester s-t-Pfade, die sowohl Knoten v als auch Kante e enthalten
- Definiere entsprechend

$$\delta_{st}(v, e) = \frac{\sigma_{st}(v, e)}{\sigma_{st}}$$

$$\delta_{s*}(v) = \sum_{t \in V \setminus \{v\}} \delta_{st}(v) = \sum_{t \in V \setminus \{v\}} \left(\sum_{w:\ v \in \text{pred}(s,w)} \delta_{st}(v, \{v, w\}) \right)$$

$$= \sum_{w:\ v \in \text{pred}(s,w)} \left(\sum_{t \in V \setminus \{v\}} \delta_{st}(v, \{v, w\}) \right)$$

Betweenness Centrality (Brandes)

Beweis.

- Betrachte Knoten w, so dass $v \in \text{pred}(s, w)$
- σ_{sw} kürzeste Pfade von s nach w,
  davon σ_{sv} von s nach v gefolgt von Kante $\{v, w\}$
- Anteil σ_{sv}/σ_{sw} der Anzahl kürzester Pfade von s nach t über w benutzt auch die Kante $\{v, w\}$:

$$\delta_{st}(v, \{v, w\}) = \begin{cases} \frac{\sigma_{sv}}{\sigma_{sw}} & \text{falls } t = w \\ \frac{\sigma_{sv}}{\sigma_{sw}} \cdot \frac{\sigma_{st}(w)}{\sigma_{st}} & \text{falls } t \neq w \end{cases}$$

Betweenness Centrality (Brandes)

Beweis.

$$
\begin{aligned}
\delta_{s*}(v) &= \sum_{w:\ v \in \mathrm{pred}(s,w)} \left(\sum_{t \in V \setminus \{v\}} \delta_{st}(v, \{v,w\}) \right) \\
&= \sum_{w:\ v \in \mathrm{pred}(s,w)} \left(\frac{\sigma_{sv}}{\sigma_{sw}} + \sum_{t \in V \setminus \{v,w\}} \frac{\sigma_{sv}}{\sigma_{sw}} \cdot \frac{\sigma_{st}(w)}{\sigma_{st}} \right) \\
&= \sum_{w:\ v \in \mathrm{pred}(s,w)} \left(\frac{\sigma_{sv}}{\sigma_{sw}} + \frac{\sigma_{sv}}{\sigma_{sw}} \sum_{t \in V \setminus \{v,w\}} \frac{\sigma_{st}(w)}{\sigma_{st}} \right) \\
&= \sum_{w:\ v \in \mathrm{pred}(s,w)} \frac{\sigma_{sv}}{\sigma_{sw}} (1 + \delta_{s*}(w))
\end{aligned}
$$

Betweenness Centrality (Brandes)

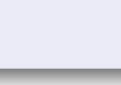
Beweis.

Erklärung:

- Zuerst wird die Summe in die beiden Fälle $t = w$ und $t \neq w$ aufgeteilt.
- Dann wird ausgeklammert.
- Es gilt

$$\sum_{t \in V \setminus \{v,w\}} \frac{\sigma_{st}(w)}{\sigma_{st}} = \sum_{t \in V \setminus \{w\}} \frac{\sigma_{st}(w)}{\sigma_{st}} = \delta_{s*}(w)$$

weil aufgrund der Annahme, dass v ein Vorgänger von w bezüglich Startknoten s ist, für den Fall $t = v$ gilt, dass $\sigma_{st}(w) = \sigma_{sv}(w) = 0$



Betweenness Centrality (Brandes)

- Berechne n kürzeste-Pfade-DAGs
  (einen für jeden Startknoten $s \in V$)

- Berechne nacheinander für alle $s \in V$ aus dem kürzeste-Pfade-DAG von s die Abhängigkeiten $\delta_{s*}(v)$ für alle anderen Knoten $v \in V$

  Vorgehen: rückwärts, von den Blättern im kürzeste-Pfade-Baum bzw. von der entferntesten Schicht im kürzeste-Pfade-DAG zum Startknoten hin

- Summiere die einzelnen Abhängigkeiten
  (kann schon parallel während der Berechnung aufsummiert werden, um nicht $\mathcal{O}(n^2)$ Platz zu verbrauchen)

Betweenness Centrality (Brandes)

Satz

Die Betweenness-Zentralität $c_B(v)$ für alle Knoten $v \in V$ kann

- *für ungewichtete Graphen in $\mathcal{O}(nm)$*
- *für gewichtete Graphen in Zeit $\mathcal{O}(n(m + n \log n)) = \mathcal{O}(nm + n^2 \log n)$*

berechnet werden.
Der Algorithmus benötigt dabei nur $\mathcal{O}(n + m)$ Speicherplatz.

Bemerkung:
Die anderen auf kürzesten Pfaden basierenden Zentralitäten kann man relativ einfach mit SSSP-Traversierung berechnen.

Absolute p-Center Problem

gegeben:

- ungerichteter Graph $G = (V, E)$
- nichtnegative Gewichtsfunktion $w(v)$ für Knoten $v \in V$
- positive Länge $\ell(e)$ für Kante $e \in E$

Sei $X_p = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ eine Menge von p Punkten auf G (dürfen auf Knoten oder an beliebigen Kantenpositionen liegen).

$d(v, x_i)$: Länge eines kürzesten Pfades zwischen v und x_i

Distanz eines Knotens zur Positionsmenge:

$$d(v, X_p) = \min_{1 \le i \le p} \{d(v, x_i)\}$$

Definition: Absolute p-Center

Weiteste gewichtete Distanz eines Knotens $v \in V$ zu X_p:

$$F(X_p) = \max_{v \in V} \{w(v) \cdot d(v, X_p)\}$$

X_p^*: eine optimale Menge aus p Punkten:

$$F(X_p^*) = \min_{X_p \text{ auf } G} \{F(X_p)\}$$

Man bezeichnet X_p^* als [absolute] p-center
und $r_p = F(X_p^*)$ als [absolute] p-radius von G.

Falls X_p beschränkt ist auf (echte) Knoten des Graphen, dann spricht man vom vertex p-center bzw. vertex p-radius.

Annahmen

- Alle Knoten haben gleiches Gewicht $w(v) = c$,
  o.B.d.A. $c = 1$ (ungewichteter Fall).
- Graph enthält keine Schleifen oder Multikanten.
- Länge jeder Kante $e = (v_r, v_s)$ ist gleich der Distanz der inzidenten Knoten, also $\ell(e) = d(v_r, v_s)$)
  (ansonsten könnte man e einfach eliminieren, ohne dass sich der p-Radius ändert)
- Distanzen zwischen allen Knotenpaaren sind bekannt.
  (Falls diese erst berechnet werden müssen, erhöht sich die Komplexität um den Aufwand zur Lösung des APSP-Problems.)

Hinweis: Domination Number / Set als inverses Problem

gegeben:

- $G = (V, E)$
- natürliche Zahl r

gesucht:

- kleinste natürliche Zahl p, so dass der p-Radius von G nicht größer als r ist.

Problem:

- p heißt [absolute] domination number für Radius r.
- Ein entsprechendes p-center heißt [absolute] domination set für Radius r.
- Für ungewichtete Graphen und Radius 1 ergibt sich das bekannte Problem von domination number/set (welches $\mathcal{NP}$-vollständig ist!)

1-center / local center

- Vereinfachung: einelementige Menge $X_1 = \{x\}$

$$F(x) = \max_{v \in V}\{w(v) \cdot d(v,x)\}$$

- Um ein 1-center zu finden, sucht man nach einem "lokalen" Zentrum auf jeder Kante.
- Ein local center auf Kante $e \in E$ ist eine Position $x^*(e)$ auf e, so dass

$$F(x^*(e)) = \min_{x(e) \text{ auf } e}\{F(x(e))\}$$

wobei $r(e) = F(x^*(e))$ lokaler Radius von G auf e heißt.

$$r_1 = r(e_j) = \min_{1 \le i \le |E|}\{r(e_i)\}$$

r_1: 1-radius von G und das entsprechende $x^*(e_j)$ ist ein 1-center.

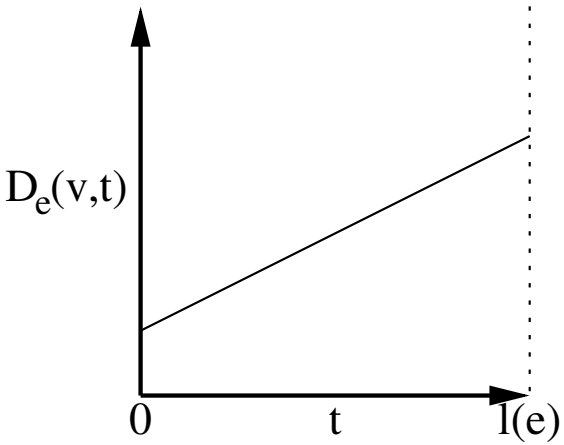
1-center / local center

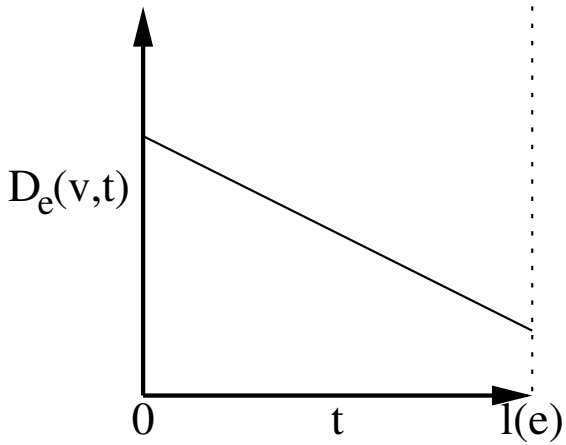
- Um ein local center auf Kante $e = (v_r, v_s)$ zu finden, betrachten wir für jeden Knoten $v \in V$ seine (gewichtete) Distanz zu einem Punkt $x(e)$ auf e.

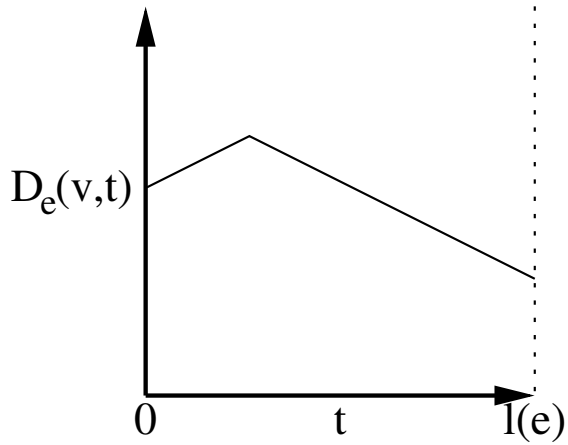
- Sei $t = t(x(e))$ die Distanz von $x(e)$ zu v_r auf Kante e.
  Dann ist die gewichtete Distanz von v zu $x(e)$

$$D_e(v,t) = w(v) \cdot \min \left\{ \begin{array}{lcl} t & + & d(v_r, v), \\ \ell(e) - t & + & d(v_s, v) \end{array} \right\}$$

1-center / local center





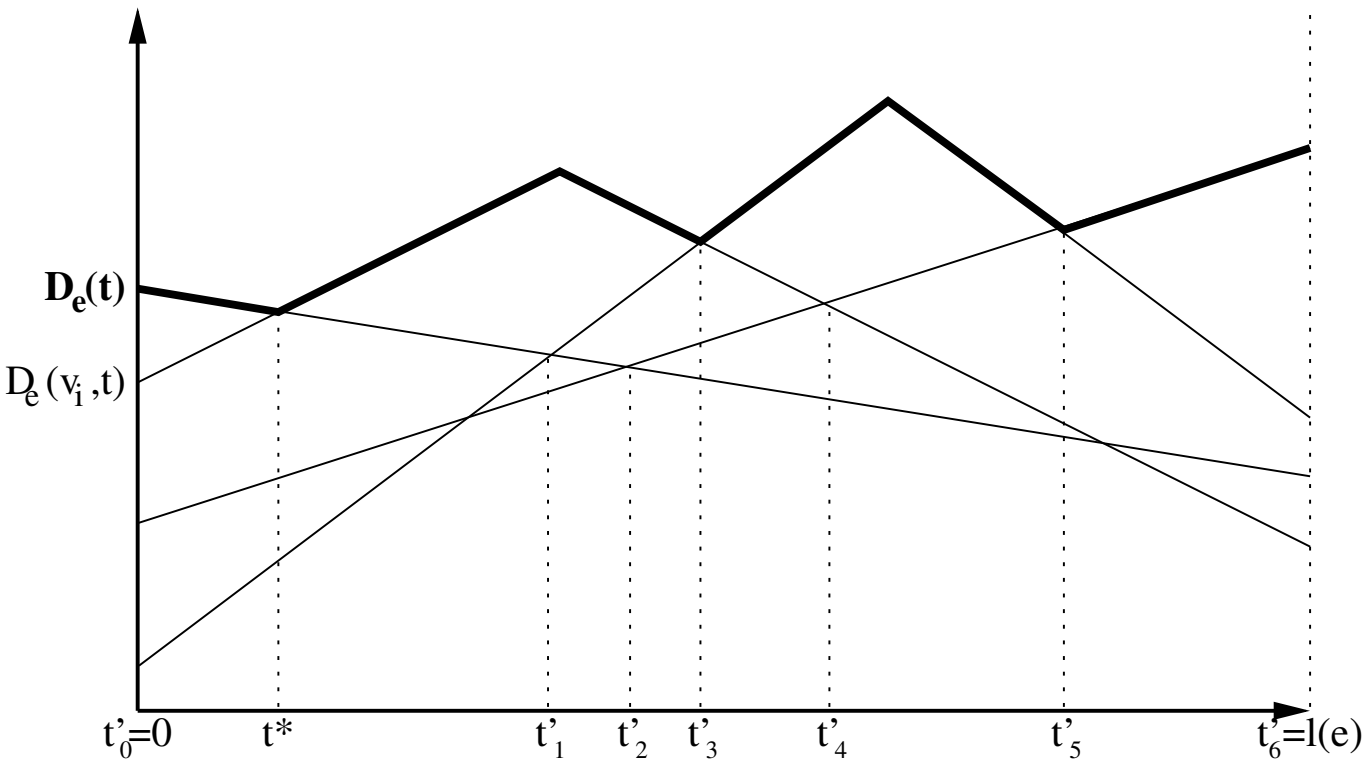


- Jede solche Funktion besteht aus ein oder zwei linearen Stücken mit Anstieg $\pm w(v)$.
- Im Fall von zwei Segmenten ist der Knickpunkt ein Maximum.

1-center / local center

Definiere für $0 \leq t \leq \ell(e)$

$$D_e(t) = \max_{v \in V} \{D_e(v, t)\}$$



1-center / local center

- Jeder Punkt $x^*(e)$, an dem $D_e(t)$ sein (absolutes) Minimum annimmt, ist ein local center auf e.
- $t^* = t(x^*(e))$ sei der Wert von t an dieser Stelle $x^*(e)$.
- Der Wert $D_e(t^*)$ ist der local-radius auf e.
- t^* ist ein beliebiger Punkt für den folgendes gilt:
  1. $t^* = 0$ oder $t^* = \ell(e)$ oder t^* ist ein Punkt, wo sich zwei Funktionen $D_e(v_i, t)$ und $D_e(v_j, t)$ so schneiden, dass ihre Anstiege im Schnittpunkt gegensätzliche Vorzeichen haben.
  2. Wenn T^* die Menge aller Punkte ist, die diese erste Voraussetzung erfüllen, dann ist
$$D_e(t^*) = \min_{t' \in T^*} \{D_e(t')\}$$

$\Rightarrow$ Höchstens $n(n-1)/2 + 2$ Punkte kommen als local-center von e in Frage.

1-center / local center

- Unter der Voraussetzung, dass die Distanzmatrix bekannt ist, kann man mit Hilfe der Funktionen

$$\begin{aligned} D_e(v,t) &= w(v) \cdot \min \left\{ \begin{array}{lcl} t & + & d(v_r, v), \\ \ell(e) - t & + & d(v_s, v) \end{array} \right\} \\ D_e(t) &= \max_{v \in V} \{D_e(v,t)\} \end{aligned}$$

  den Wert $D_e(t)$ in $\mathcal{O}(n)$ Schritten an jedem der $\mathcal{O}(n^2)$ in Frage kommenden Punkte berechnen.

- D.h., bei einer direkten Implementierung von Bedingung 2 kann man ein local-center auf e in $\mathcal{O}(n^3)$ Schritten finden.

1-center / local center

- Kariv und Hakimi haben eine Methode vorgeschlagen, die in knoten-gewichteten Graphen ein local-center für eine Kante e in $\mathcal{O}(n \log n)$ Schritten findet.
- Damit kann man ein 1-center eines Graphen in $\mathcal{O}(mn \log n)$ berechnen.

- Für ein knoten-ungewichtetes Netzwerk haben Kariv und Hakimi einen Algorithmus von Komplexität $\mathcal{O}(n)$ zum Finden eines local-centers für eine Kante e präsentiert.
- Damit kann man ein 1-center in $\mathcal{O}(mn + n^2 \log n)$ berechnen.

Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

- Ein local center $x^*(e)$ ist entweder
  - an einem der Endpunkte v_r oder v_s der Kante oder
  - an einem Punkt $t^* \in [0, \ell(e)]$, wo sich zwei Funktionen $D_e(v_i, t)$ und $D_e(v_j, t)$ schneiden.

- Aufgrund des gleichen Gewichts für alle Knoten hat der Betrag des Anstiegs für alle Funktionen $D_e(v_i, t)$ den gleichen Wert.

- Damit gilt für zwei beliebige solche Funktionen $D_e(v_i, t)$ und $D_e(v_j, t)$, die sich nicht in einem ganzen Liniensegment überlagern, dass sie sich höchstens in einem Punkt schneiden und dass sie die beiden Anstiege in diesem Punkt umgekehrte Vorzeichen haben.

Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

Definiere für jeden Knoten $v_i \in V$:

$$V_i = \{v \in V : \ D_e(v,0) \leq D_e(v_i,0)\} \qquad \bar{V}_i = V \setminus V_i$$

Falls $\bar{V}_i \neq \emptyset$, definiere auch Knoten $\bar{v}_i$ mit:

$$D_e(\bar{v}_i, \ell(e)) = \max_{v \in \bar{V}_i} \{D_e(v, \ell(e))\}$$

(Falls es mehrere Knoten gibt, die diese Bedingung erfüllen, wählen wir den mit dem kleinsten Index.)

Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

Lemma

Sei t_0 die Stelle, an der sich zwei Funktionen $D_e(v_i, t)$ und $D_e(v_j, t)$ so schneiden, dass an der Stelle t_0 der Anstieg der Funktion $D_e(v_i, t)$ positiv ist, während der von $D_e(v_j, t)$ negativ ist.

Dann gilt

$$\begin{array}{lllllllll} D_e(v_i,t) & < & D_e(v_j,t) & \text{für} & 0 & \leq & t & < & t_0 \\ D_e(v_i,t) & > & D_e(v_j,t) & \text{für} & t_0 & < & t & \leq & \ell(e) \end{array}$$

Folgerung

Unter den Bedingungen des vorigen Lemmas gilt

$$v_j \in \bar{V}_i \text{ und } v_i \in V_j$$

Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

Lemma

Ein local center auf Kante e ist entweder auf einem der Endpunkte von e (bei $t = 0$ oder $t = \ell(e)$) oder an einer Stelle t_i, an der sich zwei Funktionen $D_e(v_i, t)$ und $D_e(\bar{v}_i, t)$ schneiden.

Beweis.

- Der Fall der Kantenendpunkte ist klar.
- Wir betrachten ein local center auf e an der Stelle t^* mit $t^* \neq 0$ und $t^* \neq \ell(e)$.
- t^* ist die Stelle, an der sich zwei Funktionen $D_e(v_i, t)$ und $D_e(v_j, t)$ so schneiden, dass an der Stelle t^* der Anstieg der Funktion $D_e(v_i, t)$ positiv ist, während der von $D_e(v_j, t)$ negativ ist.

Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

Beweis.

- Damit ist $v_j \in \bar{V}_i$.
- Es gilt also $\bar{V}_i \neq \emptyset$ und damit ist $\bar{v}_i$ definiert.
- Nach der Definition eines local centers (bzw. von $D_e(t)$) gilt $D_e(\bar{v}_i, t^*) \leq D_e(v_j, t^*)$.
- Im Falle von Gleichheit gilt das Lemma.
- Annahme: $D_e(\bar{v}_i, t^*) < D_e(v_j, t^*) = D_e(v_i, t^*)$

Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

Beweis.

- Falls $D_e(\bar{v}_i, t)$ bei t^* positiv ansteigt, dann folgt aus $D_e(\bar{v}_i, t^*) < D_e(v_i, t^*)$, dass $D_e(\bar{v}_i, 0) < D_e(v_i, 0)$, ein Widerspruch zur Definition von $\bar{v}_i$.
- Falls $D_e(\bar{v}_i, t)$ bei t^* negativ ansteigt, dann folgt aus $D_e(\bar{v}_i, t^*) < D_e(v_j, t^*)$, dass $D_e(\bar{v}_i, \ell(e)) < D_e(v_j, \ell(e))$, ein Widerspruch zur Definition von $\bar{v}_i$ (weil nach Folgerung des letzten Lemmas $v_j \in \bar{V}_i$).
- Also gilt die Annahme nicht, sondern die Gleichheit und damit das ganze Lemma.

□

Das Lemma reduziert die Anzahl möglicher Kandidaten für ein local center auf einer Kante e auf höchstens $n + 2$.

Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

Lemma

Wenn sich die Funktionen $D_e(v_i, t)$ und $D_e(\bar{v}_i, t)$ an der Stelle t_i überschneiden, dann gilt

$$D_e(v_i, t_i) = \max_{v \in V}\{D_e(v, t_i)\}$$

oder kurz

$$D_e(t_i) = D_e(v_i, t_i)$$

Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

Beweis.

- Annahme: Lemma gilt nicht, sondern es gibt einen Knoten v' mit $D_e(v_i, t_i) < D_e(v', t_i)$.
- Da $D_e(v_i, t_i)$ an der Stelle t_i einen positiven Anstieg hat, impliziert die Ungleichung, dass $D_e(v_i, 0) < D_e(v', 0)$, also $v' \in \bar{V}_i$.
- Andererseits impliziert $D_e(v_i, t_i) < D_e(v', t_i)$, dass $D_e(\bar{v}_i, t_i) < D_e(v', t_i)$ (weil $D_e(v_i, t_i) = D_e(\bar{v}_i, t_i)$).
- Da $D_e(\bar{v}_i, t)$ an der Stelle t_i einen negativen Anstieg hat, folgt $D_e(\bar{v}_i, \ell(e)) < D_e(v', \ell(e))$.
- Das ist ein Widerspruch zur Wahl von $\bar{v}_i$.

Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

Folgerung (aus den letzten beiden Lemmas)

Sei $t_0 = 0$, $t_{n+1} = \ell(e)$ und für die Werte $i \in \{1 \dots n\}$ mit $\bar{V}_i \neq \emptyset$ sei t_i der Schnittpunkt, wo $D_e(v_i, t)$ und $D_e(\bar{v}_i, t)$ sich schneiden.

Sei $D_0 = \max_{v \in V}\{D_e(v, 0)\}$, $D_{n+1} = \max_{v \in V}\{D_e(v, \ell(e))\}$ und für die Werte $i \in \{1 \dots n\}$, wo t_i definiert ist, sei $D_i = D_e(v_i, t_i)$.

Sei j ein Index, für den

$$D_j = \min_{i \in \{0 \dots n+1\}} \{D_i \mid D_i \text{ ist definiert}\}$$

Dann ist D_j der local radius auf e und das entsprechende t_j ist ein local center auf e.

Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

Lemma

Wenn für zwei Knoten v_i und v_j gilt, dass

$$\begin{aligned} D_e(v_i, 0) &= D_e(v_j, 0) \\ D_e(v_i, \ell(e)) &\geq D_e(v_j, \ell(e)), \end{aligned}$$

dann muss der Schnittpunkt t_j aus der vorangegangenen Folgerung (wo sich $D_e(v_j, t)$ und $D_e(\bar{v}_j, t)$ schneiden) nicht betrachtet werden.

Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

Beweis.

- Aus den Bedingungen des Lemmas folgt für alle t $(0 \leq t \leq \ell(e))$, dass $D_e(v_i, t) \geq D_e(v_j, t)$.
- Angenommen, t_j ist ein local center auf e, dann impliziert die Definition von local center, dass $D_e(v_j, t_j) \geq D_e(v_i, t_j)$ und man erhält $D_e(v_i, t_j) = D_e(v_j, t_j)$.
- Andererseits impliziert die Definition von $\bar{v}_i$, dass $\bar{v}_i = \bar{v}_j$ und deshalb $D_e(\bar{v}_i, t_j) = D_e(\bar{v}_j, t_j)$.
- Deshalb ist der Schnittpunkt t_j von $D_e(v_j, t)$ und $D_e(\bar{v}_j, t)$ gleichzeitig der Schnittpunkt von $D_e(v_i, t)$ und $D_e(\bar{v}_i, t)$.
- Damit ist es in der Folgerung ausreichend, nur den Punkt t_i zu betrachten und t_j zu ignorieren.

Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

- Der folgende Algorithmus basiert auf der letzten Folgerung und dem letzten Lemma.
- In einer Vorberechnung wird für jeden Knoten $v \in V$ eine Liste $L(v)$ konstruiert, in dem die Knoten des Graphen in monoton fallender Reihenfolge ihrer Distanz zu v stehen.
  Knoten v ist dabei der letzte in seiner Liste $L(v)$.
- Unter der Annahme, dass die Distanzmatrix bekannt ist, dauert die Konstruktion jeder Liste $\mathcal{O}(n \log n)$ Schritte.
- Gesamtkomplexität für alle Knoten: $\mathcal{O}(n^2 \log n)$

Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

- Sei $e = (v_r, v_s)$ und sei v_i der i-te Knoten in Liste $L(v_r)$.
- Dann gilt

$$D_e(v_1, 0) \geq D_e(v_2, 0) \geq \ldots \geq D_e(v_{n-1}, 0) > D_e(v_n, 0) = 0$$

  In dieser Notation ist v_r (der Endpunkt von e) benannt mit v_n.
- Der folgende Algorithmus zum Finden eines local centers auf e arbeitet etappenweise, wobei man in der i-ten Phase die Funktionen $D_e(v_i, t)$ und $D_e(\bar{v}_i, t)$ betrachtet und deren Schnittpunkt berechnet, falls es notwendig ist.
- Man beachte, dass falls für ein j und k $(1 < j \leq k < n)$ gilt, dass

$$D_e(v_{j-1}, 0) > D_e(v_j, 0) = \ldots = D_e(v_k, 0) > D_e(v_{k+1}, 0)$$

  dann gilt aufgrund der Definitionen von V_i und $\bar{v}_i$, dass

$$\bar{v}_j = \bar{v}_{j+1} = \ldots = \bar{v}_k.$$

Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

- Falls v_m (mit $j \leq m \leq k$) ein Knoten mit minimalem Index ist, so dass

$$D_e(v_m, \ell(e)) = \max_{j \leq i \leq k} \{D_e(v_i, \ell(e))\}$$

  dann impliziert das letzte Lemma, dass aus der ganzen Knotenmenge $\{v_j, v_{j+1}, \ldots, v_k\}$ nur der Knoten v_m betrachtet werden sollte (genauer gesagt wird der Schnittpunkt t_m von $D_e(v_m, t)$ und $D_e(\bar{v}_m, t)$ als mögliches local center betrachtet).
- Aufgrund der Definitionen von V_i und $\bar{v}_i$ und aufgrund der Reihenfolge in Liste $L(v_r)$ folgt, dass Knoten $\bar{v}_{k+1}$ genau der Knoten ist (von den beiden Knoten $\bar{v}_j$ und v_m), für den gilt:

$$D_e(\bar{v}_{k+1}, \ell(e)) = \max \left\{ \begin{array}{l} D_e(\bar{v}_j, \ell(e)), \\ D_e(v_m, \ell(e)) \end{array} \right\}$$

Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

- Sei k eine natürliche Zahl, so dass

$$D_e(v_1, 0) = \ldots = D_e(v_k, 0) > D_e(v_{k+1}, 0) \qquad (1 \leq k < n)$$

- Die Definitionen von V_i und $\bar{v}_i$ implizieren, dass die Knoten $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$ nicht definiert sind (Diese Knoten müssen in der letzten Folgerung nicht betrachtet werden).
- Man beachte aber, dass für die gleiche Definition für v_m wie zuvor, d.h., v_m mit $1 \leq m \leq k$ ist ein Knoten mit minimalem Index, so dass

$$D_e(v_m, \ell(e)) = \max_{1 \leq i \leq k} \{D_e(v_i, \ell(e))\},$$

dann impliziert die spezielle Sortierung von $L(v_r)$, dass $\bar{v}_{k+1} = v_m$.

Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

Im folgenden Algorithmus von Kariv und Hakimi repräsentieren die Variablen t^* und r ein local center bzw. den local radius auf Kante $e = (v_r, v_s)$.

Knoten v_i und $\bar{v}_i$ werden repräsentiert durch Variable v^* bzw. $\bar{v}^*$.

1. Behandlung der Punkte $t = 0$ und $t = \ell(e)$:
   Sei v^* der erste Knoten von Liste $L(v_r)$ und sei $\hat{v}$ der erste Knoten von Liste $L(v_s)$.

   Falls $D_e(v^*, 0) \leq D_e(\hat{v}, \ell(e))$, dann $t^* \leftarrow 0$, $r \leftarrow D_e(v^*, 0)$; sonst $t^* \leftarrow \ell(e)$, $r \leftarrow D_e(\hat{v}, \ell(e))$.

   Wenn $v^* = \hat{v}$, dann STOP.

   (Für alle $v \in V$ und $t \in [0, \ell(e)]$: $D_e(v, t) \leq D_e(v^*, t)$, also $D_e(v^*, t) = D_e(t)$ und t^* und r sind ein local center und der local radius auf e)

Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

2. Initialisierung der Phasen:
   $i \leftarrow 1$, $v_m \leftarrow v^*$
3. Behandlung aller Knoten v mit $D_e(v,0) = D_e(v_1,0)$:
   $i \leftarrow i+1$
   Sei v^* der i-te Knoten in Liste $L(v_r)$.
   Wenn $D_e(v^*,0) \neq D_e(v_m,0)$ dann gehe zu Schritt 4;
   sonst falls $D_e(v^*,\ell(e)) > D_e(v_m,\ell(e))$: $v_m \leftarrow v^*$. Wiederhole Schritt 3.
   (Wegen $D_e(v_i,0) = D_e(v_1,0)$ ist $i < n$.)
4. $\bar{v}^* \leftarrow v_m$
   Wenn $i = n$, dann gehe zu Schritt 8;
   sonst $v_m \leftarrow v^*$

Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

5. Finde alle Knoten v mit $D_e(v,0) = D_e(v_i,0)$, sowie das entsprechende v_m:

   $i \leftarrow i+1$

   Sei v^* der i-te Knoten in Liste $L(v_r)$.

   Falls $D_e(v^*,0) \neq D_e(v_m,0)$, dann gehe zu Schritt 6;
   sonst falls $D_e(v^*,\ell(e)) > D_e(v_m,\ell(e))$: $v_m \leftarrow v^*$.
   Wiederhole Schritt 5.
   (Wegen $D_e(v_i,0) = D_e(v_{i-1},0)$ ist $i < n$.)

Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

6. Behandlung des Punkts t_m:

   Wenn sich die Funktionen $D_e(v_m, t)$ und $D_e(\bar{v}^*, t)$ nicht schneiden oder sich in einem ganzen Segment überlagern, dann gehe zu Schritt 7.

   Sonst sei t_m der Schnittpunkt.
   Falls $D_e(v_m, t_m) < r$, dann $t^* \leftarrow t_m$, $r \leftarrow D_e(v_m, t_m)$.

7. Gehe zum nächsten Knoten:

   Wenn $D_e(v_m, \ell(e)) > D_e(\bar{v}^*, \ell(e))$ dann $\bar{v}^* \leftarrow v_m$

   Wenn $i = n$, gehe zu Schritt 8;
   sonst $v_m \leftarrow v^*$ und gehe zu Schritt 5.

Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

8. Behandlung von Knoten v_n:

   Wenn sich die Funktionen $D_e(v^*, t)$ und $D_e(\bar{v}^*, t)$ nicht schneiden oder sich in einem ganzen Segment überlagern, dann STOP.
   Sonst sei t_m der Schnittpunkt.
   Falls $D_e(v^*, t_m) \geq r$, dann STOP;
   sonst $t^* \leftarrow t_m$, $r \leftarrow D_e(v^*, t_m)$ und STOP.

Unter der Annahme, dass die Distanzmatrix und die Listen $L(v_r)$ und $L(v_s)$ verfügbar sind, ist die Komplexität $\mathcal{O}(n)$.

1-centers in knoten-ungewichteten Graphen

1. Konstruiere für jeden Knoten $v \in V$ eine Liste $L(v)$ aller Knoten in einer Reihenfolge monoton fallender Distanz von v.
2. Berechne mit Hilfe des vorangegangenen Algorithmus für jede Kante e des Graphen das local center und den local radius von e.
3. Der minimale local radius ist der 1-radius des Graphen.
   Jedes local center mit minimalem local radius ist ein 1-center des Graphen.

Schritt 1 benötigt Zeit $\mathcal{O}(n^2 \log n)$.
Schritt 2 benötigt Zeit $\mathcal{O}(mn)$.

Wenn die Distanzmatrix des Graphen bekannt ist, benötigt der gesamte Algorithmus Zeit $\mathcal{O}(mn + n^2 \log n)$.

Minimum Diameter Spanning Trees

Satz

Sei

- x^* *ein absolute* 1*-center von* G *und*
- $T(x^*)$ *ein Shortest Path Tree, der* x^* *mit allen Knoten in* V *verbindet.*

Dann ist $T(x^*)$ *ein Minimum Diameter Spanning Tree von* G
(ein Spannbaum mit minimalem Durchmesser).

Minimum Diameter Spanning Trees

Beweis.

Sei T ein beliebiger Spannbaum von G und $y^*(T)$ dessen absolute 1-center. ($y^*(T)$ ist eindeutig und für den Durchmesser von T gilt $D(T) = 2 \max_{v \in V}\{d_T(y^*(t), v)\}$).
x^* ist Mittelpunkt von jedem Durchmesser(-Pfad) von $T(x^*)$.

$$
\begin{aligned}
D(T(x^*)) &= 2 \max_{v \in V} d_{T(x^*)}(x^*, v) && (1)\\
&= 2 \max_{v \in V} d_G(x^*, v) && (2)\\
&\leq 2 \max_{v \in V} d_G(y^*(T), v) && (3)\\
&\leq 2 \max_{v \in V} d_T(y^*(T), v) = D(T) && (4)
\end{aligned}
$$

□

Shortcut-Werte

- gegeben: gerichteter Graph $G = (V, E)$
- gesucht: shortcut-Werte aller Kanten von G
- Maximale Erhöhung der Länge eines kürzesten Pfades durch Entfernen einer Kante $e = (u, v) \in E$
- Berechne für jede Kante $e = (u, v) \in E$ die Distanz von u zu v in $G_e = (V, E \setminus \{e\})$, denn die maximale Erhöhung betrifft immer (auch) die Endknoten der Kante

- einfache Lösung: $m = |E|$ SSSP Aufrufe
- besser: nur $n = |V|$ äquivalente Aufrufe

Shortcut-Werte

Annahmen:

- keine Kreise mit negativem Gesamtgewicht

$\Rightarrow$ $d(i,j)$ ist definiert für alle Knotenpaare (i,j)

- keine parallelen Kanten

Idee:

- Ein Aufruf für Knoten u berechnet shortcut-Werte für alle ausgehenden Kanten

Shortcut-Werte

Vorgehen:

- Fixiere einen Startknoten u
- $\alpha_i = d(u, i)$: Distanz von u nach i
- τ_i: zweiter Knoten der kürzesten Pfade von u zu i, falls dieser Knoten eindeutig ist.
  Ansonsten $\tau_i = \perp$ (impliziert zwei kürzeste Pfade der Länge α_i mit unterschiedlichen Anfangskanten).
- β_i: Länge des kürzesten Pfades von u nach i, so dass τ_i nicht zweiter Knoten
  (∞ falls es keinen Pfad mehr gibt, $\beta_i = \alpha_i$ falls $\tau_i = \perp$)

Shortcut-Werte

- Betrachte α_v, τ_v und β_v für einen Nachbarn v von u, also $(u, v) \in E$.
- Dann ist die shortcut-Distanz für (u, v) gleich α_v falls $\tau_v \neq v$, also wenn Kante (u, v) nicht einziger kürzester Pfad ist
- Ansonsten, falls $\tau_v = v$, ist die neue Distanz β_v
- $\alpha_u = 0, \quad \tau_u = \emptyset, \quad \beta_u = \infty$

$$\alpha_j = \min_{i:(i,j)\in E} (\alpha_i + \omega(i,j))$$

- Nachbarn bezüglich eingehender Kanten, die zu einem kürzesten Pfad gehören:

$$I_j = \{i : (i,j) \in E \text{ und } \alpha_j = \alpha_i + \omega(i,j)\}$$

Shortcut-Werte

$$\tau_j = \begin{cases} j & \text{if } I_j = \{u\}, \quad u \text{ ist Anfang, Kante } (u,j) \\ a & \text{if } \forall i \in I_j : \ a = \tau_i \\ & \text{(Alle Vorgänger haben erste Kante } (u,a)), \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

Im Fall $\tau_j = \perp$ gilt $\beta_j = \alpha_j$, sonst

$$\beta_j = \min \left\{ \min_{i:\ (i,j)\in E, \tau_i = \tau_j} \beta_i + \omega(i,j), \min_{i:\ (i,j)\in E, \tau_i \neq \tau_j} \alpha_i + \omega(i,j) \right\}$$

Shortcut-Werte

Betrachte den Pfad p der zu β_j führt, also ein kürzester Pfad p von u nach j, der nicht mit τ_j beginnt.

Wenn für den letzten Knoten i vor j in p gilt $\tau_i = \tau_j$, dann startet der Pfad p bis zu i nicht mit τ_j, und dieser Pfad wird in β_i und damit in β_j berücksichtigt.

Wenn anderenfalls $\tau_i \neq \tau_j$ für den vorletzten Knoten i von Pfad p gilt, dann beginnt einer der kürzesten Pfade von u nach i nicht mit τ_j und die Länge von p ist $\alpha_i + \omega(i, j)$.

Shortcut-Werte

Berechnung der Werte α_i, τ_i und β_i:

Im Fall positiver Gewichte hängt jeder Wert α_i nur von Werten α_j ab, die kleiner als α_i sind
$\Rightarrow$ Berechnung in monotoner Weise nach Dijkstra

Bei positiven Gewichten ist der kürzeste-Wege-DAG kreisfrei und die Werte τ_i können in der Reihenfolge einer topologischen Sortierung berechnet werden
(sonst stark zusammenhängende Komponenten kontrahieren)

Werte β_i hängen nur von Werten $\beta_j \leq \beta_i$ ab
$\Rightarrow$ Berechnung in monotoner Weise nach Dijkstra

Bei negativen Kantengewichten (aber keine negativen Kreise) Dijkstra durch Bellman-Ford Algorithmus und β_i durch Berechnung von $\beta'_i = \beta_i - \alpha_i$ ersetzen

Katz' Status Index

Modell:

- Einfluss entsteht aus Anhängerschaft bzw. aus indirekter Wahl

$\Rightarrow$ wenn A ein Anhänger von B ist und B ist Anhänger von C, dann ist A auch ein (indirekter) Anhänger bzw. Wähler von C

- mit zunehmender Anzahl von Zwischenschritten soll dieser Effekt jedoch abnehmen

$\Rightarrow$ Dämpfungsfaktor $\alpha > 0$

- ungewichteter, gerichteter Graph $G = (V, E)$ ohne Schleifen
- Adjazenzmatrix A, Anzahl Wege der Länge k von j nach i ist $(A^k)_{ji}$
- Status von Knoten i:

$$\mathbf{c}_K(i) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \alpha^k (A^k)_{ji}$$

falls die unendliche Summe konvergiert

Katz' Status Index

- in Matrixnotation:

$$\mathbf{c}_K = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k (A^T)^k \mathbf{1}_n$$

  wobei $\mathbf{1}_n$ der n-dimensionale Vektor ist, dessen Einträge alle 1 sind
- für die Konvergenz muss α beschränkt werden

Satz

Sei A die Adjazenzmatrix eines Graphen G mit größtem Eigenwert λ_1 und $\alpha > 0$, dann gilt:

$$\lambda_1 < \frac{1}{\alpha} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k A^k \text{ konvergiert}$$

Katz' Status Index

Unter der Annahme der Konvergenz erhält man die geschlossene Form:

$$\mathbf{c}_K = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k (A^T)^k \mathbf{1}_n = \left(\left(I - \alpha A^T \right)^{-1} \right) \mathbf{1}_n$$

bzw.

$$\left(I - \alpha A^T \right) \mathbf{c}_K = \mathbf{1}_n$$

$\Rightarrow$ inhomogenes lineares Gleichungssystem

$\mathbf{c}_K(i)$ hängt von den anderen $\mathbf{c}_K(j)$ mit $j \neq i$ ab (Feedback-Zentralität)

Eigenvektor-Zentralität von Bonacich

Phillip Bonacich, 1972:

- gegeben: ungerichteter Graph
  (ungewichtet, zusammenhängend, einfach und ohne Schleifen)
- 3 Ansätze:
  a. Faktoranalyse
  b. Konvergenz einer unendlichen Reihe
  c. Lösung eines linearen Gleichungssystems
- Werte $\mathbf{s}^a$, $\mathbf{s}^b$ und $\mathbf{s}^c$ unterscheiden sich aber nur durch konstante Faktoren

Eigenvektor-Zentralität von Bonacich

Faktoranalyse:

- Interpretiere den Graph als Freundschaftsnetzwerk
- Eine Kante bedeutet Freundschaft zwischen den Endknoten
- gesucht: Vektor $\mathbf{s}^a \in \mathbb{R}^n$, so dass der i-te Eintrag $\mathbf{s}_i^a$ das "Freundschaftspotential" von Knoten i enthält.
- $\mathbf{s}_i^a \mathbf{s}_j^a$ soll möglichst nah bei a_{ij} liegen
- interpretiere das Problem als Minimierung des folgenden Ausdrucks (mit der Methode der kleinsten Quadrate):

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\mathbf{s}_i^a \mathbf{s}_j^a - a_{ij} \right)^2$$

Eigenvektor-Zentralität von Bonacich

Unendliche Reihe:

Für ein gegebenes $\lambda_1 \neq 0$ definiere

$$\mathbf{s}^{b_0} = \mathbf{1}_n \quad \text{und} \quad \mathbf{s}^{b_k} = A\frac{\mathbf{s}^{b_{k-1}}}{\lambda_1} = A^k\frac{\mathbf{s}^{b_0}}{\lambda_1^k}$$

Betrachte die Sequenz

$$\mathbf{s}^{b} = \lim_{k\to\infty} \mathbf{s}^{b_k} = \lim_{k\to\infty} A^k\frac{\mathbf{s}^{b_0}}{\lambda_1^k}$$

Satz

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix mit größtem Eigenwert λ_1, dann konvergiert

$$\lim_{k\to\infty} A^k\frac{\mathbf{s}^{b_0}}{\lambda_1^k}$$

gegen einen Eigenvektor von A mit zugehörigem Eigenwert λ_1.

Eigenvektor-Zentralität von Bonacich

Lineares Gleichungssystem:

- Definiere Zentralität jedes Knotens als Summe der Zentralitäten seiner Nachbarn:

$$\mathbf{s}_i^c = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{s}_j^c \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{s}^c = A\mathbf{s}^c$$

$\Rightarrow$ immer mögliche Lösung: alle Zentralitäten gleich Null

$\Rightarrow$ hat nur eine sinnvolle Lösung, falls $\det(A - I) = 0$ bzw. wenn 1 ein Eigenwert von A ist

- relaxiere das Problem zum Eigenwertproblem:

$$\lambda\mathbf{s} = A\mathbf{s} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{s} = \frac{1}{\lambda}A\mathbf{s}$$

Eigenvektor-Zentralität von Bonacich

Satz

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Adjazenzmatrix eines ungerichteten zusammenhängenden Graphen. Dann

- *ist der größte Eigenwert λ_1 von A ein einfacher Eigenwert,*
- *sind alle Einträge des zu λ_1 gehörenden Eigenvektors ungleich Null und haben das gleiche Vorzeichen.*

(siehe auch Satz von Perron und Frobenius)

Eigenvektor-Zentralität von Bonacich

- Alle 3 Varianten unterscheiden sich nur durch konstante Faktoren.

$\Rightarrow$ Normierte Eigenvektor-Zentralität:

$$\mathbf{c}_{EV} = \frac{|\mathbf{s}|}{||\mathbf{s}||}$$

- im Fall unzusammenhängender Graphen kann man den Ansatz auf jede Zusammenhangskomponente anwenden

Hubbell Index

Charles Hubbell, 1965:

- gegeben: einfacher gewichteter gerichteter Graph (darf Schleifen enthalten, aber keine Multikanten)
- Adjazenzmatrix ist hier u.U. asymmetrisch
- Idee: (ähnlich wie bei Bonacich)
  Wert eines Knotens v hängt von der Summe der Werte seiner Nachbarn w, gewichtet mit dem jeweiligen Kantengewicht ab
- Es soll also gelten:

$$\mathbf{e} = W\mathbf{e}$$

- "Exogener Input" E (externe Information zu jedem Knoten) wird eingeführt, um das System lösbar zu machen
- im Falle des Fehlens: $\mathbf{E} = \mathbf{1}$

$\Rightarrow$ Gleichung

$$\mathbf{s} = \mathbf{E} + W\mathbf{s}$$

Hubbell Index

- umgeformt:

$$\mathbf{s} = (I - W)^{-1}\mathbf{E}$$

- System hat eine Lösung, falls $(I - W)$ invertierbar ist
- Da

$$(I - W)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} W^k$$

$\Rightarrow$ äquivalent zur Konvergenz der geometrischen Reihe

- Reihe konvergiert gegen $(I - W)^{-1}$ gdw. der größte Eigenwert λ_1 von W kleiner als 1 ist
- Lösung des Gleichungssystems heißt Hubbell-Index

Bonacich's Verhandlungszentralität

Phillipp Bonacich, 1987: Verhandlungszentralität (bargaining centrality)

- bisherige Feedback-Zentralitäten basieren auf positiver Rückkopplung: die Zentralität eines Knotens ist umso höher, je höher die Zentralität seiner Nachbarn ist
- Folgender Ansatz ermöglicht sowohl eine Modellierung dieses positiven Einflusses als auch eine Modellierung mit negativem Einfluss wie z.B. in Verhandlungssituationen
- Verhandlungssituation:
  Ein Knoten ist stark, wenn er mit Knoten verbunden ist, die keine anderen Optionen haben und deshalb schwach sind.

Bonacich's Verhandlungszentralität

- gegeben: ungewichteter gerichteter Graph $G = (V, E)$ ohne Schleifen

$\Rightarrow$ Adjazenzmatrix ist im Allgemeinen nicht symmetrisch und enthält nur Nullen und Einsen

- Definition:

$$c_{\alpha,\beta}(i) = \sum_{j=1}^{n} (\alpha + \beta \cdot c_{\alpha,\beta}(j)) a_{ij}$$

- in Matrixnotation:

$$\mathbf{c}_{\alpha,\beta} = \alpha(I - \beta A)^{-1} A\mathbf{1}$$

$\Rightarrow$ α ist nur ein Skalierungsfaktor
Bonacich schägt vor, α so zu wählen, dass $\sum_{i=1}^{n} c_{\alpha,\beta}(i)^2 = n$

- β: positiver oder negativer Einfluss der Werte der Nachbarn
  $\beta = 0$: Zentralität proportional zum Grad
  $\beta < 0$ kann zu negativen Zentralitätswerten führen
- je größer $|\beta|$, desto größer der Einfluss der Netzwerkstruktur

Bonacich's Verhandlungszentralität

- Gleichungssystem ist lösbar, falls $(I - \beta A)$ invertierbar ist
- Nach folgendem Theorem existiert dieses Inverse, falls kein Eigenwert von A den Wert $1/\beta$ hat.

Satz

Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte einer Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Dann gilt:

$$(I - M) \text{ ist invertierbar} \iff \forall i \in \{1, \ldots, n\} : \lambda_i \neq 1$$

Webgraph

- gerichteter Graph $G = (V, E)$
- Webseiten entsprechen den Knoten
- Links zwischen Webseiten entsprechen den gerichteten Kanten

Random Surfer Model

- Modellierung des Verhaltens eines Websurfers als Random Walk auf dem Webgraph:

$$\Pr[X_{t+1} = v \mid X_t = u] = \begin{cases} \frac{1}{d^+(u)}, & \text{falls } (u,v) \in E \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- in jedem Schritt überschreitet der Random Walk zufällig eine der ausgehenden Kanten des aktuellen Knotens
- nur wohldefiniert, falls $\forall v \in V: \ d^+(v) \geq 1$
- in diesem Fall ist die Transitionsmatrix die stochastische $n \times n$-Matrix $T = (t_{i,j})$ mit $t_{i,j} = 1/d^+(i)$ falls $(i,j) \in E$ und $t_{i,j} = 0$ sonst

Random Surfer Model

- Webgraph ist nicht stark zusammenhängend

$\Rightarrow$ zugrundliegende Transitionsmatrix ist nicht irreduzibel

- Es existieren Senken
  (Webseiten ohne Links / Knoten ohne ausgehende Kanten)

$\Rightarrow$ Transitionsmatrix ist nicht einmal stochastisch

$\Rightarrow$ Matrix muss modifiziert werden, damit die entsprechende Markov-Kette in eine stationäre Verteilung konvergiert

- Um die Transitionsmatrix T stochastisch zu machen:
  Annahme, dass im Fall von Senken der Surfer zu einer zufälligen Seite springt:

$$t'_{i.j} = \begin{cases} \frac{1}{d^+(i)}, & \text{falls } (i,j) \in E \\ \frac{1}{n}, & \text{falls } d^+(i) = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Random Surfer Model

$\Rightarrow$ Transitionsmatrix T' ist stochastisch, aber nicht irreduzibel, Berechnung einer stationären Verteilung u.U. nicht möglich

- Sei $E = \frac{1}{n}\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^T$ die Random-Jump-Matrix, in der alle Einträge $\frac{1}{n}$ sind.
- Diese wird einfach in gewichteter Form zu T' addiert:

$$T'' = \alpha T' + (1 - \alpha)E$$

- α wird aus dem Intervall $[0, 1)$ gewählt und entspricht der Wahrscheinlichkeit, entweder einem Link auf der Seite zu folgen (T') oder zu einer zufälligen Seite zu springen (E)
- T'' ist stochastisch
  (denn T' und E sind stochastisch und in jeder Zeile bzw. Spalte wird ein α-Anteil mit einem $(1 - \alpha)$-Anteil der Gesamtwahrscheinlichkeit 1 addiert)
- T'' ist irreduzibel (alle Wahrscheinlichkeiten > 0)

Power Iteration

Algorithmus 4 : Power Method

Input : Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und Vektor $||\vec{q}^{(0)}||_2 = 1$
Output : Betragsmäßig größter Eigenwert $\lambda^{(k)}$
und korrespondierender Eigenvektor $\vec{q}^{(k)}$

$k := 1$;
repeat
  $\vec{z}^{(k)} := A\vec{q}^{(k-1)}$;
  $\vec{q}^{(k)} := \vec{z}^{(k)} / ||\vec{z}^{(k)}||_2$;
  $\lambda^{(k)} := (\vec{q}^{(k)})^T A\vec{q}^{(k)}$;
  $k := k + 1$;
until $\lambda^{(k)}$ *und* $\vec{q}^{(k)}$ *sind akzeptabel approximiert* ;

Power Iteration

- konvergiert garantiert, wenn A einen dominanten Eigenwert λ_1 hat, d.h. $\forall i \in \{2, \ldots, n\} : \ |\lambda_1| > |\lambda_i|$.
- konvergiert auch, wenn die Matrix symmetrisch ist
- Konvergenzgeschwindigkeit hängt vom Verhältnis $\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}$ ab
- Approximationsfehler sinkt mit

$$\mathcal{O}\left(\left(\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}\right)^k\right)$$

- erfordert lediglich Matrix-Vektor-Multiplikationen

$\Rightarrow$ ist besonders für große Matrizen geeignet
Für eine Iteration muss nur ein Scan über die Matrix laufen

$\Rightarrow$ auch effizient, falls nicht die ganze Matrix in den Hauptspeicher passt

Stationäre Verteilung im Random Surfer Model

- stationäre Verteilung π'' für Transitionsmatrix T'' kann mit Power Iteration berechnet werden
- Durch Modifikation von E können die Zufallssprünge in Richtung personalisierter Surfergewichtungen verändert werden.

PageRank

Lawrence Page, Sergey Brin, Rajeev Motwani & Terry Winograd (1998): PageRank

- wesentlicher Bestandteil der Suchmaschine von Google
- Idee: Bewertung der Wichtigkeit einer Webseite bezüglich der topologischen Eigenschaften (seiner Position im Web), unabhängig vom Inhalt (mal abgesehen von den Links)
- ist eine Feedback-Zentralität: Wert einer Webseite hängt von der Anzahl und der Zentralität der Webseiten ab, die darauf zeigen
- Gewicht einer Seite wird gleichmäßig an die verlinkten Seiten weitergegeben

$$\mathbf{c}_{\mathrm{PR}}(p) = \frac{1-d}{n} + d \sum_{q \in N^-(p)} \frac{\mathbf{c}_{\mathrm{PR}}(q)}{d^+(q)}$$

d: Dämpfungsfaktor
$N^-(p)$: Knoten mit einer Kante zu p

PageRank

- definiere Transitionsmatrix P:

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{d^+(j)}, & \text{falls } (j,i) \in E \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- oder anders: $p_{ij} = \frac{1}{d^+(j)} a_{ji}$ bzw. $P = (D^+ A)^T$,
  wobei D^+ die Diagonalmatrix ist, die im i-ten Diagonaleintrag den Kehrwert des Ausgangsgrads $d^+(i)$ von Knoten i enthält (falls > 0)

- Matrixform:

$$\mathbf{c}_{\text{PR}} = dP\mathbf{c}_{\text{PR}} + \frac{1-d}{n}\mathbf{1}_n$$

- Lösung meist durch Power (oder Jacobi) Iteration:

$$\mathbf{c}^k_{\text{PR}} = dP\mathbf{c}^{k-1}_{\text{PR}} + \frac{1-d}{n}\mathbf{1}_n$$

PageRank

Folgender Satz garantiert eindeutige Lösung und Konvergenz für $d < 1$:

Satz

Falls $0 \leq d < 1$ *dann hat die Gleichung*

$$\mathbf{c}_{PR} = dP\mathbf{c}_{PR} + \frac{1-d}{n}\mathbf{1}_n$$

eine eindeutige Lösung $\mathbf{c}^*_{PR} = \frac{1-d}{n}\left(I_n - dP\right)^{-1}\mathbf{1}_n$

und die Lösungen des dynamischen Systems

$$\mathbf{c}^k_{PR} = dP\mathbf{c}^{k-1}_{PR} + \frac{1-d}{n}\mathbf{1}_n$$

erfüllen

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{c}^k_{PR} = \mathbf{c}^*_{PR}$$

für jeden Startvektor $\mathbf{c}^0_{PR}$.

PageRank

Etwas anderer Ansatz:

$$\mathbf{c}_{\mathrm{PR}}^{k} = dP\mathbf{c}_{\mathrm{PR}}^{k-1} + \frac{||\mathbf{c}^{k-1}|| - ||dP\mathbf{c}_{\mathrm{PR}}^{k-1}||}{n}\mathbf{1}_n$$

Die Lösungen dieses System konvergieren gegen $\frac{\mathbf{c}_{\mathrm{PR}}^{*}}{||\mathbf{c}_{\mathrm{PR}}^{*}||}$, die normalisierte Lösung des vorherigen Ansatzes.

Hubs & Authorities

Jon Kleinberg, 1997:

- HITS: Hyperlink-Induced Topic Search
- "A good hub is a page that points to many good authorities."
- "A good authority is a page that is pointed to by many good hubs."
- im Gegensatz zu PageRank berücksichtigt HITS auch den Inhalt von Webseiten
- 2 Phasen:
  - 1. Phase hängt von der Suchanfrage ab
  - 2. Phase beschäftigt sich nur mit der Linkstruktur des entsprechenden Netzwerks

Hubs & Authorities

- Suchanfrage σ
- 1. Phase berechnet $V_\sigma \in V$ mit
  - V_σ ist klein im Vergleich zu V,
  - V_σ enthält viele Seiten, die für die Suchanfrage σ relevant sind,
  - V_σ enthält viele wichtige Authorities

Hubs & Authorities

Algorithmus 5 : Hubs & Authorities, 1. Phase

Output : V_σ = Menge relevanter Seiten

Benutze eine textbasierte Suchmaschine für Suchanfrage σ;
Sei W_σ die Liste von Ergebnissen;
Wähle $t \in \mathbb{N}$;
Sei $W_\sigma^t \subset W_\sigma$ die Menge der t Seiten, die am höchsten bewertet wurden;
$V_\sigma := W_\sigma^t$;
forall the $i \in W_\sigma^t$ **do**
    $V_\sigma := V_\sigma \cup N^+(i)$;
    if $|N^-(i)| \leq r$ *(r ist eine benutzerspezifizierte Schranke)* **then**
        $V_\sigma := V_\sigma \cup N^-(i)$;
    else
        Wähle $N_r^-(i) \subseteq N^-(i)$ so, dass $|N_r^-(i)| = r$;
        $V_\sigma := V_\sigma \cup N_r^-(i)$;
return V_σ;

Hubs & Authorities

- 2. Phase berechnet die Hub/Authority-Werte der Seiten im induzierten Graphen $G[V_\sigma]$ aus der gegenseitigen Abhängigkeit zwischen Hubs und Authorities:

$$\mathbf{c}_{\text{HA-H}} = A_\sigma \mathbf{c}_{\text{HA-A}} \text{ unter der Annahme, dass } \mathbf{c}_{\text{HA-A}} \text{ bekannt ist}$$
$$\mathbf{c}_{\text{HA-A}} = A_\sigma^T \mathbf{c}_{\text{HA-H}} \text{ unter der Annahme, dass } \mathbf{c}_{\text{HA-H}} \text{ bekannt ist}$$

A_σ: Adjazenzmatrix von $G[V_\sigma]$

- Da weder $\mathbf{c}_{\text{HA-A}}$ noch $\mathbf{c}_{\text{HA-H}}$ bekannt sind, schlägt Kleinberg eine iterative Bestimmung mit Normalisierung vor.

Hubs & Authorities

Algorithmus 6 : Hubs & Authorities Iteration

Output : Approximationen für $\mathbf{c}_{\text{HA-H}}$ and $\mathbf{c}_{\text{HA-A}}$

$\mathbf{c}^0_{\text{HA-A}} := \mathbf{1}_n$;
for $k = 1 \ldots$ **do**
$\mathbf{c}^k_{\text{HA-H}} := A_\sigma \mathbf{c}^{k-1}_{\text{HA-A}}$;
$\mathbf{c}^k_{\text{HA-A}} := A^T_\sigma \mathbf{c}^k_{\text{HA-H}}$;
$\mathbf{c}^k_{\text{HA-H}} := \frac{\mathbf{c}^k_{\text{HA-H}}}{\|\mathbf{c}^k_{\text{HA-H}}\|}$;
$\mathbf{c}^k_{\text{HA-A}} := \frac{\mathbf{c}^k_{\text{HA-A}}}{\|\mathbf{c}^k_{\text{HA-A}}\|}$;

Hubs & Authorities

Satz

Sei A_σ die Adjazenzmatrix von $G[V_\sigma]$.
Dann sind die Grenzwerte

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{c}_{HA\text{-}A}^k = \mathbf{c}_{HA\text{-}A}$$

und

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{c}_{HA\text{-}H}^k = \mathbf{c}_{HA\text{-}H}$$

wobei $\mathbf{c}_{HA\text{-}A}$ ($\mathbf{c}_{HA\text{-}H}$) der erste Eigenvektor von $A_\sigma^T A_\sigma$ ($A_\sigma A_\sigma^T$) ist.

Hubs & Authorities

$\Rightarrow$ iterative Methode ist nichts anderes als die Lösung der Eigenvektor-Gleichungen

$$\begin{aligned} \lambda \mathbf{c}_{\text{HA-A}} &= (A_\sigma^T A_\sigma)\mathbf{c}_{\text{HA-A}} \\ \lambda \mathbf{c}_{\text{HA-H}} &= (A_\sigma A_\sigma^T)\mathbf{c}_{\text{HA-H}} \end{aligned}$$

für den größten Eigenwert per Power Iteration

$\mathbf{c}_{\text{HA-A}}$: enthält dann die Authority-Werte
$\mathbf{c}_{\text{HA-H}}$: enthält dann die Hub-Werte

Approximation von Zentralitätsindizes

- Obwohl die behandelten Zentralitätsindizes in polynomieller Zeit berechnet werden können, heißt das nicht unbedingt , dass die entsprechenden Algorithmen in der Praxis anwendbar sind.

- Beispiel:
  Betweenness-Zentralität für die Knoten des Web-Graphen lässt sich selbst mit dem Algorithmus von Brandes nicht in akzeptabler Zeit berechnen.

$\Rightarrow$ Möglichst wenige Traversierungen bzw. SSSP-Durchläufe auf dem Graphen

$\Rightarrow$ Näherungslösungen mit möglichst geringer Abweichung (mit hoher Wahrscheinlichkeit)

Approximation von Closeness

- Closeness:
$$c_C(v) = \frac{1}{\sum_{w \in V} d(v, w)}$$
- Approximation: wähle k andere Knoten $v_1, \ldots, v_k \in V$
$$\hat{c}_C(v) = \frac{k}{n} \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} d(v, v_i)}$$
- Vorgehen (Eppstein / Wang):
  1. Wähle k Knoten $v_1, \ldots, v_k$ gleichverteilt zufällig
  2. Löse für jeden Knoten v_i das SSSP mit diesem Knoten als Startknoten und
  3. berechne für jeden Knoten $v \in V$ die Zentralität
$$\hat{c}_C(v) = \frac{k}{n \cdot \sum_{i=1}^{k} d(v, v_i)}$$

Hoeffdings Ungleichung

Satz (Hoeffdings Ungleichung)

Seien $X_1, \ldots, X_k$ unabhängige Zufallsvariablen mit $a_i \leq X_i \leq b_i$ und $\mu = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{k} X_i/k\right]$ der erwartete Durchschnitt. Dann gilt

$$\Pr\left\{\left|\frac{\sum_{i=1}^{k} X_i}{k} - \mu\right| \geq \xi\right\} \leq 2 \cdot e^{-2k^2\xi^2/\sum_{i=1}^{k}(b_i-a_i)^2}$$

bzw. im Fall $a_i = a$, $b_i = b$ $(\forall i)$

$$\Pr\left\{\left|\frac{\sum_{i=1}^{k} X_i}{k} - \mu\right| \geq \xi\right\} \leq 2 \cdot e^{-2k\xi^2/(b-a)^2}$$

Anwendung der Hoeffding-Ungleichung

Setze

$$\begin{aligned} X_i &= n \cdot \frac{d(v_i, u)}{n-1} \\ \mu &= \frac{1}{c_C(v)} \\ a_i &= 0 \\ b_i &= \frac{n \cdot \mathrm{diam}(G)}{n-1} \end{aligned}$$

Anwendung der Hoeffding-Ungleichung

$$\begin{aligned}
\Pr\left\{\left|\frac{\sum_{i=1}^{k} X_i}{k} - \mu\right| \geq \xi\right\} &\leq 2 \cdot e^{-2k^2\xi^2 / \sum_{i=1}^{k}(b_i - a_i)^2} \\
&= 2 \cdot e^{-2k^2\xi^2 / \left(k\left(\frac{n \cdot \mathrm{diam}(G)}{n-1}\right)^2\right)} \\
&= 2 \cdot e^{-\Omega\left(k\xi^2 / \mathrm{diam}(G)^2\right)}
\end{aligned}$$

- Wähle $\xi = \epsilon \cdot \mathrm{diam}(G)$
- $k = \Theta\left(\frac{\log n}{\epsilon^2}\right)$ SSSP-Läufe

$\Rightarrow$ Wahrscheinlichkeit, einen Fehler größer als $\epsilon \cdot \mathrm{diam}(G)$ zu machen ist höchstens $\frac{1}{n}$ für jeden Wert

Laufzeit der Closeness-Approximation

- Komplexität eines SSSP-Laufs
  - $\mathcal{O}(m+n)$ in ungewichteten Graphen
  - $\mathcal{O}(m+n\log n)$ in gewichteten Graphen
- Komplexität von k SSSP-Läufen
  - $\mathcal{O}(k\cdot(m+n))$ in ungewichteten Graphen
  - $\mathcal{O}(k\cdot(m+n\log n)$ in gewichteten Graphen

$\Rightarrow$ Komplexität von $\Theta\left(\frac{\log n}{\epsilon^2}\right)$ SSSP-Läufen

- $\mathcal{O}\left(\frac{\log n}{\epsilon^2}\cdot(m+n)\right)$ in ungewichteten Graphen
- $\mathcal{O}\left(\frac{\log n}{\epsilon^2}\cdot(m+n\log n)\right)$ in gewichteten Graphen

Approximation von Betweenness

- gewichtete gerichtete Graphen
- wähle wieder k Knoten zufällig (gleichverteilt) aus
- Berechne für jeden Startknoten v_i die totalen Abhängigkeiten $\delta_{v_i*}(v)$ aller anderen Knoten v
- Berechne

$$\hat{c}_B(v) = \sum_{i=1}^{k} \frac{n}{k} \cdot \delta_{v_i*}(v)$$

- $\mathbb{E}[\hat{c}_B(v)] = c_B(v)$ für alle k und v

Anwendung der Hoeffding-Ungleichung

Setze

$$\begin{aligned} X_i &= n \cdot \delta_{v_i *} \\ \mu &= c_B(v) \\ a_i &= 0 \\ b_i &= n(n-2) \end{aligned}$$

$\delta_{v_i *}$ kann höchstens $n-2$ sein, und zwar wenn alle kürzesten Pfade, die von v_i ausgehen, über v laufen. Also ist X_i durch $n(n-2)$ begrenzt.

Anwendung der Hoeffding-Ungleichung

$$\begin{aligned}\Pr\left\{|\hat{c}_B(v) - c_B(v)| \geq \xi\right\} &\leq 2 \cdot e^{-2k^2\xi^2 / \sum_{i=1}^{k}(b_i - a_i)^2} \\ &= 2 \cdot e^{-2k^2\xi^2 / \left(k(n(n-2))^2\right)} \\ &= 2 \cdot e^{-2k\xi^2 / (n(n-2))^2}\end{aligned}$$

- Wähle $\xi = \epsilon \cdot n(n-2)$
- $k = \Theta\left(\frac{\log n}{\epsilon^2}\right)$ Startknoten / Läufe

$\Rightarrow$ Wahrscheinlichkeit, einen Fehler größer als $\epsilon \cdot n(n-2)$ zu machen ist höchstens $\frac{1}{n}$ für jeden Wert

Laufzeit der Betweenness-Approximation

- Komplexität eines Laufs (für $\delta_{v_i *}(v)$)
  - $\mathcal{O}(m+n)$ in ungewichteten Graphen
  - $\mathcal{O}(m+n\log n)$ in gewichteten Graphen
- Komplexität von k Läufen
  - $\mathcal{O}(k\cdot(m+n))$ in ungewichteten Graphen
  - $\mathcal{O}(k\cdot(m+n\log n)$ in gewichteten Graphen

$\Rightarrow$ Komplexität von $\Theta\left(\frac{\log n}{\epsilon^2}\right)$ Läufen

- $\mathcal{O}\left(\frac{\log n}{\epsilon^2}\cdot(m+n)\right)$ in ungewichteten Graphen
- $\mathcal{O}\left(\frac{\log n}{\epsilon^2}\cdot(m+n\log n)\right)$ in gewichteten Graphen

Ergebnis

- Gewinn: k anstatt n SSSP-artige Läufe

- Verfahren des normalisierten Durchschnitts basierend auf zufälligem Knoten-Sampling läßt sich auf viele andere Zentralitäten übertragen

Übersicht

Kohäsive Gruppen

Eigenschaften:

- Gegenseitigkeit:

  Gruppenmitglieder wählen sich gegenseitig in die Gruppe und sind im graphtheoretischen Sinn benachbart

- Kompaktheit / Erreichbarkeit:

  Gruppenmitglieder sind gegenseitig gut erreichbar
  (wenn auch nicht unbedingt adjazent), insbesondere
  - auf kurzen Wegen
  - auf vielen verschiedenen Wegen

- Dichte:

  Gruppenmitglieder haben eine große Nachbarschaft innerhalb der Gruppe

- Separation:

  Gruppenmitglieder haben mit größerer Wahrscheinlichkeit Kontakt zu einem anderen Mitglied der Gruppe als zu einem Nicht-Gruppenmitglied

Lokale Dichte

- Eine Gruppeneigenschaft heißt lokal, wenn sie bestimmt werden kann, indem man nur den von der Gruppe induzierten Teilgraphen betrachtet.

$\Rightarrow$ Separation ist *nicht lokal*, weil hier auch die Verbindungen zu den anderen Knoten betrachtet werden

- Einige Definitionen von kohäsiven Gruppen verlangen außer einer Eigenschaft Π auch Maximalität (im Sinne von Nichterweiterbarkeit), d.h. die Gruppe darf nicht in einer anderen größeren Gruppe enthalten sein.
- Maximalität verletzt die Lokalitätsbedingung

$\Rightarrow$ Betrachten diese Eigenschaften ohne Maximalitätsbedingung

- Lokalität reflektiert wichtige Eigenschaft von Gruppen:
  - Invarianz unter Veränderung des Netzwerks außerhalb der Gruppe
  - Innere Robustheit und Stabilität ist eine wichtige Gruppeneigenschaft

Cliquen

Definition

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.

Ein Knotenteilmenge $U \subseteq V$ heißt Clique genau dann, wenn der von U in G induzierte Teilgraph $G[U]$ ein vollständiger Graph ist.

Eine Clique U in G ist eine maximale Clique, falls es keine Clique U' mit $U \subset U'$ in G gibt.

Eine Clique U in G ist eine Maximum-Clique, falls es keine Clique U' mit $|U| < |U'|$ in G gibt.

Cliquen – ideale kohäsive Gruppen

Cliquen sind ideale kohäsive Gruppen:
(Sei U eine Clique der Kardinalität k.)

- Cliquen haben größtmögliche Dichte

$$\delta(G[U]) = \bar{d}(G[U]) = \Delta(G[U]) = k - 1$$

- Cliquen besitzen größtmögliche Kompaktheit

$$\text{diam}(G[U]) = 1$$

- Cliquen sind bestmöglich verbunden
  U ist $(k-1)$-fach knotenzusammenhängend und
  $(k-1)$-fach kantenzusammenhängend

Satz von Turán

Satz (Turán, 1941)

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $n = |V|$ und $m = |E|$.
Falls $m > \frac{n^2}{2} \cdot \frac{k-2}{k-1}$, dann existiert eine Clique der Größe k in G.

Spezialfall:

Satz (Mantel, 1907)

Die maximale Anzahl von Kanten in einem dreiecksfreien Graphen ist $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$.

Da die meisten (z.B. soziale) Netzwerke eher dünn sind (also $o(n^2)$ Kanten haben), müssen sie nicht unbedingt von vornherein Cliquen einer bestimmten Größe > 2 enthalten.

Maximale Cliquen

- Graphen enthalten mindestens eine maximale Clique, meistens sogar viele.
- Sie können sich überlappen (ohne identisch zu sein).

Satz (Moon & Moser, 1965)

Jeder ungerichtete Graph G mit n Knoten hat höchstens $3^{\lceil \frac{n}{3} \rceil}$ maximale Cliquen.

Cliquen-Struktur

- Cliquen sind abgeschlossen unter Exklusion, d.h. wenn U eine Clique in G ist und v ein Knoten aus U, dann ist $U \setminus \{v\}$ auch eine Clique.

  Oder anders gesagt:

  Die Cliqueneigenschaft ist eine hereditäre Grapheigenschaft, denn sie vererbt sich auf induzierte Teilgraphen.

- Cliquen sind geschachtelt, d.h. jede Clique der Größe n enthält eine Clique der Größe $n-1$ (sogar n davon).

  Das folgt hier sofort aus dem Abschluss unter Exklusion.
  Für andere Eigenschaften, die nicht unter Exklusion abgeschlossen sind, muss man das aber extra beweisen.

Generalisierte Cliquen

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, U eine Teilmenge der Knoten und $k > 0$ eine natürliche Zahl.
Generalisierte (distanz-basierte) Cliquen:

- U heißt k-Clique g.d.w. $\forall u, v \in U : \quad d_G(u, v) \leq k$.
- U heißt k-Club g.d.w. $\text{diam}(G[U]) \leq k$.
- U heißt k-Clan g.d.w. U ist eine maximale k-Clique und U ist ein k-Club.

- k-Cliquen sind nicht lokal definiert (die Distanzen können sich aus Pfaden ergeben, die über Knoten außerhalb von U führen).
- Obwohl k-Clubs und k-Clans lokal definiert sind (abgesehen von der Maximalitätsbedingung), sind sie nur von geringerem Interesse. Distanz-basierte Cliquen sind i.A. nicht abgeschlossen unter Exklusion und nicht geschachtelt.

Grundfunktionen

In $\mathcal{O}(m+n)$ können folgende Funktionen berechnet werden:

- Bestimme, ob eine gegebene Knotenteilmenge $U \subseteq V$ eine Clique in G ist.

  Bestimme für jede Kante in G, ob beide Endknoten in U sind:
  Zähle die Fälle und vergleiche mit $|U| \cdot (|U| - 1)/2$.

- Bestimme, ob eine gegebene Clique $U \subseteq V$ maximal ist in G.

  Teste, ob es einen Knoten in $V \setminus U$ gibt, der adjazent zu allen Knoten in U ist.

Maximale Clique

Bestimme die lexikographisch kleinste maximale Clique U, die eine gegebene Clique $U' \subseteq V$ enthält.

Die Ordnung auf den Cliquen sei wie folgt definiert ($U, U' \subseteq V$):
$U < U' \Leftrightarrow$ Der kleinste Knoten aus $U \cup U'$, der nicht in $U \cap U'$ ist, ist in U.

- Annahme: V ist eine geordnete Menge
- Starte mit $U = U'$
- Iteriere über alle $v \in V \setminus U$ in aufsteigender Reihenfolge
  - Teste, ob $U \subseteq N(v)$.
  - Falls ja, dann füge v zu U hinzu.
- Am Ende ist U eine maximale Clique, die U' enthält.

$\Rightarrow$ ebenfalls $\mathcal{O}(m + n)$

Cliquen maximaler Kardinalität

Maximum-Clique:
Clique der größtmöglichen Kardinalität in einem gegebenen Graphen

Primitiver Algorithmus: erschöpfende Suche

- Zähle alle Kandidatensets $U \subseteq V$ auf und bestimme, ob U eine Clique ist.
- Gib die größte gefundene Clique aus.

$\Rightarrow$ Laufzeit $\mathcal{O}(n^2 \cdot 2^n)$

Clique-Problem

Entscheidungsproblem:

Problem

Problem: **Clique**
Eingabe: *Graph G, Parameter $k \in \mathbb{N}$*
Frage: *Existiert eine Clique U der Kardinalität $|U| \geq k$ in G?*

Härte des Clique-Problems

Sei $\omega(G)$ die Größe der Maximum-Clique(n) in G.

Wenn wir einen Algorithmus hätten, der **Clique** in Zeit $T(n)$ entscheidet, dann könnten wir $\omega(G)$ in Zeit $\mathcal{O}(T(n) \cdot \log n)$ mit binärer Suche berechnen.

Andererseits ergibt sich aus jedem Algorithmus zur Berechnung von $\omega(G)$ in Zeit $T(n)$ ein Algorithmus, der **Clique** in $T(n)$ entscheidet.

Ein polynomieller Algorithmus für das eine Problem würde als einen polynomiellen Algorithmus für das jeweils andere Problem implizieren.

Aber:

Satz

Clique *ist $\mathcal{NP}$-vollständig.*

Beweis: Reduktion von **Satisfiability** (Erfüllbarkeit)

Versteckte Cliquen

Folgerung

Falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ gilt, gibt es keinen Polynomialzeit-Algorithmus, der eine Clique der Größe k in einem Graphen findet, der garantiert eine solche Clique der Größe k enthält.

Bemerkung:

Die Schwierigkeit, eine versteckte Clique zu finden, hängt nicht von der Größe der Clique ab.

Auch Cliquen der Größe $(1 - \varepsilon) \cdot n$ können nicht in Polynomialzeit gefunden werden.

Maximum-Clique: besserer exponentieller Algorithmen

Satz

Eine Maximum-Clique (also eine Clique maximaler Kardinalität) kann in Zeit $\mathcal{O}^*(1.3803^n)$ berechnet werden.

($\mathcal{O}^*$ ignoriert polynomielle Faktoren)

Maximum-Clique: besserer exponentieller Algorithmus

Beweis.

- Falls $\delta(G) \geq n - 3$, dann
  - fehlen in G nur einfache Pfade und Kreise im Vergleich zum vollständigen Graphen K_n

  $\Rightarrow$ Maximum Clique kann in $\mathcal{O}(m + n)$ berechnet werden:
  - betrachte zur Veranschaulichung den komplementären Graphen

  $\Rightarrow$ Cliquen entsprechen unabhängigen Mengen
  - In einem Pfad P kann man die Größe einer unabhängigen Menge (independent set) maximaler Kardinalität berechnen als $\lceil |V(P)|/2 \rceil$.
  - In einem Kreis C ist die Größe $\lfloor |V(C)|/2 \rfloor$.
  - Da die Pfade und Kreise paarweise disjunkt sind, kann man die einzelnen Werte einfach addieren.

Maximum-Clique: besserer exponentieller Algorithmus

Beweis.

- Ansonsten sei v ein Knoten mit Grad $\deg_G(v) \leq n-4$
- Jede Maximum-Clique ist entweder
  - $\{v\}$ vereinigt mit einer Maximum-Clique von $G[N(v)]$ oder
  - eine Maximum-Clique von $G[V \setminus \{v\}]$.

$\Rightarrow$ Rekursive Berechnung mit worst-case-Zeit

$$T(n) \leq T(n-4) + T(n-1) + c \cdot (m+n)$$

$\Rightarrow$ mit Erzeugendenfunktionen kann man zeigen, dass $T(n) \in \mathcal{O}^*(\beta^n)$ mit $\beta \approx 1.3803$, wobei β die größte reelle Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\beta^4 - \beta^3 - 1$ ist

Approximation von Maximum-Cliquen

Approximation der größten Clique mit Faktor $n/2$ ist einfach: wähle die Endknoten einer Kante, falls es eine gibt.

Satz

Es gibt einen Algorithmus, der bei Eingabe eines Graphen G mit n Knoten in polynomieller Zeit eine Clique ausgibt, deren Größe maximal um einen Faktor $\mathcal{O}\left(\frac{n}{(\log n)^2}\right)$ von der Maximum-Cliquengröße $\omega(G)$ abweicht.

Satz

Falls nicht $\mathcal{NP} = \mathcal{ZPP}$ gilt, dann existiert kein Polynomialzeitalgorithmus, der bei Eingabe eines Graphen G mit n Knoten eine Clique ausgibt, deren Größe maximal um einen Faktor $n^{1-\epsilon}$ von der Maximum-Cliquengröße $\omega(G)$ abweicht (für jedes $\epsilon > 0$).

$\mathcal{ZPP}$: Klasse der Probleme, die von randomisierten Algorithmen in erwarteter Polynomialzeit gelöst werden können ohne Fehler zu machen

Suche nach Cliquen fester Größe

- In einigen Fällen reicht es, nach Cliquen fester Größe zu suchen

$\Rightarrow$ Cliquengröße wird nicht als Teil der Eingabe betrachtet

- Vollständige Suche: $\mathcal{O}(k^2 \cdot n^k) = \mathcal{O}(n^k)$,
  wenn Cliquengröße k fest ist

Bessere Komplexität für Dreiecke

- $A(G)$: Adjazenzmatrix von Graph G
- $B(G) = A(G)^2 = A(G) \cdot A(G)$: Einträge b_{ij} sind die Wege der Länge 2 zwischen den Knoten v_i und v_j

$\Rightarrow$ läßt sich durch schnellere Matrixmultiplikation ausrechnen, z.B. in $\mathcal{O}(n^{2.376})$ (Coppersmith / Winograd, 1990)

- Existiert ein Eintrag $b_{ij} \geq 1$ mit $i \neq j$, dann gibt es einen Knoten $u \in V$, der zu v_i und zu v_j adjazent ist.
- Wenn nun auch eine Kante $\{v_i, v_j\}$ existiert, dann enthält der Graph ein Dreieck $\{v_i, v_j, u\}$

$\Rightarrow$ Checke für alle echt positiven Werte b_{ij}, ob es eine Kante $\{v_i, v_j\}$ gibt

$\Rightarrow$ Zeit-Komplexität: $\mathcal{O}(n^\alpha)$, wobei $\alpha < 2.376$ der Exponent für Matrixmultiplikation ist

Cliquen fester Größe $k \geq 3$

Sei $\alpha(r, s, t)$ so definiert, dass man die Multiplikation einer $n^r \times n^s$-Matrix mit einer $n^s \times n^t$-Matrix in Zeit $\mathcal{O}\left(n^{\alpha(r,s,t)}\right)$ berechnen kann.

Satz

Für jedes $k \geq 3$ existiert ein Algorithmus, der eine Clique der Größe k in einem Graphen mit n Knoten finden kann (falls eine solche existiert) und der in Zeit $\mathcal{O}\left(n^{\beta(k)}\right)$ läuft, wobei $\beta(k) = \alpha(\lfloor k/3 \rfloor, \lceil (k-1)/3 \rceil, \lceil k/3 \rceil)$.

Cliquen fester Größe $k \geq 3$

Beweis.

- Seien $k_1 = \lfloor k/3 \rfloor$, $k_2 = \lceil (k-1)/3 \rceil$ und $k_3 = \lceil k/3 \rceil$
- Es gilt $k = k_1 + k_2 + k_3$.
- Konstruiere tripartiten Hilfsgraph $\tilde{G}$
  - $\tilde{V} = \tilde{V}_1 \cup \tilde{V}_2 \cup \tilde{V}_3$, wobei V_i aus allen Cliquen der Größe k_i in G besteht (kann man mit dem naiven Algorithmus in $\mathcal{O}(n^{k_i})$ berechnen)
  - Knoten $U \in \tilde{V}_i$ und $U' \in \tilde{V}_j$ sind adjazent in $\tilde{G}$ g.d.w. $i \neq j$ und $U \cup U'$ eine Clique der Größe $k_i + k_j$ in G ist.
  - Berechne dazu die partiellen Adjazenzmatrizen A_{12}, A_{13} und A_{23}, die die Kanten zwischen den jeweiligen Knotenmengen darstellen
- Teste $\tilde{G}$ auf Dreiecke

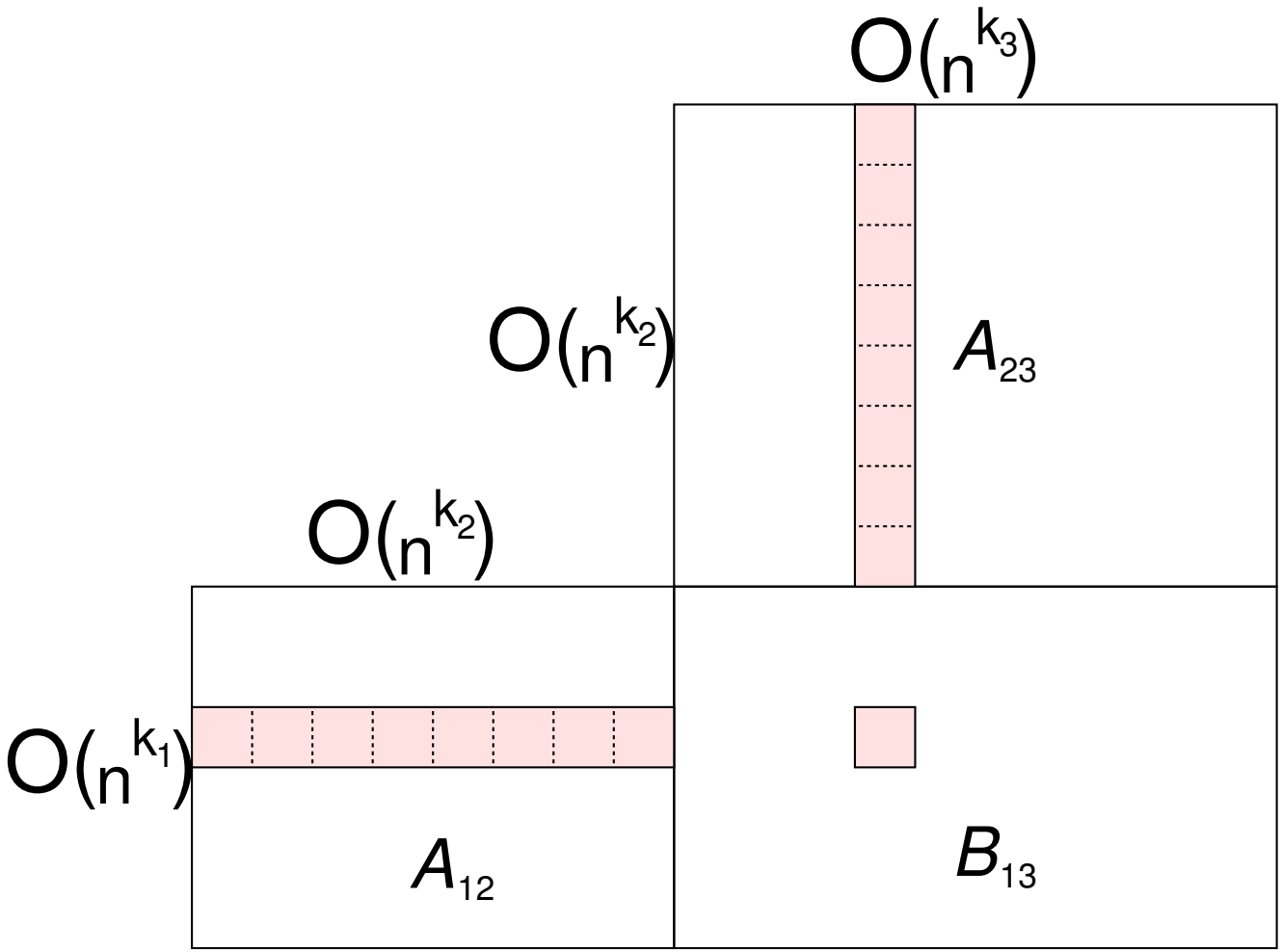
Cliquen fester Größe $k \geq 3$

Beweis.

- Dreieck $\{U_1, U_2, U_3\}$ impliziert eine Clique der Größe k in G
- geht mit schneller Matrixmultiplikation, aber hier muss eine $\mathcal{O}(n^{k_1}) \times \mathcal{O}(n^{k_2})$-Matrix (Kanten zwischen $\tilde{V}_1$ und $\tilde{V}_2$) mit einer $\mathcal{O}(n^{k_2}) \times \mathcal{O}(n^{k_3})$-Matrix (Kanten zwischen $\tilde{V}_2$ und $\tilde{V}_3$) multipliziert werden, und zwar in Zeit $\mathcal{O}\left(n^{\beta(k)}\right)$
- Berechnung der drei Matrizen A_{12}, A_{23} und A_{13} in $\mathcal{O}\left(n^{\max\{k_1+k_2, k_1+k_3, k_2+k_3\}}\right) = \mathcal{O}\left(n^{\lceil \frac{2k}{3} \rceil}\right)$

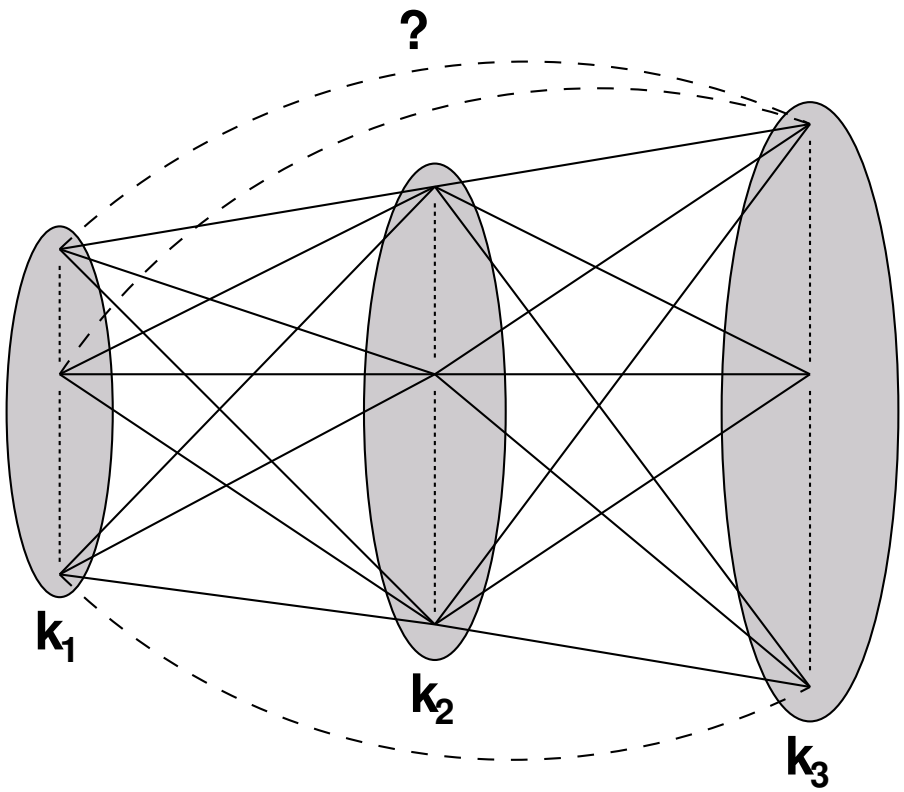
  (wird dominiert durch die Zeit $\mathcal{O}(n^{\beta(k)})$ für die Multiplikation der rechteckigen Matrizen, also $B_{13} = A_{12} \cdot A_{23}$)

Cliquen fester Größe $k \geq 3$



B_{13} wird dann mit A_{13} verknüpft

Cliquen fester Größe $k \geq 3$



Cliquen fester Größe: Beispielkomplexitäten

Cliquengröße	Vollständige Suche	Matrixmultiplikation
3	$\mathcal{O}(n^3)$	$\mathcal{O}(n^{2.376})$
4	$\mathcal{O}(n^4)$	$\mathcal{O}(n^{3.376})$
5	$\mathcal{O}(n^5)$	$\mathcal{O}(n^{4.220})$
6	$\mathcal{O}(n^6)$	$\mathcal{O}(n^{4.751})$
7	$\mathcal{O}(n^7)$	$\mathcal{O}(n^{5.751})$
8	$\mathcal{O}(n^8)$	$\mathcal{O}(n^{6.595})$

Cliquen fester Größe: Mitgliedszahlen

Satz

Für jedes $k \geq 3$ existiert ein Algorithmus, der in Zeit $\mathcal{O}\left(n^{\beta(k)}\right)$ läuft und der für jeden Knoten zählt, an wieviel Cliquen der Größe k er beteiligt ist (in einem Graphen mit n Knoten), wobei
$\beta(k) = \alpha(\lfloor k/3 \rfloor, \lceil (k-1)/3 \rceil, \lceil k/3 \rceil)$.

Cliquen fester Größe: Mitgliedszahlen

Beweis.

- Für $k = 3$ (Dreiecke) kann man nicht nur feststellen, *ob* zwei Knoten v_i und v_j zu einem Dreieck gehören, sondern auch zu wievielen.
- Wenn Kante $\{v_i, v_j\}$ in G existiert, dann ist diese Anzahl gleich dem Eintrag b_{ij} in der quadrierten Adjazenzmatrix $B(G) = A(G) \cdot A(G)$.
- Anwendung im allgemeinen Fall von $\tilde{G}$:
  für jeden Knoten $v \in V$ sei $C_k(v)$ die Anzahl verschiedener Cliquen der Größe k, in denen v enthalten ist.
- Entsprechend sei $\tilde{C}_3(U)$ die Anzahl der Dreiecke in $\tilde{G}$, zu denen Knoten U gehört.
  (U ist eine Clique der Größe kleiner als k)

Cliquen fester Größe: Mitgliedszahlen

Beweis.

- Cliquen der Größe k können viele verschiedene Repräsentationen in $\tilde{G}$ haben.
- Diese Anzahl ist die Anzahl der Partitionierungen von einer Menge der Kardinalität k in drei Mengen der Kardinalitäten k_1, k_2 und k_3, also der Multinomialkoeffizient $\binom{k}{k_1,k_2,k_3}$.
- o.B.d.A. sei k_1 der kleinste der drei Parameter.
  Sei $\mathcal{U}(v)$ die Menge aller Cliquen U der Größe k_1 in G, so dass $v \in U$. Dann gilt:

$$\sum_{U \in \mathcal{U}(v)} \tilde{C}_3(U) = \binom{(k-1)}{(k_1-1), k_2, k_3} \cdot C_k(v)$$

- Berechne linke Seite in $\mathcal{O}\left(n^{\beta(k)}\right)$ (berechne Matrizen; suche Einträge für alle U, die v enthalten); Berechne $C_k(v)$)

Aufzählen von Cliquen

Wie kann man Cliquen aufzählen?

- Ausgabe ist oft exponentiell in der Eingabelänge

$\Rightarrow$ etwas anderer Effizienzbegriff

polynomielle Gesamtzeit:
bei Ausgabe von C Konfigurationen Begrenzung der Zeit durch ein Polynom in C und in der Eingabegröße n
(output-sensitiv)

- vollständige Suche ist *nicht* in polynomieller Gesamtzeit
- Aufzählung aller maximalen Cliquen geht in polynomieller Gesamtzeit (ein klassischer Algorithmus läuft z.B. erst $\mathcal{O}(n^2 C)$ Schritte ohne Ausgabe und gibt dann alle maximalen Cliquen auf einmal aus)
- Aufzählung aller Maximum-Cliquen geht nur in polynomieller Gesamtzeit, falls $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$

'Effiziente' Aufzählungsalgorithmen

Andere Möglichkeit:

- polynomielle Verzögerung (polynomial delay):
  Zeit bis zur Ausgabe der ersten Konfiguration, zwischen zwei aufeinanderfolgnden Ausgaben von Konfigurationen und von der Ausgabe der letzten Konfiguration bis zum Stop ist polynomiell in der Eingabegröße

Aufzählung maximaler Cliquen

Satz

Es gibt einen Algorithmus, der alle maximalen Cliquen mit (polynomieller) Verzögerung $\mathcal{O}\left(n^3\right)$ und (linearem) Platzverbrauch $\mathcal{O}(m+n)$ aufzählt.

Algorithmus zur Aufzählung maximaler Cliquen

- Konstruiere Binärbaum mit n Leveln, dessen Blätter sich nur auf Level n befinden
- Jedes Level ist einem Knoten von G zugeordnet, auf Level i betrachtet man Knoten v_i.
- Knoten von Level i des Baums entsprechen den maximalen Cliquen des induzierten Teilgraphen $G[\{v_1, \ldots, v_i\}]$.

$\Rightarrow$ Die Blätter sind genau die maximalen Cliquen von G.

- Für ein gegebenes Level i und eine maximale Clique U in $G[\{v_1, \ldots, v_i\}]$ wollen wir die Kinder auf dem nächsten Level $i+1$ bestimmen:
  1. Alle Knoten von U sind adjazent zu v_{i+1} in G.
  2. Es existiert ein Knoten in U, der nicht zu v_{i+1} adjazent ist in G

Algorithmus zur Aufzählung maximaler Cliquen

Fallunterscheidung:

1. Alle Knoten von U sind adjazent zu v_{i+1} in G.
   $\Rightarrow$ $U \cup \{v_{i+1}\}$ ist maximale Clique in $G[\{v_1, \ldots, v_{i+1}\}]$
   - Das ist die einzige Möglichkeit, eine maximale Clique in $G[\{v_1, \ldots, v_{i+1}\}]$ zu bekommen, die U enthält
     In diesem Fall hat U nur ein einziges Kind im Baum.
2. Es existiert ein Knoten in U, der nicht zu v_{i+1} adjazent ist in G
   Man kann 2 maximale Cliquen in $G[\{v_1, \ldots, v_{i+1}\}]$ erhalten:
   1. U ist selbst eine maximale Clique
   2. $\left(U \setminus \bar{N}(v_{i+1})\right) \cup \{v_{i+1}\}$ ist eine Clique,
      wobei $\bar{N}(v_{i+1})$ alle nicht mit v_{i+1} adjazenten Knoten sind
      - ★ Wenn die Menge eine *maximale* Clique ist, hätte U zwei Kinder im Baum
      - ★ $\left(U \setminus \bar{N}(v_{i+1})\right) \cup \{v_{i+1}\}$ könnte aber Kind von mehreren sein

      $\Rightarrow$ Kind der lexikographisch kleinsten Menge U (falls maximal)

$\Rightarrow$ Binärbaum
(interne Knoten haben 1 oder 2 Kinder, Blätter nur in Level n)

Algorithmus zur Aufzählung maximaler Cliquen

- Traversiere den Binärbaum per Tiefensuche (DFS)
- Ausgabe aller Blätter
- Gegeben Knoten U auf Level i:
  - `Parent`(U,i):
    Vaterknoten von U ist die lexikographisch kleinste maximale Clique in $G[\{v_1,\ldots,v_{i-1}\}]$, die $U \setminus \{v_i\}$ enthält
    $\Rightarrow$ Grundfunktion, in $\mathcal{O}(m+n)$
  - `LeftChild`(U,i):
    - ★ falls $U \subseteq N(v_{i+1})$ (1. Fall), dann $U \cup \{v_{i+1}\}$
    - ★ falls $U \not\subseteq N(v_{i+1})$ (Teil des 2. Falls), dann U
    - ★ Unterscheidung der Fälle kostet $\mathcal{O}(m+n)$ Zeit
  - `RightChild`(U,i):
    - ★ falls $U \subseteq N(v_{i+1})$, dann existiert kein rechtes Kind
    - ★ falls $U \not\subseteq N(v_{i+1})$, dann
      $\left(U \setminus \bar{N}(v_{i+1})\right) \cup \{v_{i+1}\}$ falls es maximale Clique ist und
      $U = \texttt{Parent}\left(\left(U \setminus \bar{N}(v_{i+1})\right) \cup \{v_{i+1}\}, i+1\right)$
      sonst keins
    - ★ Kosten: $\mathcal{O}(m+n)$ Zeit

Algorithmus zur Aufzählung maximaler Cliquen

- Längster Pfad zwischen zwei Blättern im Baum ist $2n-2$ und geht durch $2n-1$ Knoten
- pro Knoten Zeitaufwand $\mathcal{O}(m+n)$
- Jeder Unterbaum hat ein Blatt auf Level n

$\Rightarrow$ Ausgabeverzögerung $\mathcal{O}(n^3)$

- Wenn ein Knoten bearbeitet wird, muss nur die Menge U, das Level i, sowie ein Label zur Unterscheidung von linkem/rechten Kind gespeichert werden

$\Rightarrow$ Speicheraufwand $\mathcal{O}(m+n)$

Aufzählung in lexikographischer Reihenfolge

- Es ist $\mathcal{NP}$-vollständig für einen Graphen G und eine maximale Clique U von G zu entscheiden, ob es eine maximale Clique U' gibt, die lexikographisch größer ist als U.
- Falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, dann gibt es keinen Algorithmus, der in Polynomialzeit zu einem Graphen G und einer maximalen Clique U von G die lexikographisch nächstgrößere maximale Clique generiert.
- Überraschenderweise kann man trotzdem alle maximalen Cliquen in lexikographischer Ordnung mit polynomieller Verzögerung aufzählen.

Aufzählung in lexikographischer Reihenfolge

- Idee: während der Generierung der aktuellen Ausgabe wird zusätzliche Arbeit in die Erzeugung lexikographisch größerer Cliquen investiert

$\Rightarrow$ Diese werden in einer Priority Queue gespeichert, die dann u.U. exponentiell viele Cliquen enthält und damit auch exponentiell viel Speicherplatz braucht.

Aufzählung in lexikographischer Reihenfolge

Algorithmus 7 : Alg. von Johnson, Papadimitriou und Yannakakis

$U_0 :=$ erste (lexikographisch kleinste) maximale Clique;
Füge U_0 in Priority Queue Q ein;
while Q *ist nicht leer* **do**
    $U :=$ExtractMin(Q);
    Ausgabe U;
    foreach *Knoten* v_j *von* G, *der zu einem Knoten* $v_i \in U$ *mit* $i < j$ *nicht adjazent ist* **do**
        $U_j := U \cap \{v_1, \ldots, v_j\}$;
        if $(U_j - \overline{N}(v_j)) \cup \{v_j\}$ *ist eine maximale Clique in* $G[\{v_1, \ldots, v_j\}]$ **then**
            Sei T die lexikographisch kleinste maximale Clique, die $(U_j - \overline{N}(v_j)) \cup \{v_j\}$ enthält;
            Füge T in Q ein

Aufzählung in lexikographischer Reihenfolge

Satz

Der Algorithmus von Johnson, Papadimitriou und Yannakakis zählt alle maximalen Cliquen eines Graphen mit n Knoten in lexikographischer Reihenfolge und mit Delay $\mathcal{O}(n^3)$ auf.

Aufzählung in lexikographischer Reihenfolge

Beweis.

Korrektheit:

- Menge T ist beim Einfügen in Q (bei Betrachtung von U) lexikographisch größer als U
  (denn es wird ja aus U zumindest Knoten v_i entnommen während lediglich v_j hinzukommt und es gilt $i < j$)

$\Rightarrow$ Es werden nur Mengen in der Queue gespeichert, die erst nach U ausgegeben werden dürfen.

$\Rightarrow$ Die ausgegebenen maximalen Cliquen sind lexikographisch aufsteigend.

Aufzählung in lexikographischer Reihenfolge

Beweis.

Vollständigkeit:

- Falls U die lexikographisch kleinste noch auszugebende Clique ist, dann ist U in Q.
- Induktionsanfang: Für $U = U_0$ ist das korrekt.
- Induktionsschritt: Sei U lexikographisch größer als U_0.
  - Sei j der größte Index, dass $U_j = U \cap \{v_1, \ldots, v_j\}$ *keine* maximale Clique in $G[\{v_1, \ldots, v_j\}]$.
    (Muss existieren, weil sonst $U = U_0$. Außerdem muss $j < n$ sein, weil U eine maximale Clique des Gesamtgraphen G ist.)
  - Aufgrund der Maximalität von j muss gelten $v_{j+1} \in U$.
  - $\exists$ Menge S: $U_j \cup S$ ist maximale Clique in $G[\{v_1, \ldots, v_j\}]$

Aufzählung in lexikographischer Reihenfolge

Beweis.

- Induktionsschritt (Fortsetzung):
  - Aufgrund der Maximalität von j ist v_{j+1} nicht adjazent zu allen Knoten in S.

  $\Rightarrow$ $\exists$ maximale Clique U', die zwar $U_j \cup S$, aber nicht v_{j+1} enthält
  - $U' \leq U$, weil sie sich in S unterscheiden
  - U' wurde schon ausgegeben (Ind.voraussetzung)
  - Als U' ausgegeben wurde, wurde festgestellt, dass v_{j+1} nicht adjazent ist zu einem Knoten $v_i \in U'$ mit $i < j+1$
  - $(U'_{j+1} \setminus \bar{N}(v_{j+1})) \cup \{v_{j+1}\} = U_{j+1}$
    und U_{j+1} ist maximale Clique in $G[\{v_1, \ldots, v_{j+1}\}]$

  $\Rightarrow$ Die lexikographisch kleinste maximale Clique, die U_{j+1} enthält, wurde in Q eingefügt.

Aufzählung in lexikographischer Reihenfolge

Beweis.

- Induktionsschritt (Fortsetzung):
  - Aufgrund der Maximalität von j stimmen U und T in den ersten $j+1$ Knoten überein.
  - Annahme: $U \neq T$
    Sei k der kleinste Index eines Knoten v_k, der in genau einer der beiden Mengen ist.
  - $k > j+1$
  - Da $T \leq U$, gilt $v_k \in T$ und $v_k \notin U$.

  $\Rightarrow$ U_k ist nicht maximale Clique in $G[\{v_1, \ldots, v_k\}]$
  (Widerspruch zur Maximalität von j)

  $\Rightarrow$ $U = T$

  $\Rightarrow$ U ist in der Priority Queue Q

Aufzählung in lexikographischer Reihenfolge

Komplexität:

- Extraktion der lexikographisch kleinsten maximalen Clique aus Q: $\mathcal{O}(n \log C)$
- n Berechnungen von maximalen Cliquen, die eine gegebene Menge enthalten: $\mathcal{O}(m+n)$ pro Menge
- Einfügen einer maximalen Clique in Q: $\mathcal{O}(n \log C)$ pro Clique
- Da $C \leq 3^{\lceil \frac{n}{3} \rceil}$, folgt dass die Verzögerung $\mathcal{O}(n^3)$ ist.

Plex

Relaxiere Cliquenbegriff, so dass konstant viele Verbindungen zu Gruppenmitgliedern bei jedem Knoten fehlen dürfen.

Definition

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph und sei $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ eine natürliche Zahl.
Dann wird ein Subset $U \subseteq V$ als k-Plex bezeichnet, falls $\delta(G[U]) \geq |U| - k$.

k-Plex-Eigenschaften

- Jede Clique ist ein 1-Plex.
- Jedes k-Plex ist auch ein $(k+1)$-Plex.
- Ein *maximales k-Plex* ist in keinem größeren k-Plex echt enthalten.
- Ein *Maximum k-Plex* hat maximale Kardinalität unter allen k-Plexen in G.
- Jeder induzierte Teilgraph eines k-Plex ist auch ein k-Plex, d.h. die k-Plex-Eigenschaft ist abgeschlossen unter Exklusion.

k-Plex-Durchmesser

Satz

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph auf n Knoten und sei V ein k-Plex mit $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.
Dann gilt:

1. *Wenn $k < \frac{n+2}{2}$ ist, dann gilt $diam(G) \leq 2$.*

   Falls zusätzlich $n \geq 4$, dann ist G zweifach kantenzusammenhängend.

2. *Wenn $k \geq \frac{n+2}{2}$ und G zusammenhängend ist, dann gilt $diam(G) \leq 2k - n + 2$.*

k-Plex-Durchmesser

Beweis.

Fall $k < \frac{n+2}{2}$:

- für adjazente Knoten u und v gilt $d(u, v) = 1$
- Seien $u, v \in V$ also nicht adjazente Knoten $(u \neq v)$
- Annahme: $d(u, v) \geq 3 \quad \Rightarrow \quad N(u) \cap N(v) = \emptyset$, d.h.

$$n - 2 \geq |N(u) \cup N(v)| \geq 2\delta(G) \geq 2(n - k) > \ldots$$

$$\ldots > 2\left(n - \frac{n+2}{2}\right) = n - 2$$

(Widerspruch)

$\Rightarrow$ $d(u, v) \leq 2 \quad \Rightarrow \quad \text{diam}(G) \leq 2$

k-Plex-Durchmesser

Beweis.

Fall $k < \frac{n+2}{2}$, $n \geq 4$:

- Annahme: $\exists$ Brücke e, d.h. $G - \{e\}$ enthält zwei Zusammenhangskomponenten V_1 und V_2
- Jeder kürzeste Pfad von einem Knoten in V_1 zu einem Knoten in V_2 muss diese Brücke benutzen.

$\Rightarrow$ Da $\text{diam}(G) \leq 2$, muss eine Komponente ein einzelner Knoten sein. Dieser Knoten v hat Grad $\deg(v) = 1$.

- Da V ein k-Plex mit $n \geq 4$ Knoten ist, gilt für den Grad dieses Knotens v aber auch: $\deg(v) \geq n - k > n - \frac{n+2}{2} = \frac{n-2}{2} \geq 1$ (Widerspruch)

$\Rightarrow$ Es existiert keine Brücke in G bzw. G ist 2-fach kantenzusammenhängend.

k-Plex-Durchmesser

Beweis.

Fall $k \geq \frac{n+2}{2}$:

- Sei $\{v_0, v_1, \ldots, v_r\}$ ein längster kürzester Pfad, also ein Pfad mit $d(v_0, v_r) = r = \text{diam}(G)$.
- Annahme: $r \geq 4$ (sonst ist $r < 4 = 2\frac{n+2}{2} - n + 2 \leq 2k - n + 2$)
- Da es keinen kürzeren Pfad zwischen v_0 und v_r gibt, ist v_i zu keinem der Knoten $v_0, \ldots, v_{i-2}, v_{i+2}, \ldots, v_r$ auf dem Pfad adjazent, außer zu seinen Pfad-Nachbarknoten v_{i-1} und v_{i+1}
- Außerdem kann kein Knoten existieren, der gleichzeitig zu v_0 und zu v_3 adjazent ist.

$\Rightarrow \{v_0\} \uplus \{v_2, v_3, \ldots, v_r\} \uplus (N(v_3) \setminus \{v_2, v_4\}) \subseteq \overline{N}(v_0)$

$\Rightarrow 1 + (r-1) + d_G(v_3) - 2 \leq k \quad \Rightarrow \quad r + (n-k) - 2 \leq k$

$\Rightarrow \text{diam}(G) = r \leq 2k - n + 2$

k-Plex Problem

- (variables) Entscheidungsproblem **Plex** mit Eingabe
  - Graph G,
  - Größenparameter ℓ und
  - Plex-Parameter k

  ist $\mathcal{NP}$-vollständig, da das **Clique**-Problem sich darauf reduzieren lässt (mit $k = 1$)

$\Rightarrow$ Betrachte das Problem für feste Plex-Parameter c

Problem

Problem: c-**Plex**
Eingabe: *Graph* G, *Parameter* $\ell \in \mathbb{N}$
Frage: *Existiert ein* c*-Plex der Kardinalität* $\geq \ell$ *in* G*?*

c-Plex

Genau wie 1-**Plex**=**Clique** sind auch alle anderen Probleme für einen festen Plex-Parameter c $\mathcal{NP}$-vollständig:

Satz

*c-**Plex** ist $\mathcal{NP}$-vollständig für alle $c \in \mathbb{N}$.*

Beweis: durch Reduktion von **Clique**, siehe z.B. Brandes/Erlebach (Eds.): Network Analysis (S. 128).

Cores

Relaxiere Cliquenbegriff, so dass konstant viele Verbindungen zu Gruppenmitgliedern bei jedem Knoten mindestens vorhanden sein müssen.

Definition

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph und sei $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ eine natürliche Zahl.
Dann wird ein Subset $U \subseteq V$ als k-Core (k-Kern) bezeichnet, falls $\delta(G[U]) \geq k$.
Ein *maximaler k-Core* ist in keinem größeren k-Core echt enthalten.
Ein *Maximum k-Core* hat maximale Kardinalität unter allen k-Cores in G.

k-Core-Eigenschaften

- Jeder Graph G ist ein $\delta(G)$-Core, jede Clique ist ein $(n-1)$-Core.
- Jeder $(k+1)$-Core ist auch ein k-Core.
- Jeder k-Core ist ein $(n-k)$-Plex.
- Wenn U und U' k-Cores sind, dann ist auch $(U \cup U')$ ein k-Core.

$\Rightarrow$ Maximale k-Cores sind einzigartig.

- Nicht jeder induzierte Teilgraph eines k-Cores ist auch wieder ein k-Core, d.h. die k-Core-Eigenschaft ist *nicht* abgeschlossen unter Exklusion.
  Bsp.: Jeder Kreis ist ein 2-Core, aber jeder echte Teilgraph enthält mindestens einen Knoten vom Grad < 2.
- k-Cores sind auch nicht geschachtelt. (Nicht jeder k-Core der Größe n enthält einen k-Core der Größe $n-1$.)
- k-Cores müssen nicht unbedingt zusammenhängend sein.

Maximale zusammenhängende k-Cores

Fakt

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph und $k > 0$ eine natürliche Zahl. Wenn U und U' zwei maximale zusammenhängende k-Cores in G mit $U \neq U'$ sind, dann gibt es keine Kante zwischen U und U'.

Folgerung

- *Der einzige Maximum k-Core eines Graphen ist die Vereinigung seiner maximalen zusammenhängenden k-Cores.*
- *Der Maximum 2-Core eines zusammenhängenden Graphen ist zusammenhängend.*
  (Wenn er es nicht wäre, könnte man die Teile verbinden und alle neuen Knoten hätten mindestens Grad 2.)
- *Ein Graph ist genau dann ein Wald, wenn er keine 2-Cores enthält.*

Der Maximum k-Core

Satz

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph und $k > 0$ eine natürliche Zahl. Wenn man wiederholt alle Knoten mit Grad $< k$ (und alle inzidenten Kanten) entfernt, dann entspricht die verbleibende Knotenmenge U genau dem Maximum k-Core.

Beweis.

- U ist ein k-Core, d.h. wir müssen nur noch Maximum zeigen.
- Annahme: U ist nicht Maximum k-Core.

$\Rightarrow$ $\exists$ nichtleere Menge $T \subseteq V$, so dass $U \cup T$ Maximum k-Core

- Als der erste Knoten von T aus G entfernt wurde, muss er Grad $< k$ gehabt haben. Das kann aber nicht sein, da er mindestens k Nachbarn in $U \cup T$ hat und alle anderen Knoten noch im Graph enthalten waren. (Widerspruch)

□

Core-Zerlegung

Definition

Die Core-Zahl $\xi_G(v)$ eines Knotens $v \in V$ ist die höchste Zahl k, so dass v Teil eines k-Cores im Graphen G ist, d.h.

$$\xi_G(v) = \max\{k : \exists k\text{-Core } U \text{ in } G \text{ mit } v \in U\}$$

Algorithmus zur Berechnung arbeitet nach folgendem Prinzip:

- Jeder Graph G ist ein $\delta(G)$-Core.
- Jeder Nachbarknoten mit geringerem Grad verringert die potentielle Core-Zahl eines Knotens.

Berechnung der Core-Zahlen

Algorithmus 8 : Berechnung der Core-Zahlen

Input : Graph $G = (V, E)$

Output : Array ξ_G mit den Core-Zahlen aller Knoten in G

Berechne die Grade aller Knoten und speichere sie in D;
Sortiere V in aufsteigender Grad-Folge D;
foreach $v \in V$ in sortierter Reihenfolge **do**
    $\xi_G(v) := D[v]$;
    foreach *Knoten u adjazent zu v* **do**
        if $D[u] > D[v]$ **then**
            $D[u] := D[u] - 1$;
            Sortiere V in aufsteigender Grad-Reihenfolge nach D

Berechnung der Core-Zahlen

Komplexität:

- naiv: $\mathcal{O}(mn \log n)$
  (teuerste Operationen: Sortieren der Knoten nach dem Grad)
- besser: $\mathcal{O}(m + n)$
  - Knotengrade haben Werte aus dem Intervall $[0, n-1]$
    $\Rightarrow$ Sortieren mit n Buckets in $\mathcal{O}(n)$
  - Nachsortieren kann man sich sparen, indem man sich merkt, an welchen Indizes im Array die Knoten des nächsten Grads beginnen Beim dekrementieren des Werts eines Knotens kommt der Knoten einfach an den Anfang des alten Intervalls und dann wird die Grenze um eine Stelle verschoben, so dass er nun zum Intervall des kleineren Grads gehört (das geht in $\mathcal{O}(1)$).
  - insgesamt: $\mathcal{O}(n)$ für Initialisierung / Sortieren,
    dann $\mathcal{O}(m)$ für die Schleifendurchläufe (jede Kante wird höchstens zweimal betrachtet), also $\mathcal{O}(m + n)$

Dichte Subgraphen

Definition

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $n > 1$ Knoten und m Kanten. Dichte $\rho(G)$ des Graphen G:

$$\rho(G) = \frac{m}{\binom{n}{2}}$$

Ein durch eine Knotenteilmenge $U \subseteq V$ eines Graphen $G = (V, E)$ induzierter Teilgraph heißt η-dicht (für eine reelle Zahl η mit $0 \leq \eta \leq 1$), falls gilt:

$$\rho(G[U]) \geq \eta$$

Aber: selbst (Teil-)Graphen mit hoher Dichte können isolierte Knoten enthalten!

Eigenschaften

- Cliquen sind 1-dichte (Teil-)Graphen.
- Ein k-Plex hat Dichte $1 - \frac{k-1}{n-1}$

$\Rightarrow$ Für $n \to \infty$ gilt für k-Plexe $\eta \to 1$ bzw.
$\forall k > 0, 0 \leq \eta \leq 1$: ein k-Plex der Größe mindestens $\frac{k-\eta}{1-\eta}$ ist ein η-dichter (Teil-)Graph.

- Aber: nicht jeder $1 - \frac{k-1}{n-1}$-dichte (Teil-)Graph ist auch ein k-Plex.
- Ein k-Core ist ein $\frac{k}{n-1}$-dichter (Teil-)Graph.
Die Dichte von k-Cores kann sich für $n \to \infty$ beliebig nah an 0 annähern.
- η-dichte Graphen sind nicht abgeschlossen unter Exklusion (Knotenausschluss), sie sind aber geschachtelt.

Schachtelung von η-dichten Graphen

Satz

Sei η eine reelle Zahl mit $0 \leq \eta \leq 1$, dann gilt:

Ein η-dichter Teilgraph der Größe $\ell > 2$ eines Graphen G enthält einen η-dichten Teilgraph der Größe $\ell - 1$ in G.

Schachtelung von η-dichten Graphen

Beweis.

- Sei
  - U ein η-dichter Teilgraph von G mit $|U| = \ell$,
  - m_U die Anzahl der Kanten in $G[U]$,
  - v ein Knoten mit minimalem Grad in $G[U]$ (also $\deg_{G[U]}(v) = \delta(G[U])$)
- $\delta(G[U]) \leq \overline{d}(G[U]) = \frac{2m_U}{\ell} = \rho(G[U])(\ell - 1)$
- Betrachte Knotenteilmenge $U' = U \setminus \{v\}$ mit Kantenanzahl $m_U - \delta(G[U]) \geq \rho(G[U])\binom{\ell}{2} - \rho(G[U])(\ell - 1) = \rho(G[U])\binom{\ell-1}{2}$

$\Rightarrow$ $\rho(G[U']) \geq \rho(G[U]) \geq \eta$

$\Rightarrow$ U' ist ein η-dichter Teilgraph der Größe $\ell - 1$.

Dichte und Wege

- Definition der Dichte entspricht der durchschnittlichen Existenz von möglichen Kanten innerhalb eines (induzierten) Teilgraphen
- Jede ungerichtete Kante entspricht zwei gerichteten Wegen der Länge 1.
- Verallgemeinerung: Dichte auf der Basis (gerichteter) Wege (Walks) beliebiger Länge (mit möglichen Knoten-/Kantenwiederholungen)
- Grad der Ordnung $\ell \in \mathbb{N}$ eines Knotens v,
  Anzahl der Wege der Länge ℓ in G, die in v starten: $w_\ell(v)$
- $w_0(v) = 1, \quad w_1(v) = \deg(v)$
- Anzahl Wege der Länge ℓ in einem Graphen G: w_ℓ
- $w_0 = n, \quad w_1 = 2m$

Anzahl Wege der Länge ℓ

Satz

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.

Für alle $\ell \in \mathbb{N}$ und für alle $r \in \{0, \ldots, \ell\}$ gilt:

$$w_\ell(G) = \sum_{v \in V} w_r(v) \cdot w_{\ell - r}(v)$$

Anzahl Wege der Länge ℓ

Beweis.

- Jeder Weg der Länge ℓ besteht aus (nicht unbedingt verschiedenen) Knoten $v_0, \ldots, v_\ell$.
- Betrachte nun von jedem solchen Weg den Knoten v_r (für ein festgelegtes $r \in \{0, \ldots, \ell\}$).
- Es gibt $w_r(v_r)$ verschiedene Wege der Länge r, die in v_r enden, und es gibt $w_{\ell-r}(v_r)$ verschiedene Wege der Länge $\ell - r$, die in v_r beginnen.

$\Rightarrow$ Es gibt also $w_r(v_r) \cdot w_{\ell-r}(v_r)$ verschiedene Wege der Länge ℓ, die an der Stelle r den Knoten v_r besuchen.

$\Rightarrow$ Die Summe ergibt genau die Anzahl aller Wege der Länge ℓ, da die entsprechenden Wege der einzelnen Summanden sich im Knoten an der Stelle r unterscheiden und somit nichts doppelt gezählt wird.

Dichte der Ordnung ℓ

- Maximal mögliche Anzahl von Wegen der Länge ℓ in einem Graphen mit n Knoten (also im vollständigen Graphen K_n):

$$n \cdot (n-1)^{\ell}$$

- Dichte der Ordnung ℓ: (für Graphen mit $n \geq 2$)

$$\rho_{\ell}(G) = \frac{w_{\ell}(G)}{n \cdot (n-1)^{\ell}}$$

$\Rightarrow$ $\rho_1(G) = \rho(G)$, denn in $w_1(G)$ zählt jede Kante doppelt:

$$\rho_1 = \frac{w_1}{n(n-1)^1} = \frac{2m}{n(n-1)} = \frac{m}{\binom{n}{2}} = \rho$$

Monotonität der Dichte

Satz

Für alle Graphen G und alle natürlichen Zahlen $\ell \geq 2$ gilt:

$$\rho_\ell(G) \leq \rho_{\ell-1}(G)$$

Beweis.

Da gilt $w_\ell = \sum_{v \in V} w_r(v) \cdot w_{\ell-r}(v)$, gilt insbesondere für $r = 1$:

$$\begin{aligned} w_\ell &= \sum_{v \in V} w_1(v) \cdot w_{\ell-1}(v) = \sum_{v \in V} \deg(v) \cdot w_{\ell-1}(v) \\ &\leq (n-1) \cdot \sum_{v \in V} w_{\ell-1}(v) = (n-1) \cdot w_{\ell-1} \end{aligned}$$

$$\rho_\ell = \frac{w_\ell}{n(n-1)^\ell} \leq \frac{(n-1) \cdot w_{\ell-1}}{n(n-1)^\ell} = \frac{w_{\ell-1}}{n(n-1)^{\ell-1}} = \rho_{\ell-1}$$

η-dichte Teilgraphen der Ordnung ℓ

Definition

In einem Graphen $G = (V, E)$ bezeichnet man den durch eine Knotenteilmenge $U \subseteq V$ induzierten Teilgraphen genau dann als η-dichten Teilgraphen der Ordnung ℓ, wenn gilt

$$\rho_\ell(G[U]) \geq \eta$$

- Jeder η-dichte Teilgraph der Ordnung ℓ ist auch ein η-dichter Teilgraph der Ordnung $\ell - 1$ (siehe Monotonitätssatz).
- Die η-dichten Teilgraphen der Ordnung $\ell \geq 2$ sind (wie die η-dichten Teilgraphen) nicht abgeschlossen unter Exklusion, aber geschachtelt.
- Für eine festlegte Dichte η werden die η-dichten Graphen wachsender Ordnung einer Clique immer ähnlicher.

Dichte unendlicher Ordnung

Definition

Die *Dichte unendlicher Ordnung* ist

$$\rho_\infty(G) = \lim_{\ell \to \infty} \rho_\ell(G)$$

Satz

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph

1. *$\rho_\infty(G)$ ist entweder Null oder Eins.*
2. *G ist genau dann eine Clique, wenn $\rho_\infty = 1$.*

- Die einzigen Graphen, die für ein $\eta > 0$ und für jede Ordnung ℓ η-dicht der Ordnung ℓ sind, sind die Cliquen.
- Die Ordnung erlaubt eine gewisse Skalierung, wie wichtig Kompaktheit im Vergleich zu Dichte ist.

Durchschnittsgrad

- Dichte und Durchschnittsgrad hängen direkt zusammen:

$$\bar{d}(G) = \rho(G) \cdot (n-1)$$

- Ein k-dichter (Teil-)Graph (bzgl. Durchschnittsgrad) kann definiert werden als (Teil-)Graph G mit $\bar{d}(G) \geq k$.
- η-dichte Graphen bzgl. prozentualer Dichte der Größe ℓ sind $\eta(\ell-1)$-dichte Graphen bzgl. Durchschnittsgrad.
- k-dichte Graphen bzgl. Durchschnittsgrad der Größe ℓ sind $\frac{k}{\ell-1}$-dichte Graphen bzgl. prozentualer Dichte.
- Jeder k-Core ist ein k-dichter (Teil-)Graph.
- k-dichte Teilgraphen sind nicht abgeschlossen unter Exklusion und auch nicht geschachtelt.
  (Löscht man aus einem k-regulären Graph einen Knoten, fällt der Durchschnittsgrad unter k.)

Verallgemeinerung des Satzes von Turán

Satz (Dirac, 1963)

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit n Knoten und m Kanten.

Wenn $m > \frac{n^2}{2} \cdot \frac{k-2}{k-1}$, dann enthält G einen Teilgraph der Größe $k + r$ mit Durchschnittsgrad $\bar{d} \geq k + r - 1 - \frac{r}{k+r}$ für alle $r \in \{0, \ldots, k-2\}$ und $n \geq k + r$.

(Der Fall $r = 0$ entspricht dem Satz von Turán.)

Der größtmögliche Durchschnittsgrad

$$\gamma^*(G) = \max_{U \subseteq V, U \neq \emptyset} \{\overline{\deg}(G[U])\}$$

Problem

Problem: **DensestSubgraph**
Eingabe: *Graph G*
Ausgabe: *Teilgraph mit maximalem Durchschnittsgrad*

Satz

Das Problem **DensestSubgraph** *kann für Graphen mit n Knoten und m Kanten in Zeit $\mathcal{O}\left(mn(\log n)\left(\log \frac{n^2}{m}\right)\right)$ gelöst werden.*

Der größtmögliche Durchschnittsgrad

Beweis:

- Formulierung von **DensestSubgraph** als MaximumFlow-Problem mit Parameter $\gamma \in \mathbb{Q}^+$
- Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit n Knoten und m Kanten.
- Betrachte (gerichtetes) Flussnetzwerk bestehend aus Graph $G' = (V', E')$ und Kapazitätsfunktion $u_\gamma : E' \to \mathbb{Q}^+$
- Füge zu V eine Quelle s und eine Senke t hinzu:

$$V' = V \cup \{s, t\}$$

$$\begin{aligned} E' \quad = \quad & \{(v, w), (w, v) : \{v, w\} \in E\} \cup \\ & \{(s, v) : v \in V\} \cup \\ & \{(v, t) : v \in V\}\} \end{aligned}$$

Der größtmögliche Durchschnittsgrad

Neue Kanten (in G'):

- für jede ungerichtete Kante in G zwei gerichtete Kanten der Kapazität 1,
- verbinde Quelle s mit allen Knoten in V durch Kante der Kapazität m,
- verbinde alle Knoten in V mit Senke t durch Kante der Kapazität $m + \gamma - \deg_G(v)$.

$$u_\gamma(v,w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{v,w\} \in E \\ m & \text{falls } v = s \\ m + \gamma - \deg_G(v) & \text{falls } w = t \\ 0 & \text{falls } (v,w) \notin E' \end{cases}$$

Der größtmögliche Durchschnittsgrad

- Betrachte Schnitt-Kapazitäten im Netzwerk
- Partitionierung der Knotenmenge V' in zwei disjunkte Mengen S und T mit $s \in S$ und $t \in T$.
- Sei $S_+ = S \setminus \{s\}$ und $T_+ = T \setminus \{t\}$, also $S_+ \cup T_+ = V$

Der größtmögliche Durchschnittsgrad

Falls $S_+ = \emptyset$, dann ist die Kapazität des Schnitts $c(S, \bar{S}) = m|V| = mn$, ansonsten erhält man

$$\begin{aligned}
c(S,T) &= \sum_{v \in S, w \in T} u_\gamma(v,w) \\
&= \sum_{w \in T_+} u_\gamma(s,w) + \sum_{v \in S_+} u_\gamma(v,t) + \sum_{v \in S_+, w \in T_+} u_\gamma(v,w) \\
&= m|T_+| + \left(m|S_+| + \gamma|S_+| - \sum_{v \in S_+} \deg_G(v) \right) + \sum_{\substack{v \in S_+, w \in T_+ \\ \{v,w\} \in E}} 1 \\
&= m|V| + |S_+| \left(\gamma - \frac{1}{|S_+|} \left(\sum_{v \in S_+} \deg_G(v) - \sum_{\substack{v \in S_+, w \in T_+ \\ \{v,w\} \in E}} 1 \right) \right) \\
&= m|V| + |S_+| \left(\gamma - \overline{\deg}(G[S_+]) \right)
\end{aligned}$$

Der größtmögliche Durchschnittsgrad

- γ ist der Test-Wert für den maximalen Durchschnittsgrad.
- Wie kann man nun feststellen, ob er zu klein oder zu groß ist?

Satz

Seien S und T so gewählt, dass sie einem Minimum-s,t-Schnitt für γ entsprechen. Dann gilt:

1. *Wenn $S_+ \neq \emptyset$, dann $\gamma \leq \gamma^*(G)$.*
2. *Wenn $S_+ = \emptyset$, dann $\gamma \geq \gamma^*(G)$.*

Der größtmögliche Durchschnittsgrad

Beweis.

1. $S_+ \neq \emptyset$:
   Da $c(\{s\}, V' \setminus \{s\}) = m|V| \geq c(S,T)$, gilt
   $|S_+| \left(\gamma - \overline{\deg}(G[S_+])\right) \leq 0$.
   Also $\gamma \leq \overline{\deg}(G[S_+]) \leq \gamma^*(G)$.

2. $S_+ = \emptyset$: Annahme: $\gamma < \gamma^*(G)$
   Sei $U \subseteq V$ eine nichtleere Menge mit $\overline{\deg}(G[U]) = \gamma^*(G)$.
   Mit der Gleichung für $c(S,T)$ erhält man

$$c(U \cup \{s\}, \overline{U} \cup \{t\}) = mn + |U|(\gamma - \gamma^*(G)) < mn = c(S,T)$$

   (Widerspruch zur Minimalität der Schnittkapazität $c(S,T)$)
   $\Rightarrow \gamma \geq \gamma^*(G)$

Der größtmögliche Durchschnittsgrad

- Algorithmus benutzt binäre Suche, um den richtigen Wert für γ zu finden
- $\gamma^*(G)$ kann nur endlich viele Werte annehmen:

$$\gamma^*(G) \in \left\{ \frac{2i}{j} \;:\; i \in \{0, \ldots, m\} \text{ und } j \in \{1, \ldots, n\} \right\}$$

- kleinste mögliche Distanz zwischen zwei Werten der Menge ist $\frac{2}{n(n-1)}$.

Der größtmögliche Durchschnittsgrad

Algorithmus 9 : DensestSubgraph mit MinCut und binärer Suche

Input : Graph $G = (V, E)$

Output : Eine Menge von k Knoten von G

Initialisiere $l := 0$, $r := m$ und $U := \emptyset$;

while $r - l \geq \frac{1}{n(n-1)}$ **do**

  $\gamma := \frac{l+r}{2}$;

  Konstruiere Fluss-Netzwerk (V', E', u_γ);

  Finde Minimum-Schnitt (S, T) des Fluss-Netzwerks;

  if $S = \{s\}$ **then**

    $r := \gamma$

  else

    $l := \gamma$;

    $U := S - \{s\}$

return U

Der größtmögliche Durchschnittsgrad

- Iteration wird $\lceil \log((m+1)n(n-1)) \rceil = \mathcal{O}(\log n)$-mal ausgeführt
- In jeder Iteration MinCut-Berechnung
  mit Push-Relabel-Algorithmus (Goldberg/Tarjan) in $\mathcal{O}(mn \log \frac{n^2}{m})$ für ein Netzwerk mit n Knoten und m Kanten
  (Wir haben zwar $n+2$ Knoten und $2m+2n$ Kanten, das ändert asymptotisch aber nichts.)

$\Rightarrow$ Gesamtkomplexität: $\mathcal{O}\left(mn(\log n)(\log \frac{n^2}{m})\right)$

- mit parametrischen MaxFlow-Algorithmen: $\mathcal{O}\left(mn \log \frac{n^2}{m}\right)$

Durchschnittlicher Grad in gerichteten Graphen

- Es ist nicht unbedingt offensichtlich, wie Dichte (i.S.d. Durchschnittsgrads) auf gerichtete Graphen zu übertragen ist.
- Durchschnittlicher Eingangs- und Ausgangsgrad sind gleich.

$\Rightarrow$ keine orientierungsabhängigen Maße

- Hubs & Authorities: Für gerichteten Graph $G = (V, E)$ und nichtleere (nicht unbedingt disjunkte) Knotenmengen $S, T \subseteq V$ sei $E(S, T)$ die Menge der Kanten, die von einem Knoten in S zu einem Knoten in T gehen:

$$E(S, T) = \{(u, v) : u \in S \text{ und } v \in T\}$$

Definiere durchschnittlichen gerichteten Grad des Paars (S, T) als (Kannan/Vinay)

$$\overline{\deg}_G(S, T) = \frac{|E(S, T)|}{\sqrt{|S| \cdot |T|}}$$

Durchschnittlicher gerichteter Grad

- S ist dann die Menge der Hubs,
  T ist die Menge der Authorities
- Für $S = T$ kommt genau der konventionelle Durchschnittsgrad heraus.
- Durchschnittsgrad-Maximum eines gerichteten Graphen $G = (V, E)$:

$$\gamma^* = \max_{\substack{S,T \subseteq V \\ S \neq \emptyset, T \neq \emptyset}} \left\{ \overline{\deg}_G(S,T) \right\}$$

- Kann mit Linear Programming in Polynomialzeit gelöst werden (Charikar, 2000).

Dense ℓ-Subgraph

- Graph mit Durchschnittsgrad $\overline{\deg}(G)$ muss nicht unbedingt einen echten Teilgraphen mit gleichem Durchschnittsgrad enthalten.
- Maximum des Durchschnittsgrads eines Teilgraphs auf ℓ Knoten:

$$\gamma^*(G, \ell) = \max\left\{\overline{\deg}(G[U]) : U \subseteq V \text{ und } |U| = \ell\right\}$$

Problem

Problem: **Dense-ℓ-Subgraph**
Eingabe: *Graph G, Parameter $\ell \in \mathbb{N}$*
Frage: *Eine Knotenmenge der Kardinalität ℓ mit maximalem induzierten Durchschnittsgrad*

Dense ℓ-Subgraph

- Optimierungsproblem **Dense ℓ-Subgraph** ist $\mathcal{NP}$-hart, denn Instanz $(G, \ell, \ell - 1)$ des zugehörigen Entscheidungsproblems entspricht der Suche nach einer Clique der Größe ℓ in G.

$\Rightarrow$ Wie sieht es mit Approximation aus?

Greedy-Approximation für **Dense ℓ-Subgraph**

Algorithmus 10 : Approximation eines ℓ-Subgraph mit hohem $\overline{\deg}$

Input : Graph $G = (V, E)$ und
gerader Parameter $\ell \in \mathbb{N}$ (mit $|V| \geq \ell$)
Output : Menge von ℓ Knoten von G

Sortiere die Knoten in absteigender Reihenfolge ihrer Grade;
Sei H die Menge von $\frac{\ell}{2}$ Knoten von höchstem Grad;
Berechne $N_H(v) = |N(v) \cap H|$ für alle Knoten $v \in V \setminus H$;
Sortiere die Knoten in $V \setminus H$ in absteigender Reihenfolge der N_H-Werte;
Sei R die Menge von $\frac{\ell}{2}$ Knoten von $V \setminus H$ mit den höchsten N_H-Werten;
return $H \cup R$

Greedy-Approximation für **Dense ℓ-Subgraph**

Satz

Sei G ein Graph auf n Knoten und sei $\ell \in \mathbb{N}$ eine gerade natürliche Zahl mit $\ell \leq n$.
Sei $A(G, \ell)$ der Durchschnittsgrad des induzierten Teilgraphen, der vom vorstehenden Algorithmus ausgegeben wird.
Dann gilt:

$$\gamma^*(G, \ell) \leq \frac{2n}{\ell} \cdot A(G, \ell)$$

bzw.

$$A(G, \ell) \geq \frac{\ell}{2n} \cdot \gamma^*(G, \ell)$$

Greedy-Approximation für **Dense ℓ-Subgraph**

Beweis.

- Für Knotenteilmengen $U, U' \subseteq V$ sei $E(U, U')$ die Menge der Kanten mit einem Endpunkt in U und einem Endpunkt in U'.
- Sei $m_U = |E(G[U])|$
- Sei $\deg_H$ der Durchschnittsgrad der $\frac{\ell}{2}$ Knoten von G mit höchstem Grad bezüglich G. Es gilt: $\deg_H \geq \gamma^*(G, \ell)$.
- Man erhält für die Anzahl der Kanten zwischen H und dem Rest $V \setminus H$:

$$|E(H, V \setminus H)| = \deg_H \cdot |H| - 2m_H = \frac{\deg_H \cdot \ell}{2} - 2m_H \geq 0$$

Greedy-Approximation für **Dense ℓ-Subgraph**

Beweis.

- Weil der Algorithmus greedy (gierig) arbeitet, muss der Anteil der Kanten nach R (i.Vgl. zu $V \setminus H$) mindestens so groß sein, wie der Anteil der Knoten:

$$\frac{|E(H,R)|}{|E(H,V\setminus H)|} \geq \frac{|R|}{|V\setminus H|} = \frac{\ell/2}{n-\ell/2} = \frac{\ell}{2n-\ell} > \frac{\ell}{2n}$$

- Also ist die Gesamtzahl der Kanten in $G[H \cup R]$ mindestens

$$\left(\frac{\deg_H \cdot \ell}{2} - 2m_H\right) \cdot \frac{\ell}{2n} + m_H \geq \frac{\deg_H \cdot \ell^2}{4n}$$

Approximation von **Dense ℓ-Subgraph**

- Die Approximationsgüte wird umso besser, je größer ℓ im Vergleich zu n ist.

- Es gibt andere Approximationsverfahren mit Güte $\mathcal{O}(\frac{n}{\ell})$, z.B. durch rekursives Löschen von Knoten mit kleinstem Grad.

Parametrisierte Dichte

- Schwelle für Dichte (density threshold) $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+$
  - γ soll in Polynomialzeit berechenbar sein und
  - $\forall \ell \in \mathbb{N} : \gamma(\ell) \leq \ell - 1$ soll gelten
- Knotenteilmenge U heißt genau dann γ-dicht, wenn

$$\overline{\deg}(G[U]) \geq \gamma(|U|)$$

Problem

Problem: γ-**dense Subgraph**
Eingabe: *Graph G, Parameter $\ell \in \mathbb{N}$*
Frage: *Existiert eine γ-dichte Knotenmenge der Kardinalität ℓ i G?*

Parametrisierte Dichte

- $\gamma(\ell) = \ell - 1$ entspricht **Clique**-Problem und ist $\mathcal{NP}$-vollständig
- $\gamma(\ell) = 0$ ist trivial, denn jede Menge U bestehend aus ℓ Knoten ist eine Lösung, die Antwort ist also immer "ja", wenn $\ell \leq |V|$
- Welche Funktionen $\gamma(\ell)$ erlauben noch Lösbarkeit in Polynomialzeit?

Satz

Sei γ eine Schwellwertfunktion für die Dichte.

1. *Falls $\gamma = 2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ell}\right)$, dann ist γ-**dense Subgraph** in Polynomialzeit lösbar.*
2. *Falls $\gamma = 2 + \Omega\left(\frac{1}{\ell^{1-\varepsilon}}\right)$ für ein $\varepsilon > 0$, dann ist γ-**dense Subgraph** $\mathcal{NP}$-vollständig.*

Parametrisierte Dichte

- Einen Teilgraph mit ℓ-Knoten und Durchschnittsgrad $\overline{\deg} \geq 2$ zu finden, geht also in Polynomialzeit.
- Aber einen Teilgraph mit ℓ-Knoten und Durchschnittsgrad $\overline{\deg} \geq 2+\varepsilon$ (für $\varepsilon > 0$) zu finden, geht nicht in Polynomialzeit falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.

- k-Cores ließen sich in Linearzeit berechnen (sogar für alle k gleichzeitig)

$\Rightarrow$ riesiger Komplexitätsunterschied zwischen statistischer und struktureller Dichte!

Übersicht

Zusammenhang in Graphen / Netzwerken

- beschäftigt sich mit der Stärke der Verbindung zwischen zwei Knoten in Bezug auf die Anzahl knoten- bzw. kantendisjunkter Wege
- "Eine Kette ist nur so stark wie ihr schwächstes Glied."

$\Rightarrow$ Wir suchen nach den schwächsten Elementen, die beim Entfernen die Verbindung zerstören.

Definition

Ein ungerichteter Graph heißt zusammenhängend, wenn es von jedem Knoten einen Pfad zu jedem anderen Knoten gibt.

Ein maximaler zusammenhängender induzierter Teilgraph wird als Zusammenhangskomponente bezeichnet.

Knoten-Zusammenhang

Definition

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt k-knotenzusammenhängend, falls $|V| > k$ und für jede echte Knotenteilmenge $X \subset V$ mit $|X| < k$ der Graph $G - X$ zusammenhängend ist.
Der Knotenzusammenhang $\kappa(G)$ des Graphen G ist die größte natürliche Zahl k, für die G k-knotenzusammenhängend ist.

Bemerkungen:

- Jeder nicht-leere Graph ist 0-knotenzusammenhängend, da es keine Teilmenge X mit $|X| < 0$ gibt.
- Obwohl es wünschenswert wäre, dass die Bezeichnung "1-knotenzusammenhängend" gleichzusetzen ist mit der Bezeichnung "zusammenhängend", wird üblicherweise der Graph bestehend aus nur einem einzelnen Knoten zwar als zusammenhängend, aber nicht 1-zusammenhängend bezeichnet.

Kanten-Zusammenhang und k-Komponenten

Definition

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt k-kantenzusammenhängend, falls $|V| \geq 2$ und für jede Kantenteilmenge $Y \subseteq E$ mit $|Y| < k$ der Graph $G - Y$ zusammenhängend ist.

Der Kantenzusammenhang $\lambda(G)$ des Graphen G ist die größte natürliche Zahl k, für die G k-kantenzusammenhängend ist.

Der Kantenzusammenhang eines unzusammenhängenden Graphen sowie des Graphen bestehend aus einem einzelnen Knoten ist 0.

Definition

Die maximalen k-fach knoten-/kanten-zusammenhängenden Teilgraphen werden als k-Knoten-/Kanten-Zusammenhangskomponenten bezeichnet.

Zusammenhang in gerichteten Graphen

Definition

Ein gerichteter Graph ist stark zusammenhängend, wenn es für jeden Knoten einen gerichteten Pfad zu jedem anderen Knoten gibt.

Ein maximaler stark zusammenhängender induzierter Teilgraph wird als starke Zusammenhangskomponente bezeichnet.

Knoten- und Kantenzusammenhang können auf gerichtete Graphen übertragen werden, indem man in der jeweiligen Definition fordert, dass $G - X$ bzw. $G - Y$ *stark zusammenhängend* ist.

Separatoren

Definition

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Eine Knotenteilmenge $C \subset V$ heißt Knoten-Separator, wenn die Anzahl der Zusammenhangskomponenten in $G - C$ größer als in G ist.

Falls zwei Knoten s und t zwar in G in der gleichen Zusammenhangskomponente sind, aber nicht in $G - C$, dann bezeichnet man C als s-t-Knoten-Separator.

Kanten-Separatoren und s-t-Kanten-Separatoren sind analog definiert.

s-t-Separatoren können auch auf gerichtete Graphen übertragen werden: eine Knoten- bzw. Kantenmenge ist dann ein s-t-Separator, wenn es keinen gerichteten Pfad mehr von s nach t gibt, nachdem die Menge aus dem Graph entfernt wurde.

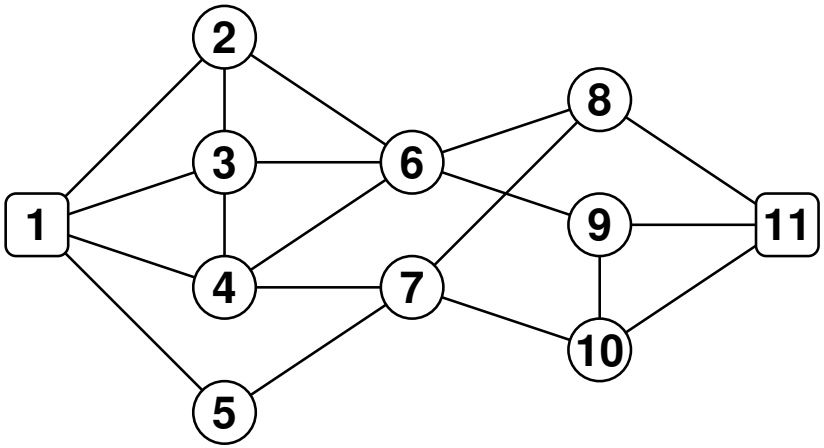
Disjunkte Pfade

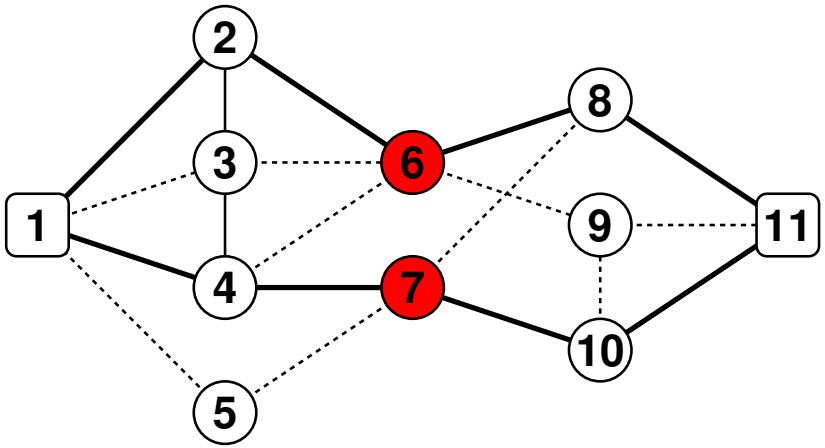
Definition

Zwei (gerichtete oder ungerichtete) Pfade von s nach t werden als knotendisjunkte s-t-Pfade bezeichnet, wenn sie keinen Knoten außer s und t gemeinsam haben.

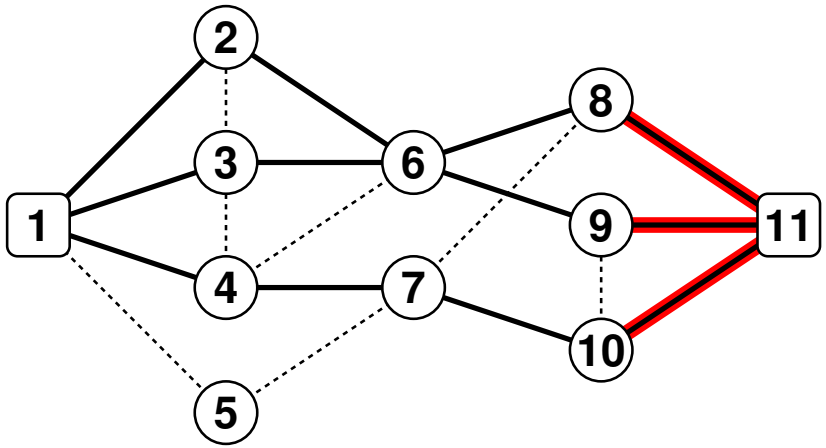
Zwei Pfade werden als kantendisjunkte Pfade bezeichnet, wenn sie keine Kante gemeinsam haben.

Disjunkte s-t-Pfade





2 knotendisjunkte 1-11-Pfade



3 kantendisjunkte 1-11-Pfade

Lokaler Zusammenhang

Definition

Für zwei Knoten s und t eines Graphen G ist der lokale (Knoten-)Zusammenhang $\kappa_G(s,t)$ definiert als die minimale Anzahl von Knoten, die entfernt werden müssen, damit es keinen Weg mehr von s nach t gibt.

Für den Fall, dass zwischen s und t eine Kante existiert, können sie nicht durch das Löschen von Knoten separiert werden. Deshalb wird der lokale (Knoten-)Zusammenhang in diesem Fall $\kappa_G(s,t) = n-1$ definiert. (Anderenfalls wäre höchstens $\kappa_G(s,t) = n-2$ möglich.)

Der lokale Kanten-Zusammenhang zweier Knoten s und t ist entsprechend definiert als die minimale Anzahl von Kanten, die entfernt werden müssen, damit es keinen Weg mehr von s nach t gibt.

Lokaler Zusammenhang

Hinweis:
Für ungerichtete Graphen gilt $\kappa_G(s,t) = \kappa_G(t,s)$ und $\lambda_G(s,t) = \lambda_G(t,s)$, was für gerichtete Graphen im Allgemeinen nicht gilt.

Zweifachzusammenhang

Definition

Ein Artikulationsknoten ist ein Knoten, der beim Entfernen aus dem Graphen die Anzahl der Zusammenhangskomponenten erhöht.
Eine Brücke ist eine Kante, die beim Entfernen aus dem Graphen die Anzahl der Zusammenhangskomponenten erhöht.
Eine Zweifachzusammenhangskomponente ist ein maximaler 2-fach (knoten-)zusammenhängender Teilgraph.
Ein Block ist ein maximaler zusammenhängender Teilgraph, der keinen Artikulationsknoten enthält, d.h. die Menge aller Blocks eines Graphen besteht aus den isolierten Knoten, den Brücken, sowie den Zweifachzusammenhangskomponenten.

Block-Graph und CutPoint-Graph

Definition

Der Block-Graph $B(G)$ eines Graphen G hat jeweils einen Knoten für jeden Block von G (außer für isolierte Knoten), wobei zwei Knoten des Block-Graphen adjazent sind, wenn die entsprechenden Blöcke in G einen (Artikulations-)Knoten gemeinsam haben.

Der CutPoint-Graph $C(G)$ eines Graphen G hat jeweils einen Knoten für jeden Artikulationsknoten von G, wobei zwei Knoten des CutPoint-Graphen adjazent sind, wenn die entsprechenden Artikulationsknoten in G zum gleichen Block gehören.

Satz (Harary)

Für jeden Graphen gilt:

$$B(B(G)) = C(G) \quad \textit{und} \quad B(C(G)) = C(B(G))$$

Block-CutPoint-Graph

Definition

Der Block-CutPoint-Graph eines Graphen G ist der bipartite Graph, dessen Knotenmenge aus je einem Knoten für jeden Artikulationsknoten von G und je einem Knoten für jeden Block von G besteht, wobei ein CutVertex-Knoten mit einem Block-Knoten genau dann durch eine Kante verbunden ist, wenn der Artikulationsknoten zu dem entsprechenden Block gehört.

Satz (Harary & Prins)

Der Block-CutPoint-Graph eines zusammenhängenden Graphen ist ein Baum.

Übersicht

Das Assignment Problem

Maximum Matching Problem:

- gegeben: bipartiter Graph
- gesucht: Matching maximaler Kardinaliät
- davon kann es aber mehrere gegeben
- manche werden gegenüber anderen bevorzugt

$\Rightarrow$ Assigment Problem:

- gegeben: [vollständiger] bipartiter Graph mit Kantengewichten (Kosten)
- gesucht: Matching maximaler Kardinaliät mit minimalen Kosten

Das Assignment Problem

- Beispielanwendung: Zuordnung n Arbeiter $\leftrightarrow$ n Jobs
- gegeben: Eignung r_{ij} von Arbeiter i für Job j (z.B. als Matrix)
- gesucht: Zuordnung Arbeiter $\leftrightarrow$ Jobs mit maximaler Gesamteignung

$\Rightarrow$ $n!$ Möglichkeiten der Zuordnung

- entspricht der Suche nach n unabhängigen Elementen der Matrix mit maximaler Summe
  unabhängig: keine zwei Einträge auf einer Linie (Zeile/Spalte)
- Sei $r = \max_{i,j} r_{ij}$ und $x_{ij} = r - r_{ij}$.

$\Rightarrow$ Maximierungsproblem für r_{ij} entspricht Minimierungsproblem für x_{ij}

- andere Beispielanwendung: Zuordnung n Jobs $\leftrightarrow$ n Maschinen
- gegeben: Kosten x_{ij} von Job i auf Maschine j
- gesucht: Zuordnung Jobs $\leftrightarrow$ Maschinen mit minimalen Kosten

Grundlage

- basiert auf den Arbeiten von D. Kőnig und E. Egerváry
- 1955: Vorschlag der "Ungarischen Methode" durch H. W. Kuhn
- 1957: Verbesserung durch J. Munkres

Satz (Kőnig)

Sei m die maximale Anzahl unabhängiger Nulleinträge in einer Matrix A, dann gibt es m Linien, die alle Nulleinträge enthalten.

Satz

Die Lösung des Problems ändert sich nicht, wenn alle Matrixeinträge x_{ij} durch $y_{ij} = x_{ij} - u_i - v_j$ ersetzt werden.

- Annahme zunächst, dass alle Einträge von $A = (x_{ij})$ Integers sind

Ungarische Methode (Ursprüngliche Variante)

A Subtrahiere das kleinste Element in A von allen Elementen in A.
Man erhält Matrix A_1 mit nichtnegativen Elementen und mindestens einer Null.

B Finde eine minimale Menge S_1 von n_1 Linien, die alle Nullen von A_1 enthält.
Falls $n_1 = n$, dann gibt es eine Menge von n unabhängigen Nullen und die Elemente der ursprünglichen Matrix A an diesen n Positionen ergeben eine Lösung.

C Falls $n_1 < n$, sei h_1 kleinstes Element von A_1, das nicht von einer der Linien in S_1 überdeckt wird. $\Rightarrow$ $h_1 > 0$
Für jede Linie in S_1 addiere h_1 zu jedem Element der Linie.
Subtrahiere h_1 von jedem Element der Matrix A_1 und erhalte A_2.

D Wiederhole Schritte B und C mit A_2 anstatt A_1 usw.

Ungarische Methode

- Gesamtsumme der Matrixeinträge verringert sich in Schritt C immer um $n^2 h_k - n_k n h_k = n(n - n_k)h_k$.

$\Rightarrow$ terminiert nach endlich vielen Schritten

- Spezifiziere Schritt B, also die Bestimmung
  - einer minimalen Menge von Linien, die alle Nullen überdeckt,
  - einer maximalen Menge unabhängiger Nullen
- Hier unterscheidet sich die Algorithmen von Munkres und Kuhn. (Wir betrachten die Variante von Munkres.)

- betrachte überdeckte Linien (covered lines) und dementsprechend zweifach, einfach oder nicht überdeckte Matrixeinträge

Ungarische Methode

Init In Matrix A:
Bestimme in jeder Zeile den kleinsten Wert und subtrahiere ihn von allen Einträgen dieser Zeile.

Bestimme in jeder Spalte den kleinsten Wert und subtrahiere ihn von allen Einträgen dieser Spalte.

$\Rightarrow$ ähnlich wie Schritt A zuvor (Schritt A erzeugt aber nur mindestens eine Null in der gesamten Matrix, während hier mindestens eine Null in jeder Zeile und jeder Spalte erzeugt wird)

- Betrachte nacheinander jeden Nulleintrag Z:
Wenn es weder in der gleichen Zeile noch in der gleichen Spalte eine 0^* gibt, markiere Z mit einem Stern
- Überdecke (cover) jede Spalte, die eine 0^* enthält
(diese sind unabhängig)

Ungarische Methode

1. Wähle eine nicht überdeckte Null und markiere sie als $0'$
   Betrachte die Zeile, in der sie steht.
   Wenn es dort keine 0^* gibt, gehe zu Schritt 2.
   Wenn es eine 0^* gibt, überdecke die Zeile und hebe die Überdeckung der Spalte dieser 0^* auf.
   Wiederhole das bis alle Nullen überdeckt sind und gehe zu Schritt 3.

2. Es gibt eine Sequenz von 0^* und $0'$ wie folgt:

   Sei Z_0 eine nicht überdeckte $0'$. (Es gibt nur eine.)
   Sei Z_1 die 0^* in der Spalte von Z_0 (falls existent) und sei Z_2 die $0'$ in der Zeile von Z_1 (noch zu zeigen, dass diese existiert) usw.

   Die Sequenz stoppt bei einer $0'$ mit der Bezeichnung Z_{2k}, die keine 0^* in ihrer Spalte hat (auch zu zeigen).

Ungarische Methode

- Keine Spalte enthält mehr als eine 0^*.
- Keine Zeile enthält mehr als eine $0'$.

$\Rightarrow$ Sequenz ist eindeutig

- Die Sequenz könnte aber u.U. nur aus Z_0 bestehen.

- Die Spalte von Z_1 ist nicht überdeckt (weil Z_1 in der gleichen Spalte wie Z_0 steht und diese nicht überdeckt war).

$\Rightarrow$ Die Zeile von Z_1 muss überdeckt sein (alle 0^* sind überdeckt).

$\Rightarrow$ Es muss eine $0'$ in der Zeile von Z_1 geben (nur mit $0'$ entstehen überdeckte Zeilen in Schritt 1) und diese wird Z_2.

- Genauso zeigt man die Existenz aller Z_{2i}, wenn Z_{2i-1} existiert.

Ungarische Methode

- Nummeriere die $0'$ in der gleichen Reihenfolge wie sie in Schritt 1 markiert wurden.

$\Rightarrow$ Die Nummer von Z_{2i} muss kleiner sein als die Nummer der vorhergehenen 0^*, also von Z_{2i-2}.

$\Rightarrow$ Die Sequenz stoppt und alle Elemente von $Z_0, \ldots, Z_{2k}$ sind verschiedene Matrixeinträge.

- Behandlung der Sequenz $Z_0, \ldots, Z_{2k}$ als augmentierender Pfad:
  - Entferne in $Z_0, \ldots, Z_{2k}$ alle $*$-Markierungen
  - Ersetze in $Z_0, \ldots, Z_{2k}$ alle $0'$ durch 0^*

  (Neue 0^*-Menge ist auch unabhängig und um ein Element größer.)
- Entferne alle restlichen $0'$-Markierungen, sowie alle Zeilenüberdeckungen.
- Überdecke alle Spalten, die eine 0^* enthalten.
- Falls alle Spalten überdeckt sind, ergeben die 0^* die gesuchte Menge, sonst gehe zu Schritt 1.

Ungarische Methode

- An dieser Stelle sind alle Nullen überdeckt.
  Jede 0^* wird exakt von einer Linie überdeckt.
  Es gibt also genau so viele überdeckte Linien wie 0^*.

  Jede Linienmenge, die alle Nullen überdeckt, kann nicht weniger Linien enthalten als die maximale Anzahl unabhängiger Nullen.

$\Rightarrow$ Die Menge der 0^*-Einträge bilden eine maximale Menge unabhängiger Nullen und die überdeckten Linien bilden eine minimale Menge, die alle Nullen abdeckt.

$\Rightarrow$ Schritte 1 und 2 (u.U. mit Wiederholungen) ersetzen Schritt B aus dem vorigen Algorithmus

Ungarische Methode

3. Sei h das kleinste nicht überdeckte Element der Matrix (h ist positiv).

   Addiere h zu jeder überdeckten Zeile und subtrahiere h von jeder nicht überdeckten Spalte (gleiche Transformation wie in Schritt C zuvor).

   Gehe zu Schritt 1 ohne Markierungen oder Überdeckungen zu ändern(!)

   Man könnte meinen, man müsste
   - alle $0'$ demarkieren,
   - jede Zeilenüberdeckung entfernen und
   - die Spalte von jeder 0^* überdecken,

   um wieder die gleiche Art von Eingabe zu erhalten bevor man zu Schritt 1 zurückgeht, aber das ist unnötig:

Ungarische Methode

- Der Effekt der Transformation (Addition / Subtraktion mit gleichem Ergebnis wie in Schritt C) ist, dass
  - alle nicht überdeckten Einträge um h dekrementiert werden, während
  - alle doppelt überdeckten Einträge um h inkrementiert werden.
  - Die einfach überdeckten Einträge bleiben gleich.
- Da jede 0^* und jede $0'$ einfach überdeckt sind, bleiben diese Einträge Nullen.
- Das zeigt übrigens $n_{k+1} \geq n_k$, wobei n_i die maximale Anzahl unabhängiger Nullen in Matrix A_i ist; A_k ist die Matrix vor der Transformation und A_{k+1} die transformierte Matrix.

Ungarische Methode

- Seien die $0'$ in der gleichen Reihenfolge nummeriert, in der sie markiert wurden.
- Angenommen, man würde
  - alle $0'$ demarkieren,
  - jede Zeilenüberdeckung entfernen und
  - die Spalte von jeder 0^* überdecken,

  bevor man wieder zu Schritt 1 geht.
- Die Anweisung in Schritt 1 schreibt vor, eine (von möglicherweise mehreren) nicht überdeckten Nullen auszuwählen und diese als $0'$ zu markieren.
- Wenn man die Nullen genau in der Reihenfolge ihrer Nummerierung auswählt, erhält man dieselbe Konfiguration von 0^*, $0'$ und Linienüberdeckungen.

$\Rightarrow$ Diese erneute Initialisierung ist überflüssig.

Ungarische Methode

- Wie schon bemerkt, senkt Schritt 3 (bzw. C) die Gesamtsumme der Matrixeinträge, so dass der Algorithmus nach endlicher Zeit endet.
- Es gilt aber sogar folgende stärkere Aussage:

  Falls $n_{k+1} = n_k$, dann wird nach Anwendung von Schritt 1 auf A_{k+1} Schritt 2 nicht auftreten und man wird in Schritt 3 mit mehr horizontalen überdeckten Linien (also Zeilen) starten als bei der Anwendung von Schritt 3 auf A_k.

- Jede überdeckte Zeile von A_k ist auch überdeckt in A_{k+1}.
- Die Transformation von A_k zu A_{k+1} verursacht eine neue Null Z auf einer nicht überdeckten Position.
- Z muss eine 0^* in seiner Zeile haben (sonst würde Schritt 2 auf A_{k+1} angewendet mit der Folge $n_{k+1} > n_k$), so dass diese Zeile überdeckt ist, wenn man Schritt 3 erreicht.

Ungarische Methode

$\Rightarrow$ Nach höchstens n Anwendungen von Schritt 3 erhöht sich die maximale Anzahl unabhängiger Nullen in der Matrix.

$\Rightarrow$ Annahme, dass Elemente von A Integers sind, ist nicht notwendig, um die endliche Laufzeit zu zeigen

- Man kann damit auch eine Laufzeitschranke zeigen: $\mathcal{O}(n^4)$

Ungarische Methode

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 15 & 15 \\ 4 & 8 & 9 & 11 \\ 10 & 5 & 7 & 8 \\ 12 & 10 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Kleinstes Element in jeder Zeile abziehen, ebenso für die Spalten:

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 6 & 9 & 9 \\ 0 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & 0 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 6 & 9 & 6 \\ 0 & 4 & 5 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ungarische Methode

Betrachte die Nullen und markiere sie mit $*$, falls keine 0^* in der gleichen Zeile / Spalte steht

$$\begin{array}{cccc} 0^* & 6 & 9 & 6 \\ 0 & 4 & 5 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{cccc} 0^* & 6 & 9 & 6 \\ 0 & 4 & 5 & 4 \\ 5 & 0^* & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{cccc} 0^* & 6 & 9 & 6 \\ 0 & 4 & 5 & 4 \\ 5 & 0^* & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 0^* & 0 \end{array}$$

(Die 0^* sind unabhängig.)

Überdecke Spalten, die 0^* enthalten

$$\begin{array}{cccc} 0^* & 6 & 9 & 6 \\ 0 & 4 & 5 & 4 \\ 5 & 0^* & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 0^* & 0 \end{array}$$

Ungarische Methode

Wähle eine nicht überdeckte Null und markiere sie als $0'$.

Da in der gleichen Zeile eine 0^* steht, hebe deren Spaltenüberdeckung auf und überdecke stattdessen die Zeile.

$\rightarrow$

0^*	6	9	6
0	4	5	4
5	0^*	2	$0'$
6	4	0^*	0

$\rightarrow$

0^*	6	9	6
0	4	5	4
5	0^*	2	$0'$
6	4	0^*	$0'$

Jetzt sind alle Nullen überdeckt.

Ungarische Methode

Bestimme kleinstes nicht überdecktes Element: 4

Transformation:

$$\begin{array}{|cccc|}\hline 0^* & 6 & 9 & 6 \\ 0 & 4 & 5 & 4 \\ \hline 5 & 0^* & 2 & 0' \\ 6 & 4 & 0^* & 0' \\ \hline \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{|cccc|}\hline 0^* & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 9 & 0^* & 2 & 0' \\ 10 & 4 & 0^* & 0' \\ \hline \end{array}$$

Wähle eine nicht überdeckte Null und markiere sie als $0'$.

Diesmal steht in der gleichen Zeile keine 0^*, bestimme also $Z_0, \ldots, Z_{2k}$:

$$\begin{array}{|cccc|}\hline 0^* & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0' & 1 & 0 \\ \hline 9 & 0^* & 2 & 0' \\ 10 & 4 & 0^* & 0' \\ \hline \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{|cccc|}\hline 0^* & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0'(Z_0) & 1 & 0 \\ \hline 9 & 0^*(Z_1) & 2 & 0'(Z_2) \\ 10 & 4 & 0^* & 0' \\ \hline \end{array}$$

Ungarische Methode

Invertiere $*$-Markierungen der Sequenz, hebe $0'$-Markierungen und Zeilenüberdeckungen auf und überdecke alle 0^*-Spalten:

0^*	2	5	2
0	$0'(Z_0)$	1	0
9	$0^*(Z_1)$	2	$0'(Z_2)$
10	4	0^*	$0'$

$\rightarrow$

0^*	2	5	2
0	0^*	1	0
9	0	2	0^*
10	4	0^*	0

Fundamentale Ungleichung

Satz

Für jeden Graphen G gilt:

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$

Beweis.

- Spezialfall: Für unzusammenhängende Graphen sowie den Graph mit nur einem Knoten gilt $\kappa(G) = \lambda(G) = 0 \leq \delta(G)$.
- Ansonsten: Die inzidenten Kanten eines Knotens v mit $\deg(v) = \delta(G)$ bilden einen Kanten-Separator.

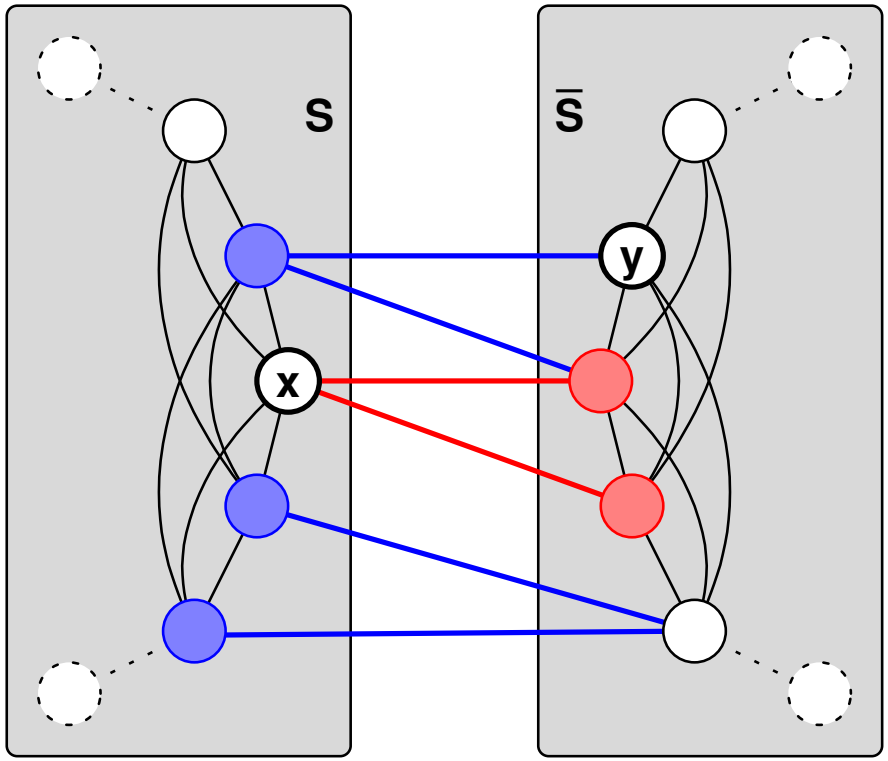
$\Rightarrow \lambda(G) \leq \delta(G)$

Fundamentale Ungleichung

Beweis.

- Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit mindestens zwei Knoten.
  Betrachte Kanten-Separator minimaler Kardinalität.
  Dieser partitioniert die Knotenmenge in S und $\bar{S} = V \setminus S$.
- Falls alle Kanten zwischen S und $\bar{S}$ vorhanden sind, gilt
  $\lambda(G) = |S| \cdot |\bar{S}| \geq n - 1 \geq \kappa(G)$
  ($|S| \cdot |\bar{S}|$ ist am kleinsten, wenn nur 1 Knoten von den restlichen $n - 1$ abgetrennt wird)
- Anderenfalls existieren Knoten $x \in S$ und $y \in \bar{S}$ mit $\{x, y\} \notin E$, wobei die Nachbarn von x in $\bar{S}$ zusammen mit allen Knoten aus $S \setminus \{x\}$, die Nachbarn in $\bar{S}$ haben, einen Knoten-Separator bilden. Dieser Knoten-Separator ist höchstens so groß wie die Anzahl der Kanten von S nach $\bar{S}$, und er separiert mindestens x und y.

Fundamentale Ungleichung



- rote und blaue Kanten bilden zusammen einen Kantenseparator
- rote und blaue Knoten bilden einen Knotenseparator für x und y

Fundamentale Ungleichung

Der Knotenseparator hat höchstens die gleiche Kardinalität wie der Kantenseparator, denn

- zu jedem roten / blauen Knoten gibt es mindestens eine rote / blaue Kante und
- rote und blaue Kanten sind disjunkt (zu den roten ist x inzident und zu den blauen nicht)

Warum kann man nicht einfach alle Knoten in S nehmen, die einen Nachbarn in $\bar{S}$ haben (also x anstatt der roten Knoten)?

- weil dann evt. keine Knoten von S übrigbleiben

$\Rightarrow$ dann gäbe es keine zwei Teile, sondern nur einen

Das n-Chain / n-Arc Theorem

Satz (Menger, 1927)

Seien P und Q Teilmengen der Knoten eines ungerichteten Graphen.

Dann sind folgende Größen gleich

- *die maximale Anzahl knotendisjunkter Pfade, die Knoten von P mit Knoten von Q verbinden, und*
- *die minimale Kardinalität einer Knotenmenge, die alle Pfade zwischen Knoten in P und Knoten in Q überschneidet bzw. unterbricht.*

Der Satz von Menger

Satz ("Satz von Menger")

Seien s und t zwei Knoten eines ungerichteten Graphen.

Wenn s und t nicht adjazent sind, dann ist die maximale Anzahl knotendisjunkter s-t-Pfade gleich der minimalen Kardinalität eines s-t-Knoten-Separators.

Satz (Kantenversion)

Die maximale Anzahl kantendisjunkter s-t-Pfade ist gleich der minimalen Kardinalität eines s-t-Kanten-Separators.

(Ford/Fulkerson, Dantzig/Fulkerson, Elias/Feinstein/Shannon, 1956)

Eng verwandt: MaxFlow-MinCut-Theorem
(Kantenversion von Menger's Theorem kann als Spezialfall gesehen werden, wo alle Kantengewichte den gleichen Wert haben.)

Whitney's Theorem

Satz (Whitney, 1932)

Sei G ein nicht-trivialer Graph und k eine natürliche Zahl.
G ist genau dann k-(knoten-)zusammenhängend, wenn alle Paare verschiedener Knoten (s, t) durch k knotendisjunkte s-t-Pfade verbunden werden können.

Schwierig bei der Herleitung ist nur, dass der Satz von Menger fordert, dass die Knoten nicht adjazent sind.
Da diese Bedingung bei der Kantenversion nicht auftritt, folgt aus dieser sofort:

Satz

Sei G ein nicht-trivialer Graph und k eine natürliche Zahl.
G ist genau dann k-kanten-zusammenhängend, wenn alle Paare verschiedener Knoten (s, t) durch k kantendisjunkte s-t-Pfade verbunden werden können.

Gemischter Knoten-/Kanten-Zusammenhang

Definition

Ein Paar (k, ℓ) heißt Zusammenhangspaar zweier Knoten s und t eines Graphen, falls eine Menge aus k Knoten und ℓ Kanten existiert, die jeden Weg zwischen s und t beim Entfernen zerstört, aber es keine solche Menge bestehend aus $k-1$ Knoten und ℓ Kanten oder k Knoten und $\ell-1$ Kanten gibt.

Satz (Beineke & Harary, 1967)

Wenn (k, ℓ) ein Zusammenhangspaar zweier Knoten s und t in einem Graphen ist, dann gibt es $k+\ell$ kantendisjunkte Pfade von s nach t, von denen k knotendisjunkte s-t-Pfade sind.

Einfache Schranken

Satz

Der (Knoten-/Kanten-)Zusammenhang in einem Graphen mit n Knoten und m Kanten ist höchstens

$$\begin{array}{rl} \left\lfloor \frac{2m}{n} \right\rfloor : & \text{falls } m \geq n-1 \\ 0 : & \text{sonst} \end{array}$$

Der (Knoten-/Kanten-)Zusammenhang in einem Graphen mit n Knoten und m Kanten ist mindestens

$$\begin{array}{rl} m - \binom{n-1}{2} : & \text{falls } \binom{n-1}{2} < m \leq \binom{n}{2} \\ 0 : & \text{sonst} \end{array}$$

Für jeden Graphen G mit $\delta(G) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ gilt: $\lambda(G) = \delta(G)$.

Überlappung von k-Knoten-Komponenten

Die offensichtliche Tatsache, dass

- zwei verschiedene Zusammenhangskomponenten keinen Knoten gemeinsam haben können und
- zwei verschiedene Blöcke höchstens einen Knoten gemeinsamen haben können,

lässt sich wie folgt verallgemeinern:

Satz

Zwei verschiedene k-(Knoten-)Komponenten haben höchstens $k-1$ Knoten gemeinsam.

Nicht-Überlappung von k-Kanten-Komponenten

Satz (Matula, 1968)

Für jede natürliche Zahl k sind die k-Kanten-Komponenten eines Graphen knotendisjunkt.

Beweis.

Übungsaufgabe . . . □

Satz von Mader

Obwohl aus der fundamentalen Ungleichung $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ folgt, dass k-Knoten-/Kanten-Zusammenhang einen Minimalgrad $\geq k$ impliziert, ist das Gegenteil nicht unbedingt der Fall.
Ein hoher Durchschnittsgrad impliziert aber die Existenz eines relativ gut zusammenhängenden Teilgraphen:

Satz (Mader, 1972)

Jeder Graph mit Durchschnittsgrad mindestens $4k$ enthält einen k-zusammenhängenden Teilgraph.

Kanten-Schnitte

- ungerichteter gewichteter Graph $G = (V, E)$
- zwei disjunkte Knotenteilmengen $X, Y \subseteq V$, $X \cap Y = \emptyset$
- Gewichtssumme der Kanten von Knoten in X zu Knoten in Y: $w(X, Y)$
- für gerichtete Graphen analog, allerdings Startknoten in X und Zielknoten in Y
- Schnitt S (engl. cut): Knotenmenge mit $\emptyset \subset S \subset V$, Gewicht / Kapazität $w(S, V \setminus S)$
- ungewichtete Graphen: Gewicht des Schnitts ist Anzahl der Kanten von S nach $V \setminus S$.

Kanten-Schnitte minimalen Gewichts (Minimum Cuts)

Definition

Ein Minimum Cut ist ein Schnitt mit minimalem Gewicht.

Ein Schnitt S ist also genau dann ein Minimum Cut, wenn für jeden Schnitt T gilt

$$w(S, V \setminus S) \leq w(T, V \setminus T)$$

Fakt

Ein Kanten-Schnitt minimalen Gewichts in einem zusammenhängenden Graphen mit echt positiven Kantengewichten induziert einen zusammenhängenden Teilgraphen.

Satz

In einem Graphen mit n Knoten kann es höchstens $\binom{n}{2}$ *verschiedene Minimum Cuts geben.*

Minimum Cuts

Lemma

Sei $(S, V \setminus S)$ ein Minimum Cut in $G = (V, E)$.
Dann gilt für jede nicht-leere Teilmenge $T \subset S$:

$$w(T, S \setminus T) \geq \frac{\lambda}{2}$$

Beweis.

- Annahme: $w(T, S \setminus T) < \frac{\lambda}{2}$
- $w(T, V \setminus S) + w(S \setminus T, V \setminus S) = \lambda$
- o.B.d.A.: $w(T, V \setminus S) \leq \frac{\lambda}{2}$
  (sonst vertausche T und $S \setminus T$)

$\Rightarrow$ $w(T, V \setminus T) = w(T, S \setminus T) + w(T, V \setminus S) < \lambda$ (Widerspruch)

Minimum Cuts

Notation:

- $\bar{X} = V \setminus X$
- Im Folgenden werden wir einen Schnitt $(X, \bar{X})$ oft einfach nur mit X bezeichnen.

Lemma

Seien $(A, \bar{A})$ und $(B, \bar{B})$ mit $A \neq B$ zwei Minimum Cuts in $G = (V, E)$, so dass $T = A \cup B$ auch ein Minimum Cut in G ist.

Dann gilt:

$$w(A, \bar{T}) = w(B, \bar{T}) = w(A \setminus B, B) = w(A, B \setminus A) = \frac{\lambda}{2}$$

Minimum Cuts

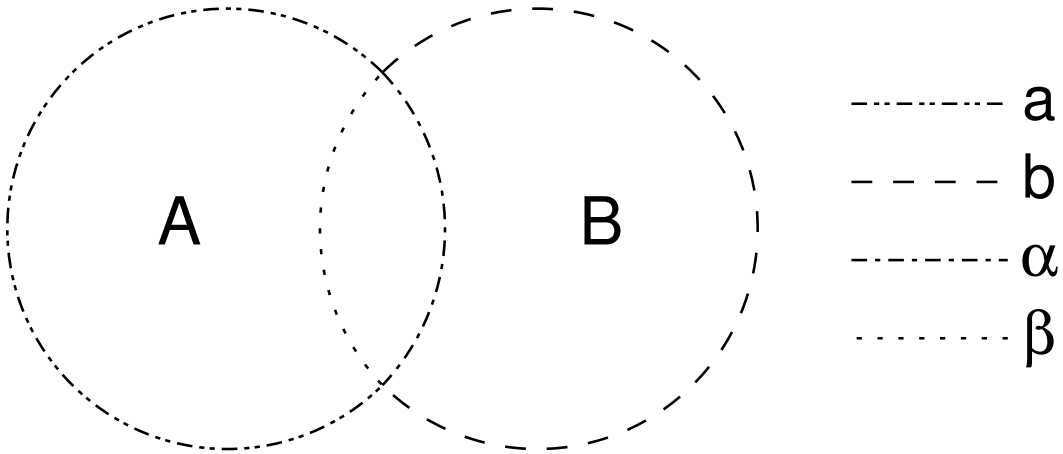


Abbildung: Schnitt zweier Minimum Cuts A und B

Minimum Cuts

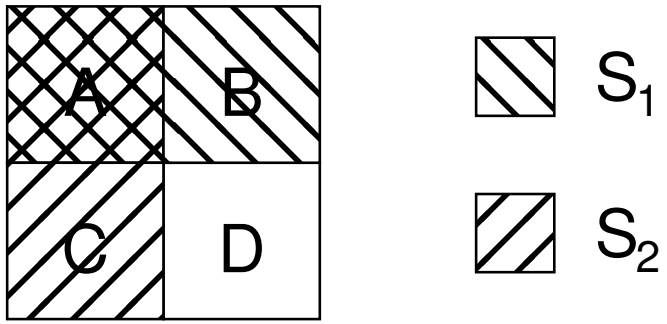
Beweis.

- Sei $a = w\left(A, \bar{T}\right)$,
  $b = w\left(B, \bar{T}\right)$,
  $\alpha = w\left(A, B \setminus A\right)$ und
  $\beta = w\left(B, A \setminus B\right)$.

$\Rightarrow$ $w\left(A, \bar{A}\right) = a + \alpha = \lambda$,
$w\left(B, \bar{B}\right) = b + \beta = \lambda$
$w\left(T, \bar{T}\right) = a + b = \lambda$

- Es gilt auch:
  $w\left(A \setminus B, B \cup \bar{T}\right) = a + \beta \geq \lambda$ und $w\left(B \setminus A, A \cup \bar{T}\right) = b + \alpha \geq \lambda$.
- Dieses (Un-)Gleichungssystem hat nur eine Lösung:
  $a = \alpha = b = \beta = \frac{\lambda}{2}$.

Minimum Cuts

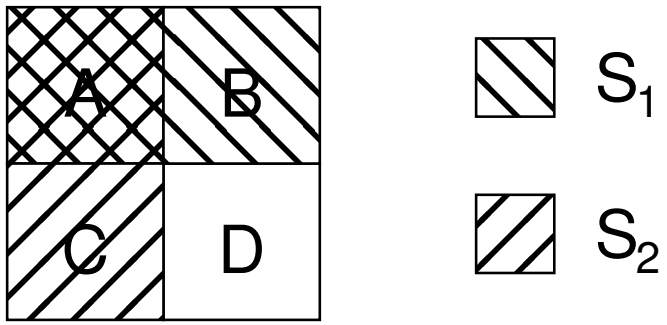


Definition

Ein Paar $\langle S_1, S_2 \rangle$ heißt Crossing Cut, falls S_1, S_2 Minimum Cuts sind und keine der folgenden Mengen leer ist:

- $A = S_1 \cap S_2$,
- $B = S_1 \setminus S_2$,
- $C = S_2 \setminus S_1$
- $D = \bar{S}_1 \cap \bar{S}_2$

Crossing Cuts



Lemma

Seien $\langle S_1, S_2 \rangle$ Crossing Cuts und seien Mengen wie folgt definiert: $A = S_1 \cap S_2$, $B = S_1 \setminus S_2$, $C = S_2 \setminus S_1$ and $D = \bar{S}_1 \cap \bar{S}_2$. Dann gilt:

1. *A, B, C und D sind Minimum Cuts.*
2. $w(A, D) = w(B, C) = 0$
3. $w(A, B) = w(B, D) = w(D, C) = w(C, A) = \frac{\lambda}{2}$

Crossing Cuts

Beweis.

- Da S_1 und S_2 Minimum Cuts sind, gilt:
  - $w\left(S_1, \bar{S}_1\right) = w(A,C) + w(A,D) + w(B,C) + w(B,D) = \lambda$
  - $w\left(S_2, \bar{S}_2\right) = w(A,B) + w(A,D) + w(B,C) + w(C,D) = \lambda$

$\Rightarrow \; w(A,B) + w(A,C) + 2w(A,D) + 2w(B,C) + w(B,D) + w(C,D) = 2\lambda$

- Da es keinen Schnitt mit Kapazität $< \lambda$ gibt, gilt:

$$\begin{array}{lcll} w\left(A, \bar{A}\right) & = & w(A,B) + w(A,C) + w(A,D) & \geq \; \lambda \\ w\left(B, \bar{B}\right) & = & w(A,B) + w(B,C) + w(B,D) & \geq \; \lambda \\ w\left(C, \bar{C}\right) & = & w(A,C) + w(B,C) + w(C,D) & \geq \; \lambda \\ w\left(D, \bar{D}\right) & = & w(A,D) + w(B,D) + w(C,D) & \geq \; \lambda \end{array}$$

$\Rightarrow \; 2[w(A,B) + w(A,C) + w(A,D) + w(B,C) + w(B,D) + w(C,D)] \geq 4\lambda$

$\Rightarrow \; w(A,D) = w(B,C) = 0$ (keine Diagonalkanten)

Crossing Cuts

Beweis.

- Die waagerechte Linie in der Abbildung entspricht dem Minimum Cut $(S_1, \bar{S}_1) = (A \cup B, C \cup D) = \lambda$, die senkrechte entspricht $(S_2, \bar{S}_2) = (A \cup C, B \cup D) = \lambda$.
- Analogie: Länge der Kanten entspricht Kapazität der geschnittenen Kanten
- Annahme: die waagerechte und senkrechte Linie schneiden sich nicht genau in der Mitte

$\Rightarrow$ Dann definiert eine der Teilmengen $X = A$, B, C oder D einen Schnitt $w(X, \bar{X}) < \lambda$ (Widerspruch)

$\Rightarrow$ $w(A, B) = w(B, D) = w(D, C) = w(C, A) = \frac{\lambda}{2}$ und $w(A, \bar{A}) = w(B, \bar{B}) = w(C, \bar{C}) = w(D, \bar{D}) = \lambda$

Zirkuläre Partitionen

Crossing Cuts in $G = (V, E)$ partitionieren V in vier Teile

Allgemeiner:

Definition

Eine zirkuläre Partition ist eine Aufteilung von V in $k \geq 3$ disjunkte Mengen $V_1, V_2, \ldots, V_k$, so dass

- $w(V_i, V_j) = \begin{cases} \lambda/2 & \text{falls } |i-j| = 1 \mod k \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$
- Falls S ein Minimum Cut ist, dann ist
  - S oder $\bar{S}$ eine echte Teilmenge einer Menge V_i oder
  - die zirkuläre Partition ist eine Verfeinerung der Partition, die durch den Minimum Cut S definiert wird.
    (S ist die Vereinigung einiger Mengen der zirkulären Partition.)

Circular Partition Cuts

- Seien $V_1, V_2, \ldots, V_k$ die disjunkten Mengen einer zirkulären Partition.

$\Rightarrow$ Für alle a, b mit $1 \leq a \leq b < k$ ist die Menge

$$S = \bigcup_{i=a}^{b} V_i$$

ein Minimum Cut (zusammen mit $\bar{S} = V \setminus S$),
genannt Circular Partition Cut.

- Insbesondere ist jedes einzelne V_i $(1 \leq i \leq k)$ ist ein Minimum Cut (erster Punkt der Definition zirkulärer Partitionen).

Zirkuläre Partitionen

- Betrachte Minimum Cut S, so dass weder S noch $\bar{S}$ in einer Menge der zirkulären Partition enthalten ist.

Aus dem zweiten Teil der Definition zirkulärer Partitionen folgt

- Da S und $\bar{S}$ zusammenhängend sein müssen, ist S oder $\bar{S}$ gleich $\bigcup_{i=a}^{b} V_i$ für ein Paar a, b mit $1 \leq a < b < k$.

- Für jedes V_i einer zirkulären Partition gilt:
  es existiert kein Minimum Cut S, so dass $\langle V_i, S \rangle$ ein Crossing Cut ist.

Kompatibilität zirkulärer Partitionen

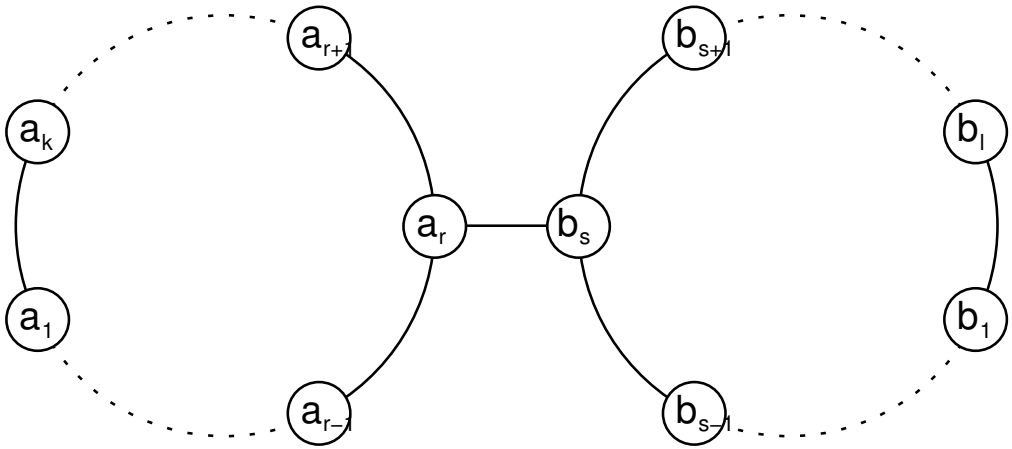
Definition

Zwei verschiedene zirkuläre Partitionen $P = \{U_1, \ldots, U_k\}$ und $Q = \{V_1, \ldots, V_l\}$ sind kompatibel, wenn es eindeutige Zahlen r und s $(1 \leq r, s \leq k)$ gibt, so dass

- $\forall i \neq r: \quad U_i \subseteq V_s$ und
- $\forall j \neq s: \quad V_j \subseteq U_r$.

Kompatibilität zirkulärer Partitionen

Beispiel:



$$P = \{\{a_1\}, \ldots, \{a_{r-1}\}, \{a_r, b_1, \ldots b_l\}, \{a_{r+1}\}, \ldots \{a_k\}\}$$

$$Q = \{\{b_1\}, \ldots, \{b_{s-1}\}, \{b_s, a_1, \ldots a_k\}, \{b_{s+1}\}, \ldots \{b_l\}\}$$

Lemma

Alle verschiedenen zirkulären Partitionen sind paarweise kompatibel.

Kompatibilität zirkulärer Partitionen

Beweis.

- Betrachte zwei zirkuläre Partitionen P und Q in $G = (V, E)$.
- Alle Mengen der Partitionen sind Minimum Cuts.
- Behauptung: Jede Menge von P oder ihr Komplement ist in einer Menge von Q enthalten.
- Annahme: eine Menge $S \in P$ ist die Vereinigung von mindestens zwei, aber nicht von allen Mengen von Q.
- Genau zwei Mengen $A, B \in Q$, die in S enthalten sind, sind durch mindestens eine Kante zu den Knoten in $V \setminus S$ verbunden.
- Außerdem müssen die Mengen aus Q, die zusammen S bilden, in Q konsekutiv sein, sonst hätte der Cut zum Rest eine Kapazität $> \lambda$.

Kompatibilität zirkulärer Partitionen

Beweis.

- Sei T die Menge, die man durch Ersetzen von $A \subset S$ durch das Element von Q erhält, das zu B verbunden, aber nicht in S enthalten ist.
- T ist ein Minimum Cut (die Kanten zwischen A und $S \setminus A$ haben Kapazität $\lambda/2$, gleiches gilt für die Anbindung der neuen Menge aus Q an den Rest von Q in der anderen Richtung)

$\Rightarrow$ Dann ist $\langle S, T \rangle$ ein Crossing Cut.

$\Rightarrow$ P und Q erfüllen nicht mehr die zweite Bedingung in der Definition zirkulärer Partionen.
(Widerspruch)

$\Rightarrow$ Jede Menge von P oder ihr Komplement ist in einer Menge von Q enthalten.

Kompatibilität zirkulärer Partitionen

Beweis.

- Annahme: zwei Mengen von P sind in zwei verschiedenen Mengen von Q enthalten.
- Komplement jeder übrigen Menge von P enthält beide Mengen und kann deshalb nicht in einer einzelnen Menge von Q enthalten sein.

$\Rightarrow$ Jede übrige Menge von P ist Teilmenge einer Menge von Q.

- Gleiches gilt umgekehrt für die übrigen Mengen von Q.

$\Rightarrow$ $P = Q$ (Widerspruch)

Kompatibilität zirkulärer Partitionen

Beweis.

- Annahme: alle Mengen von P sind in einer Menge Y von Q

$\Rightarrow$ $Y = V$ (Widerspruch)

$\Rightarrow$ Es gibt mindestens eine Menge X in P, deren Komplement $\bar{X}$ eine Teilmenge einer Menge Y aus Q ist.

- Da die Vereinigung von zwei Komplementen von Mengen aus P gleich V ist und Q mindestens drei Mengen enthält, kann nur genau ein Komplement einer Menge aus P in einer Menge von Q enthalten sein.
- Alle anderen Mengen aus P sind Teilmengen von $\bar{X}$ und damit auch in Menge Y aus Q enthalten.
- Y ist nicht Teilmenge einer Menge aus P.

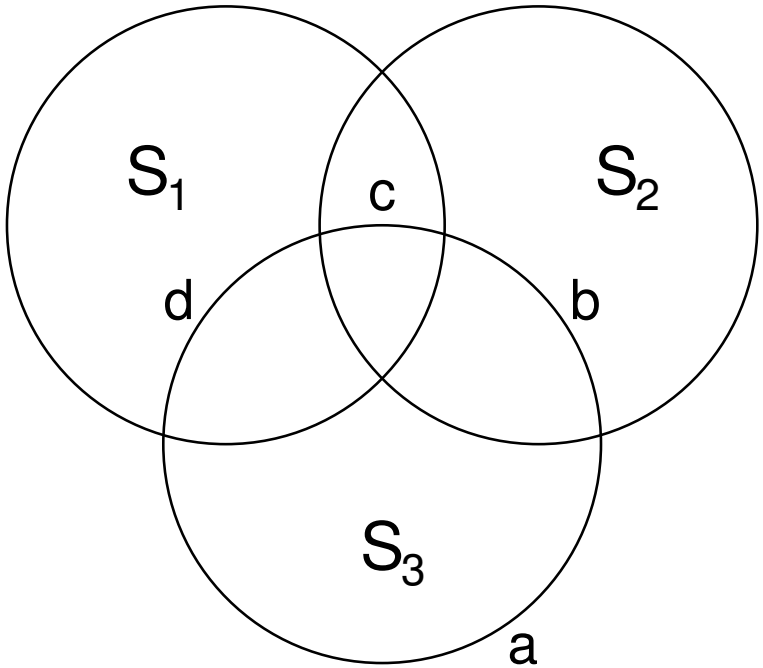
$\Rightarrow$ $\bar{Y} \subset X$ und alle anderen Mengen aus Q sind auch Teilmengen von X.

Paarweise Disjunktheit von Crossing Cuts

Lemma

Wenn S_1, S_2 und S_3 paarweise Crossing Cuts sind, dann gilt:

$$S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \emptyset$$



Paarweise Disjunktheit von Crossing Cuts

Beweis.

- Annahme: Lemma falsch, also Schnittmenge nicht leer
- Definiere
  - $b = w\left((S_2 \cap S_3) \setminus S_1, S_2 \setminus (S_1 \cup S_3)\right)$
  - $c = w\left(S_1 \cap S_2 \cap S_3, (S_1 \cap S_2) \setminus S_3\right)$
  - $d = w\left((S_1 \cap S_3) \setminus S_2, S_1 \setminus (S_2 \cup S_3)\right)$
- Einerseits ist $S_1 \cap S_2$ ein Minimum Cut. $\Rightarrow \quad c \geq \frac{\lambda}{2}$
- Andererseits ist $c + b = c + d = \frac{\lambda}{2}$.

$\Rightarrow$ $b = d = 0$ und $(S_1 \cap S_3) \setminus S_2 = (S_2 \cap S_3) \setminus S_1 = \emptyset$

- Da es keine diagonalen Kanten im Crossing Cut $\langle S_1, S_2 \rangle$ gibt (siehe früheres Lemma), sind $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ und $S_3 \setminus (S_1 \cup S_2)$ nicht verbunden. (Widerspruch weil aufgrund der Crossing Cuts $\langle S_1, S_3 \rangle$ und $\langle S_2, S_3 \rangle$ der Schnittwert $\lambda/2$ sein müsste)

Weitere Sätze

Satz

In einem Graphen $G = (V, E)$ gibt es für jede einem Crossing Cut entsprechende Partition P von V in 4 disjunkte Mengen eine zirkuläre Partition in G, die eine Verfeinerung von P ist.

Satz

Ein Graph $G = (V, E)$ hat $\mathcal{O}\left(\binom{|V|}{2}\right)$ viele Minimum Cuts (und diese Schranke ist scharf).

Kaktus-Vorbereitung: Laminare Mengen

Definition

Eine Menge $\mathcal{S}$ von Mengen heißt laminar, wenn für jedes Paar von Mengen $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ gilt, dass entweder S_1 und S_2 disjunkt sind, oder eine der beiden Menge die andere enthält.

- Jede laminare Menge $\mathcal{S}$ kann als Baum repräsentiert werden.
- Jeder Knoten repräsentiert eine Menge in $\mathcal{S}$.
- Die Blätter des Baums repräsentieren die Mengen von $\mathcal{S}$, die keine anderen Mengen enthalten.
- Der Vater eines zur Menge T gehörigen Knotens repräsentiert die (eindeutige) kleinste Übermenge von T.
- Die Konstruktion liefert eine Menge von Bäumen, deren Wurzelknoten Mengen repräsentieren, die in keiner anderen Menge von $\mathcal{S}$ enthalten sind.

Kaktus-Vorbereitung: Laminare Mengen

- Hinzufügen eines künstlichen Wurzelknotens, der mit allen eigentlichen Wurzeln verbunden ist, liefert einen Baum.

$\Rightarrow$ Die Knoten eines Baums repräsentieren alle Mengen von $\mathcal{S}$, wobei die Wurzel die zugrundeliegende Gesamtmenge (Vereinigung aller Mengen) repräsentiert.

- Wenn diese Vereinigung n Elemente enthält, kann der Baum höchstens n Blätter bzw. $2n - 1$ Knoten haben.

Kaktus

Definition

Ein zusammenhängender Graph heißt Kaktus, falls jedes Paar von einfachen Kreisen höchstens einen Knoten gemeinsam hat.
Ein Graph bestehend aus einem einzelnen Knoten wird als *trivialer Kaktus* bezeichnet.

Ein Graph ist ein Kaktus genau dann, wenn jede Zweifachzusammenhangskomponente entweder ein einfacher Kreis oder eine einzelne Kante (Brücke) ist.

Hinweis: Oft wird in der Definition auch einfach verlangt, dass jede Kante zu genau einem (knoten-disjunkten) Kreis gehört, wobei eine Doppelkante zwischen zwei Knoten einen Kreis der Länge 2 darstellt.
Man kann einen Kaktus nach dieser Definition erhalten, indem man die Brücken durch Doppelkanten ersetzt.

Kaktus-Repräsentation von Minimum Cuts

- Betrachte
  - einen Graph G,
  - einen ungewichteten Kaktus $\mathcal{R}$ und
  - eine Abbildung φ der Graphknoten in die Menge der Kaktusknoten $\varphi: V(G) \to V(\mathcal{R})$.

- Die Menge $V(\mathcal{R})$ kann einen Knoten x enthalten, der nicht in der Bildmenge der Abbildung φ enthalten ist, für den also $V(G)$ keinen Knoten v mit $\varphi(v) = x$ enthält.
  Ein solcher Knoten wird *leerer Knoten* genannt.

- Für jeden nichttrivialen (ungewichteten) Kaktus $\mathcal{R}$ gilt $\lambda(\mathcal{R}) \leq 2$ bzw. $\lambda(\mathcal{R}) = 2$ (je nach Definition).

Kaktus-Repräsentation von Minimum Cuts

Sei $\mathcal{C}(\mathcal{R})$ die Menge aller Minimum Cuts vom Kaktus $\mathcal{R}$.
D.h. $\{S, V(\mathcal{R}) \setminus S\} \in \mathcal{C}(\mathcal{R})$ gilt genau dann, wenn $E(S, V(\mathcal{R}) \setminus S; R)$ eine Menge von zwei Kanten ist, die zum gleichen Kreis in $\mathcal{R}$ gehören.

Definition

Für eine gegebene Teilmenge $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}(G)$ von Minimum Cuts, nennt man ein Paar $(\mathcal{R}, \varphi)$, das aus einem Kaktus $\mathcal{R}$ und einer Knotenabbildung φ besteht, Kaktus-Repräsentation für $\mathcal{C}'$ falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Für einen beliebigen Kaktus-MinCut $\{S, V(\mathcal{R}) \setminus S\} \in \mathcal{C}(\mathcal{R})$ gehört der Cut $\{X, \bar{X}\}$ mit $X = \{u \in V(G) \mid \varphi(u) \in S\}$ und $\bar{X} = \{u \in V(G) \mid \varphi(u) \in V(\mathcal{R}) \setminus S\}$ zu $\mathcal{C}'$.
2. Für jeden MinCut $\{X, \bar{X}\} \in \mathcal{C}'$ existiert ein Kaktus-MinCut $\{S, V(\mathcal{R}) \setminus S\} \in \mathcal{C}(\mathcal{R})$ mit $X = \{u \in V(G) \mid \varphi(u) \in S\}$ und $\bar{X} = \{u \in V(G) \mid \varphi(u) \in V(\mathcal{R}) \setminus S\}$.

Kaktus-Repräsentation aller Minimum Cuts

Fallunterscheidung:

1. Graph ohne zirkuläre Partitionen
2. Graph mit genau einer zirkulären Partition
3. Graph mit mehreren zirkulären Partitionen $P_1, \ldots, P_z$

Kaktus-Repräsentation aller Minimum Cuts

1. Fall: Graph ohne zirkuläre Partitionen
   - Wenn es Crossing (Minimum) Cuts geben würde, müsste es laut Lemma auch eine zirkuläre Partition geben, die eine Verfeinerung der 4 entsprechenden disjunkten Mengen ist.

   $\Rightarrow$ Es kann in diesem Fall keine Crossing Cuts geben.

   $\Rightarrow$ Die Minimum Cuts (repräsentiert durch die jeweils kleinere Knotenmenge) sind laminar.

   $\Rightarrow$ Die Minimum Cuts können durch einen Baum T_G repräsentiert werden.

Kaktus-Repräsentation aller Minimum Cuts

(Fortsetzung 1. Fall: Graph ohne zirkuläre Partitionen)
Repräsentation der Minimum Cuts durch folgenden Baum T_G:

- Betrachte die jeweils kleinere Knotenmenge jedes Minimum Cuts und bezeichne die Menge dieser Knotenmengen mit Λ
  (wähle bei gleicher Kardinalität irgendeine von beiden).
- Repräsentiere jede Menge von Λ durch einen Knoten in T_G.
- Zwei Baumknoten, die zu den MinCut-Mengen A und B im Graphen gehören, sollen genau dann verbunden sein, wenn $A \subset B$ gilt und es keinen MinCut C mit $A \subset C \subset B$ gibt (der echte Obermenge von A und echte Teilmenge von B ist).
- Die Wurzeln der resultierenden Bäume repräsentieren die MinCuts in Λ, die in keiner anderen MinCut-Menge von Λ enthalten sind.
- Hinzufügen eines künstlichen Wurzelknotens und Verbinden mit den Wurzeln aller Bäume resultiert in einem Baum (T_G).

Kaktus-Repräsentation aller Minimum Cuts

(Fortsetzung 1. Fall: Graph ohne zirkuläre Partitionen)

- Definiere Abbildung:
  - Jeder Knoten des Graphen G wird auf den Knoten des Baums T_G abgebildet, der zu dem MinCut mit kleinster Kardinalität gehört, der diesen Knoten enthält.
  - Jeder nicht zugeordnete Knoten wird der Wurzel zugeordnet.
- Für jeden Minimum Cut S von G werden die Knoten von S einer Menge X von Baumknoten zugeordnet, so dass es eine Kante gibt, die beim Entfernen die Baumknoten X vom Rest des Baums trennt.
- Andererseits zerfällt beim Entfernen einer Kante aus T_G die Menge der Baumknoten so in zwei Teile, dass die Menge der Knoten, die in dem einen Teil zugeordnet werden, die eine Seite eines Minimum Cuts bilden.

$\Rightarrow$ Wenn der Graph keine zirkulären Partitionen enthält, dann ist der Baum T_G der Kaktus C_G des Graphen G und die Anzahl seiner Knoten ist durch $2|V| - 1$ beschränkt.

Kaktus-Repräsentation aller Minimum Cuts

2. Fall: Graph mit genau einer zirkulären Partition $V_1, \ldots, V_k$.

- Die Circular Partition Cuts können durch einen Kreis mit k Knoten repräsentiert werden.
- Die Knoten jedes Partitionsteils V_i $(1 \leq i \leq k)$ werden so durch einen Knoten N_i des Kreises repräsentiert, dass zwei Teile V_i und V_{i+1} durch zwei adjazente Knoten repräsentiert werden.
- Bemerkung: Für jeden Minimum Cut S, der kein Circular Partition Cut ist, ist entweder S oder $\bar{S}$ eine echte Teilmenge eines Teils V_i (folgt direkt aus der Definition).

Kaktus-Repräsentation aller Minimum Cuts

(Fortsetzung 2. Fall: Graph mit genau einer zirkulären Partition)

- Man kann den Baum $T_{(V_i,E)}$ für alle Minimum Cuts konstruieren, die Teilmenge von V_i sind, aber mit der Beschränkung, dass nur die Knoten von V_i diesem Baum zugeordnet werden.
- Die Wurzel von $T_{(V_i,E)}$ entspricht genau der Menge V_i.

$\Rightarrow$ Knoten N_i des Kreises kann mit der Wurzel von $T_{(V_i,E)}$ verschmolzen werden $(\forall i : 1 \leq i \leq k)$.

- Dieser mit allen Bäumen verbundene Kreis ist der Kaktus C_G für G.
- Anzahl Knoten: Summe der Anzahl der Knoten aller Bäume

$\Rightarrow$ wieder beschränkt durch $2|V| - 1$ und wieder Korrespondenz zwischen Minimum Cuts in G und Separation in C_G.

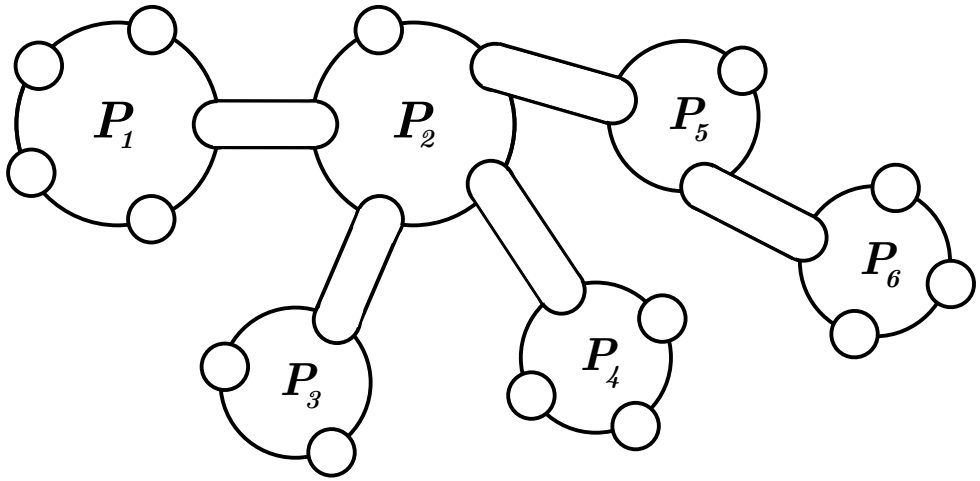
Kaktus-Repräsentation aller Minimum Cuts

3. Fall: Graph mit zirkulären Partitionen $P_1, \ldots, P_z$
   - Betrachte alle zirkulären Partitionen als Menge von Mengen
   - Konstruiere den Kaktus, der die Circular Partition Cuts repräsentiert:
   - Jede zirkuläre Partition wird durch einen Kreis repräsentiert.
   - Die Knoten des Kreises entsprechen dabei den jeweiligen disjunkten Mengen.
   - Berührungspunkte ergeben sich entsprechend der Definition der Kompatibilität zirkulärer Partitionen.
   - Es entsteht eine baumartige Struktur aus verbundenen Kreisen.

Kaktus-Repräsentation aller Minimum Cuts

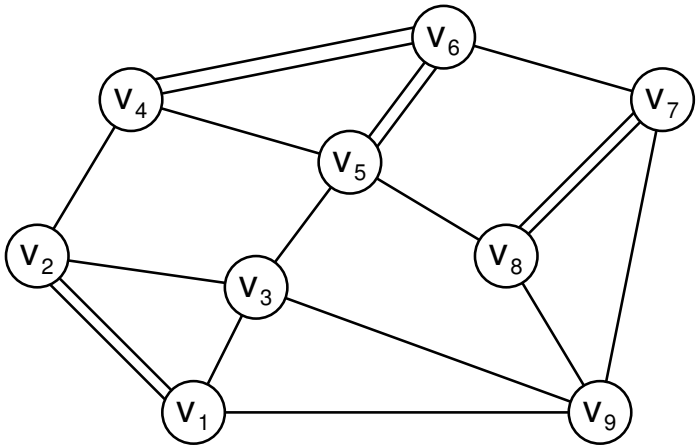
(Fortsetzung 3. Fall: Graph mit zirkulären Partitionen $P_1, \ldots, P_z$)

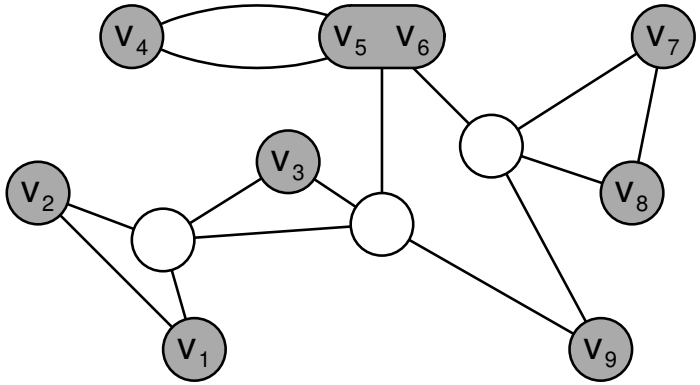
- Bsp.: Kaktus für die Circular Partition Cuts von 6 Circular Partitions



- Repräsentiere die Minimum Cuts, die nicht Teil einer zirkulären Partition sind (analog zum 2. Fall)
- Man erhält den Kaktus T_C von G.
- Die Anzahl Knoten ist wieder beschränkt durch $2|V| - 1$

Beispiel für Kaktus-Repräsentation





Cycle-type normal cactus representations

Definition

In einem Kaktus $\mathcal{R}$ nennen wir einen Kreis mit h Knoten einen h-Kreis.

Einen Knoten, der zu genau k Kreisen gehört, nennt man k-Verzweigungsknoten.

Eine Kaktus-Repräsentation heißt *normal*, wenn sie keinen leeren 2-Verzweigungsknoten enthält, der zu einem 2-Kreis gehört.

Eine Kaktus-Repräsentation heißt *cycle-type*, wenn sie keine leere 3-Verzweigung enthält.

Eine *cycle-type normal cactus representation* nennt man auch kurz CNCR.

CNCRs

Lemma (Nagamochi/Kameda)

Angenommen es gibt für eine Teilmenge $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}(G)$ der MinCuts eines Graphen G eine Kaktus-Repräsentation $(\mathcal{R}, \varphi)$. Dann gilt:

- *Es gibt eine CNCR für $\mathcal{C}'$.*
- *Die CNCR für $\mathcal{C}'$ ist eindeutig.*
- *Jede CNCR für $\mathcal{C}'$ hat höchstens $|V(G)|$ leere Knoten.*
- *$(\mathcal{R}, \varphi)$ kann in eine CNCR für $\mathcal{C}'$ konvertiert werden in Zeit und Platz linear in der Größe von $(\mathcal{R}, \varphi)$.*

Eigenschaften von Kaktus-Repräsentationen

- Angenommen wir haben zwei Kaktus-Repräsentationen $(\mathcal{R}_1, \varphi_1)$ und $(\mathcal{R}_2, \varphi_2)$ für Teilmengen $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ von $\mathcal{C}(G)$.
- Nagamochi/Kameda haben gezeigt, dass es bei Existenz von Knoten $z_1 \in V(\mathcal{R}_1)$ und $z_2 \in V(\mathcal{R}_2)$ mit

$$\varphi_1^{-1}(z_1) \cup \varphi_2^{-1}(z_2) = V(G)$$

eine Kaktus-Repräsentation $(\mathcal{R}, \varphi)$ für $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ gibt, wo man $\mathcal{R}$ durch Identifikation von Knoten z_1 mit Knoten z_2 (zum neuen Knoten z) erhält und die
Abbildung φ : $V(G) \to V(\mathcal{R}_1) \cup V(\mathcal{R}_2) \cup \{z\} \setminus \{z_1, z_2\}$ wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(z) &= \varphi_1^{-1}(z_1) \cap \varphi_2^{-1}(z_2) \\
\varphi^{-1}(x_1) &= \varphi_1^{-1}(x_1) \text{ für alle Knoten } x_1 \in V(\mathcal{R}_1) \setminus z_1 \\
\varphi^{-1}(x_2) &= \varphi_2^{-1}(x_2) \text{ für alle Knoten } x_2 \in V(\mathcal{R}_2) \setminus z_2
\end{aligned}$$

Eigenschaften von Kaktus-Repräsentationen

- Die so definierte Repräsentation bezeichnen wir mit $(\mathcal{R}_1, \varphi_1) \oplus (\mathcal{R}_2, \varphi_2) = (\mathcal{R}, \varphi)$ und die entsprechenden Knoten z_1, z_2 heißen verbundene Knoten.
- Der neue Knoten z ist immer ein Artikulationsknoten in $\mathcal{R}$.
  Er ist genau dann leer in $(\mathcal{R}, \varphi)$, wenn $\varphi_1^{-1}(z_1) \cap \varphi_2^{-1}(z_2) = \emptyset$ gilt.

Kritische Kanten und (s,t)-MC-Partition

Eine Kante $e = (s,t)$ heißt *kritisch*, falls $c_G(e) > 0$ und $\lambda_G(s,t) = \lambda_G$.

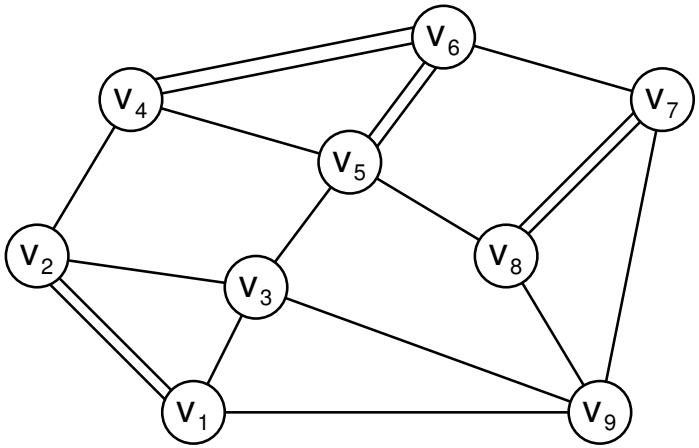
Lemma (Karzanov/Timofeev)

Für jede kritische Kante $e = (s,t)$ sind beliebige MinCuts, die s und t separieren, keine Crossing Cuts.
D.h. es gibt eine geordnete Partition $(V_1, \ldots, V_2)$ von $V(G)$, so dass die Menge der Cuts der Form $\{V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_i, V_{i+1} \cup \ldots \cup V_r\}$ gleich der Menge der MinCuts in $\mathcal{C}(G)$ ist, die s und t separieren.

Solch eine geordnete Partition nennt man (s,t) minimum cut o-partition oder kurz (s,t)-MC-Partition.

Beispiel für (s, t)-MC-Partition

Beispiel:



Die (s, t)-MC-Partition für $(s, t) = (v_1, v_9)$ ist $\{V_1 = \{v_1\}, V_2 = \{v_2\}, V_3 = \{v_3\}, V_4 = \{v_4, v_5, v_6\}, V_5 = \{v_7, v_8\}, V_6 = \{v_9\}$.

Berechnung der (s, t)-MC-Partition

Lemma

Sei (s, t) eine kritische Kante in einem Graphen.
Wenn ein beliebiger Maximum Flow zwischen s und t gegeben ist, kann die (s, t)-MC-Partition in Zeit und Platz $\mathcal{O}(m + n)$ berechnet werden.

(Beweis: Karzanov/Timofeev, Naor/Vazirani)

Mit Partition π kompatible und unteilbare Cuts

Sei π eine Partition $\{V_1, V_2, \ldots, V_r\}$ oder eine geordnete Partition $(V_1, V_2, \ldots, V_r)$ von $V(G)$.
Wir nennen einen Cut $\{X, \bar{X}\}$ kompatibel mit π, falls

$$X = \bigcup_{i \in I} V_i \text{ für ein } I \subset \{1, 2, \ldots, r\}$$

Wir nennen einen Cut $\{X, \bar{X}\}$ unteilbar mit π, falls

$$X \subset V_i \text{ für ein } i \in \{1, 2, \ldots, r\}$$

Ein Cut $\{X, \bar{X}\}$ kreuzt eine Partition $\{V_1, V_2, \ldots, V_r\}$ oder eine geordnete Partition $(V_1, V_2, \ldots, V_r)$, falls ein V_i existiert, so dass keine der Teilmengen $X \cap V_i$, $X \setminus V_i$ und $V_i \setminus X$ leer ist.
Jeder Cut, der π nicht kreuzt, ist entweder kompatibel oder unteilbar bezüglich π. Wir bezeichnen die entsprechenden Mengen von MinCuts mit $\mathcal{C}_{\text{comp}}(\pi)$ und $\mathcal{C}_{\text{indv}}(\pi)$

Mit Partition $\pi_{(s,t)}$ kompatible und unteilbare Cuts

Lemma

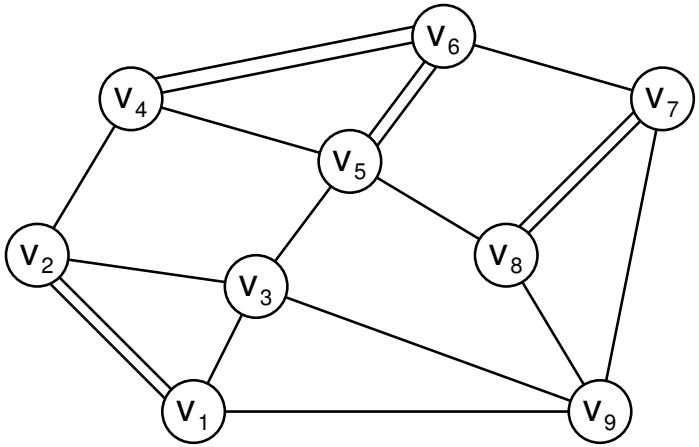
Sei (s,t) eine kritische Kante in einem Graph G und $\pi_{(s,t)}$ die (s,t)-MC-Partition über $\mathcal{C}(G)$. Dann ist jeder MinCut $\{X, \bar{X}\} \in \mathcal{C}(G)$ entweder kompatibel oder unteilbar bezüglich $\pi_{(s,t)}$, d.h. $\mathcal{C}(G) = \mathcal{C}_{comp}(\pi_{(s,t)}) \cup \mathcal{C}_{indv}(\pi_{(s,t)})$.

Man beachte, dass $\mathcal{C}_{\text{comp}}(\pi_{(s,t)})$ einen MinCut enthalten kann, der s und t nicht separiert.

Satz (Nagamochi/Kameda)

Sei (s,t) eine kritische Kante eines Graphen G und $\pi_{(s,t)}$ die (s,t)-MC-Partition.
Dann existiert eine Kaktus-Repräsentation $(\mathcal{R}_{(s,t)}, \varphi_{(s,t)})$ für alle MinCuts in $\mathcal{C}_{comp}(\pi_{(s,t)})$, die man (s,t)-Kaktus-Repräsentation nennt.
Weiterhin kann für gegebenes $\pi_{(s,t)}$ die cycle-type normal (s,t)-cactus representation ((s,t)-CNCR) in $\mathcal{O}(m+n)$ Zeit und Platz konstruiert werden.

Mit Partition $\pi_{(s,t)}$ kompatible und unteilbare Cuts



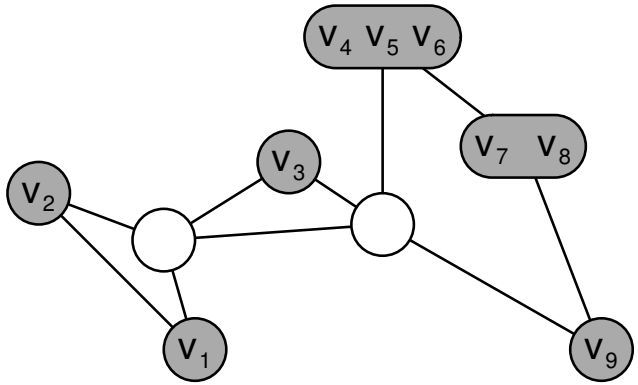


Abbildung: Cycle-type normal (s, t)-cactus representation mit $(s, t) = (v_1, v_9)$ über $\mathcal{C}(G)$

Berechnungsgrundlage

Grundlage für den NNI-Algorithmus:

Satz

In einem Graphen G kann man eine Kante $E = (s,t)$ mit $c_G(e) > 0$, die die folgenden zwei Bedingungen erfüllt, in Zeit $\mathcal{O}(m + n \log n)$ und Platz $\mathcal{O}(m+n)$ berechnen:

1. *$\lambda_G(s,t)$ kann in Zeit $\mathcal{O}(m + n \log n)$ und Platz $\mathcal{O}(m+n)$ berechnet werden.*
2. *Wenn $\lambda_G(s,t) = \lambda_G$, dann kann die (s,t)-CNCR in Zeit $\mathcal{O}(m + n \log n)$ und Platz $\mathcal{O}(m+n)$ berechnet werden.*

Maximum Adjacency Ordering

Definition

Eine totale Ordnung $v_1, v_2, \ldots, v_n$ aller Knoten in $V(G)$ bezeichnet man als Maximum Adjacency Ordering (MAO), falls für alle i, j mit $1 \leq i \leq j \leq n-1$ gilt:

$$w(\{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}\}, v_i) \geq w(\{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}\}, v_j)$$

Verbal: Die Anbindung des Knotens v_i an seine Vorgänger $v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}$ ist mindestens so groß wie die Anbindung jedes einzelnen nachfolgenden Knotens $v_{i+1}, \ldots, v_n$ an die Vorgänger von v_i.

Maximum Adjacency Ordering

Lemma

Ein MAO eines Graphen G kann in Zeit $\mathcal{O}(m + n \log n)$ und Platz $\mathcal{O}(m + n)$ berechnet werden.
Für ein MAO $v_1, v_2, \ldots, v_n$ in G gilt für die letzten beiden Knoten v_{n-1}, v_n, dass $\lambda_G(v_{n-1}, v_n) = w(\{v_n\}, V_G \setminus \{v_n\})$.

Beweis des letzten Satzes

Beweis.

- Berechne zuerst ein MAO $v_1, v_2, \ldots, v_n$ von G.
- Wähle den Knoten v_p mit höchstem Index p, so dass v_p und v_n durch eine Kante (mit pos. Gewicht) verbunden sind.
- Sei $s = v_n$ und $t = v_p$.
- Man beachte, dass $v_1, v_2, \ldots, v_p, v_n$ ein MAO in dem Graphen G' ist, der aus G entsteht, wenn man die Knoten $v_{p+1}, \ldots, v_{n-1}$ löscht.
- D.h. nach dem letzten Lemma gilt:
  $\lambda_G(s,t) \geq \lambda_{G'}(s,t) = w_{G'}(\{s\}, V(G') \setminus \{s\}) = w_G(\{s\}, V(G) \setminus \{s\})$
- Da $\lambda_G(s,t) \leq w_G(\{s\}, V(G) \setminus \{s\})$, folgt der 1. Teil des Satzes.

Beweis des letzten Satzes

Beweis.

- Annahme: $\lambda_G(s,t) = \lambda_G$ (wie im 2. Teil des Satzes)
- Ein Maximum Flow zwischen den letzten beiden Knoten eines MAO kann in $\mathcal{O}(m)$ Zeit und Platz berechnet werden (Arikati/Mehlhorn).

$\Rightarrow$ MaxFlow zwischen s und t kann in $\mathcal{O}(m)$ gefunden werden.

- Für kritische Kante (s,t) mit gegebenem MaxFlow zwischen s und t kann nach Lemma die (s,t)-MC-Partition in $\mathcal{O}(m+n)$ Zeit und Platz bestimmt werden.
- Nach vorhergehendem Satz existiert für die kritische Kante (s,t) und die (s,t)-MC-Partition $\pi_{(s,t)}$ eine Kaktus-Repräsentation für alle MinCuts in $\mathcal{C}_{\text{comp}}(\pi_{(s,t)})$, genannt (s,t)-Kaktus-Repräsentation, deren CNCR in $\mathcal{O}(m+n)$ Zeit und Platz konstruiert werden kann.
- Die cycle-type normal (s,t)-cactus representation kann in Zeit $\mathcal{O}(m)$ aus dem MaxFlow berechnet werden.

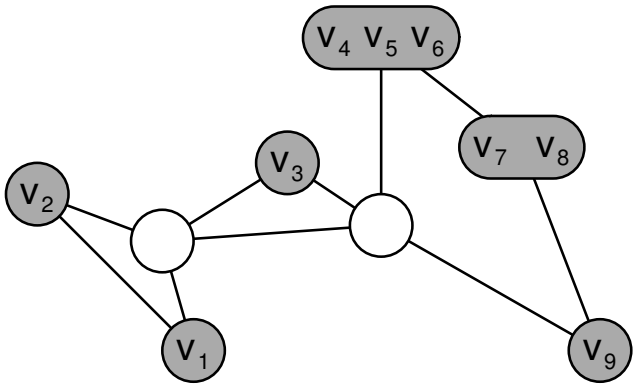
Berechnung der Kaktus-Repräsentation

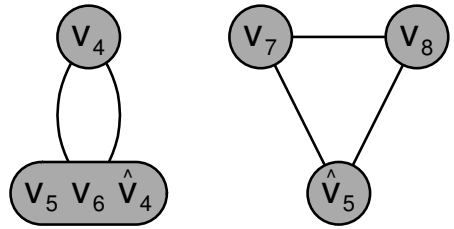
- Sei im folgenden G^* der Eingabe-Graph, für den eine Kaktus-Repräsentation berechnet werden soll.
- Die Konstruktion der Kaktus-Repräsentation von $\mathcal{C}(G^*)$ erfolgt rekursiv auf der Basis des letzten Satzes.
- G/X stellt den Graph dar, den man aus G erhält, wenn man alle Knoten in X zu einem einzigen Knoten kontrahiert.
- Sei $\lambda = \lambda(G^*)$.
- Wir wählen eine Kante (s, t) entsprechend dem letzten Satz.
- Falls $\lambda_G(s, t) > \lambda$, dann kontrahiere Knoten $\{s, t\}$ (kein MinCut in G separiert s und t).
- Falls $\lambda_G(s, t) = \lambda$, dann bestimme (s, t)-MC-Partition $\pi_{(s,t)} = (V_1, \ldots, V_r)$ und (s, t)-Kaktus-Repräsentation $(\mathcal{R}_{(s,t)}, \varphi_{(s,t)})$ in G.
- Nach Lemma sind alle mit $\pi_{(s,t)}$ kompatiblen MinCuts durch $(\mathcal{R}_{(s,t)}, \varphi_{(s,t)})$ repräsentiert und jeder mit $\pi_{(s,t)}$ unteilbare MinCut $\{X, V(G) \setminus X\}$ erfüllt $X \subset V_i$ für ein $V_i \in \pi_{(s,t)}$

Berechnung der Kaktus-Repräsentation

- Sei $G_i = G/(V(G) \setminus V_i)$ der Graph, bei dem die Knoten $V(G) \setminus V_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ zu einem Knoten $\hat{v}_i$ kontrahiert wurden, wobei gilt: $\lambda_{G_i} \geq \lambda_G$.
- Annahme: für jedes G_i wurde eine Kaktus-Repräsentation $(\mathcal{R}_i, \varphi_i)$ rekursiv berechnet, wobei $(\mathcal{R}_i, \varphi_i)$ der triviale Kaktus sein soll falls $\lambda_{G_i} > \lambda_G$.
- Dann sind alle MinCuts repräsentiert in $(\mathcal{R}_{(s,t)}, \varphi_{(s,t)})$, $(\mathcal{R}_1, \varphi_1), \ldots, (\mathcal{R}_r, \varphi_r)$.
- Weiterhin können diese Repräsentationen zu einer einzigen vereinigt werden, indem die Knoten, die $\hat{v}_i$ enthalten, als verbundene Knoten betrachtet werden.

Berechnung der Kaktus-Repräsentation





Kaktus-Repräsentationen $(\mathcal{R}_i, \varphi_i)$, wobei sich in den Fällen $i = \{1, 2, 3, 6\}$ der triviale Kaktus ergibt.
Auf dem Bild sieht man $(\mathcal{R}_4, \varphi_4)$ und $(\mathcal{R}_5, \varphi_5)$.

Berechnung der Kaktus-Repräsentation

- Wenn CACTUS(G', V^{old}) für einen Graph G' während der Ausführung von CACTUS(G'', V^{old}) für einen Graph G'' aufgerufen wird, nennen wir G' ein Kind von G'' und G'' den Vater von G'.
- Die Vater-Kind-Beziehung induziert einen Baum $\mathcal{T}$, der am Eingabe-Graph G^* gewurzelt ist (Aufrufbaum).
- Bemerkung: Falls $w(V_i, V(G) \setminus V_i) = \lambda$, dann bleibt der Cut $\{V_i, \hat{v}_i\}$ ein MinCut in einem Kind G_i, obwohl der Cut schon in seinem Vater G erkannt wurde.
- Derselbe MinCut kann in einem Nachfolger von G_i sein.
- Ein MinCut ist alt in einem Graph G' (also wurde schon in einem Vorfahren entdeckt), nur wenn ein einzelner Knoten v von $V(G') \setminus \{v\}$ separiert wird.
- D.h. wir können testen, ob die (s, t)-Kaktus-Repräsentation neue MinCuts enthält, indem wir die Knoten $v \in V(G')$ als 'alt' markieren, falls v ein kontrahierter Knoten $\hat{v}_i$ im Vorgänger ist.

NNI-Alg. für Kaktus-Repräsentation

Algorithmus 11 : CACTUS(G, V^{old})

Input : Graph G, Teilmenge $V^{\text{old}} \subset V(G)$

Output : Kaktus-Repr. $(\mathcal{R}, \varphi)$ für eine Menge $\mathcal{C}'$ von MinCuts, so dass

$$\mathcal{C}(G) \setminus \{\{\bar{v}, V(G) \setminus \{\bar{v}\}\} | \bar{v} \in V^{\text{old}}\} \subseteq \mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}(G)$$

if $|V(G)| = 1$ **then return** *Trivial-Kaktus* $(\mathcal{R}, \varphi)$;

else

- Wähle Kante $e = (s, t) \in E(G)$ mit $w_G(e) > 0$;
- **if** $\lambda_G(s, t) > \lambda$ *oder* (s, t)*-Kaktus Repr.* $(\mathcal{R}_{(s,t)}, \varphi_{(s,t)})$ *repräsentiert keinen anderen Cut außer die folgenden:* $\{\bar{v}, V(G) \setminus \{\bar{v}\}\}, \bar{v} \in V^{old}$ **then**
  - $G = G/\{s, t\}$; $V^{\text{old}} = V^{\text{old}} \setminus \{s, t\}$;
  - **return** $CACTUS(G, V^{old})$
- **else**
  - **foreach** V_i *in der* (s, t)*-MC-Partition* $\pi_{(s,t)} = (V_1, \ldots, V_r)$ **do**
    - $G_i = G/(V(G) \setminus V_i)$, wobei $\bar{v}_i$ den Knoten bezeichnet, der durch die Kontraktion von $V(G) \setminus V_i$ entsteht;
    - $V_i^{\text{old}} = (V^{\text{old}} \cap V_i) \cup \{\bar{v}_i\}$;
    - $(\mathcal{R}_i, \varphi_i) =$CACTUS$(G_i, V_i^{\text{old}})$
  - $(\mathcal{R}, \varphi) = (\mathcal{R}_{(s,t)}, \varphi_{(s,t)}) \oplus (\mathcal{R}_1, \varphi_1) \oplus \ldots \oplus (\mathcal{R}_r, \varphi_r)$.

NNI-Alg. für Kaktus-Repräsentation

Algorithmus 12 : CONSTRUCT

Input : Graph G^*
Output : CNCR $(\mathcal{R}, \varphi)$ für $\mathcal{C}(G)$

Compute $\lambda = \lambda(G)$;
$V^{\text{old}} = \emptyset$;
$(\mathcal{R}, \varphi) =$CACTUS(G^*, V^{old})

Satz

Der vorgestellte Algorithmus berechnet eine Kaktus-Repräsentation für alle Minimum Cuts in Zeit $\mathcal{O}(mn + n^2 \log n)$ *und Platz* $\mathcal{O}(m + n)$.

Berechnung eines globalen MinCuts

- 1994 Algorithmus publiziert von M. Stoer und F. Wagner
- benutzt keine MaxFlow-Technik
- sehr einfach
- arbeitet in $n-1$ Phasen
- Phase hat starke Ähnlichkeit zu den Algorithmen von Prim (minimale Spannbäume) bzw. Dijkstra (kürzeste Wege)
- Pro Phase Komplexität $\mathcal{O}(m + n \log n)$
- Gesamtkomplexität $\mathcal{O}(mn + n^2 \log n)$

Der Stoer/Wagner-Algorithmus

Algorithmus 13 : MinCut Berechnung nach Stoer & Wagner

Input : Ungerichteter Graph $G = (V, E)$
Output : Ein MinCut $C_{\min}$ entsprechend $\lambda(G)$

Wähle beliebigen Startknoten a;
$C_{\min} \leftarrow$ undefiniert; $V' \leftarrow V$;
while $|V'| > 1$ **do**
  $A \leftarrow \{a\}$;
  while $A \neq V'$ **do**
    Füge zu A den am meisten angebundenen Knoten hinzu;
    Aktualisiere die Kapazitäten zwischen A und den Knoten in $V' \setminus A$;
  $C :=$ Schnitt von V', der den zuletzt zu A hinzugefügten Knoten vom Rest des Graphen trennt;
  if $C_{\min} = \text{undefiniert}$ *or* $w(C) < w(C_{\min})$ **then**
    $C_{\min} \leftarrow C$;
  Verschmelze die zwei Knoten, die zuletzt zu A hinzugefügt wurden;
return $C_{\min}$;

Beschreibung des Stoer/Wagner-Algorithmus

- Wahl eines beliebigen Startknotens a

- Algorithmus verwaltet in jeder Phase eine Knotenteilmenge A
  - initialisiert mit a,
  - wird immer wieder um einen Knoten erweitert,
  - und zwar um einen, der gerade maximale Anbindung (Summe der Kantenkapazitäten) an die aktuellen Knoten in A hat.

$\Rightarrow$ Maximum Adjacency Ordering (MAO)

- Nach Einfügen aller Knoten in A:
  Cut, der nur den zuletzt hinzugefügten Knoten t vom Rest abtrennt, heißt 'Cut of the Phase'.

Beschreibung des Stoer/Wagner-Algorithmus

- Nach jeder Phase kommt der 'Cut of the Phase' als globaler MinCut in Frage.
- Verschmelzung der beiden zuletzt behandelten Knoten s, t:
  - Wenn zwischen s und t eine Kante existiert, wird sie einfach gelöscht.
  - Alte Kanten von einem anderen Knoten $\{x, s\}$ und $\{x, t\}$ werden durch eine neue Kante mit der Summe der alten Gewichte $w(s, x) + w(t, x)$ ersetzt.
- Dann: erneute MAO-Phase mit verschmolzenen Knoten ...

- 'Cut of the Phase' mit kleinster Kapazitätssumme ist globaler MinCut

Korrektheit des Stoer/Wagner-Algorithmus

Lemma

Der 'Cut of the Phase' ist ein Minimum (s,t)-Cut für die beiden zuletzt in A eingefügten Knoten s und t.

Korrektheit des Stoer/Wagner-Algorithmus

Beweis.

- Betrachte für die letzten zwei Knoten s und t einen beliebigen (also evt. auch Minimum) s-t-Cut C.
- Ein Knoten $v \neq a$ heißt aktiv, falls sich v und sein unmittelbarer Vorgänger bezüglich des Hinzufügens zu A auf entgegengesetzten Seiten von C befinden.
- Für einen Knoten v sei
  A_v: die Menge von Knoten, die in A sind bevor v hinzugefügt wird,
  C_v: der durch C in $A_v \cup \{v\}$ induzierte Cut.
- Sei $w(S, v)$ für eine Knoten(teil)menge S die Kapazitätssumme aller Kanten zwischen v und den Knoten in S.

Korrektheit des Stoer/Wagner-Algorithmus

Beweis.

- Beweisidee: (Induktion über die aktiven Knoten)

  Für jeden aktiven Knoten v gilt:
  Die Anbindung (Adjazenz) zu den Knoten, die zuvor eingefügt wurden (also A_v), überschreitet nicht das Gewicht des durch C in $A_v \cup \{v\}$ induzierten Cuts (also C_v).

- Also zu zeigen:

$$w(A_v, v) \leq w(C_v)$$

- Induktionsanfang: (1. aktiver Knoten)
  Im Basisfall ist die Ungleichung erfüllt, weil für den ersten aktiven Knoten die Werte auf beiden Seiten gleich sind.

Korrektheit des Stoer/Wagner-Algorithmus

Beweis.

- Induktionsvoraussetzung:
  Das Lemma stimmt für alle aktiven Knoten bis zum aktiven Knoten v.

$\Rightarrow$ Der Wert für den nächsten aktiven Knoten u ist

$$\begin{aligned} w(A_u, u) &= w(A_v, u) + w(A_u \setminus A_v, u) \\ &\leq w(A_v, v) + w(A_u \setminus A_v, u) \\ &\leq w(C_v) + w(A_u \setminus A_v, u) \qquad \text{(Ind.voraussetzung)} \\ &\leq w(C_u) \end{aligned}$$

- Die letzte Zeile folgt, weil alle Kanten zwischen $A_u \setminus A_v$ und u ihr Gewicht zu $w(C_u)$ beitragen, aber nicht zu $w(C_v)$.
- Da t durch den Cut C von seinem unmittelbaren Vorgänger s getrennt wird, ist t immer ein aktiver Knoten.
- Es folgt $w(A_t, t) \leq w(C_t)$ (mit $C_t = C$).

Korrektheit des Stoer/Wagner-Algorithmus

Satz

Ein 'Cut of the Phase' mit minimaler Kantenkapazität ist ein (globaler) MinCut des gegebenen Graphen.

Korrektheit des Stoer/Wagner-Algorithmus

Beweis.

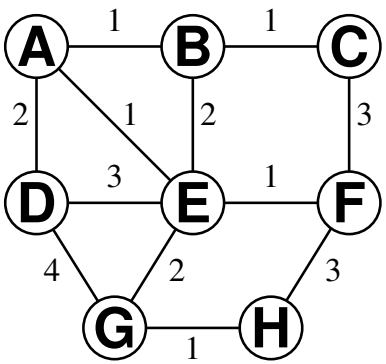
- Für $|V| = 2$ trivial: bei zwei Knoten existiert nur *ein* Cut.
- Für $|V| > 2$ Fallunterscheidung:
  Betrachte eine Phase mit letzten Knoten s und t
  1. Entweder der Graph hat einen MinCut, der gleichzeitig ein (lokaler) Minimum s-t-Cut ist.
     $\Rightarrow$ Cut of the Phase ist nach Lemma globaler MinCut des Graphen
  2. Andernfalls hat der Graph einen globalen MinCut, bei dem s und t nicht separiert werden (sich also auf der gleichen Seite befinden). Dann wird der globale MinCut durch das Verschmelzen von s und t nicht verändert.

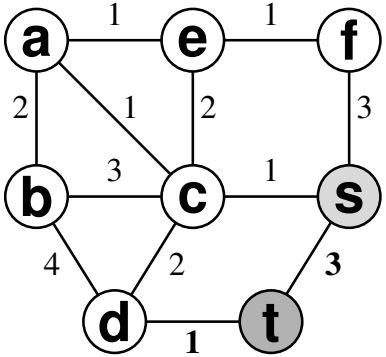
$\Rightarrow$ (Induktion über die Anzahl der Knoten)
'Cut of the Phase' mit minimaler Gewichtssumme ist globaler MinCut.

□

Beispiel für den Stoer/Wagner-Algorithmus

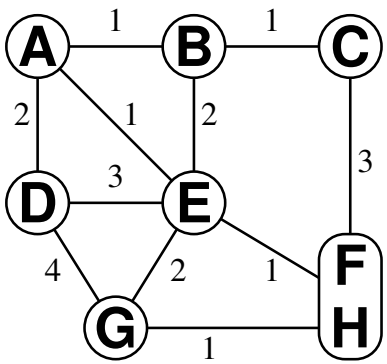
Phase 1

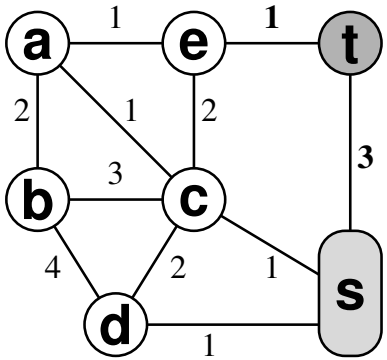




4

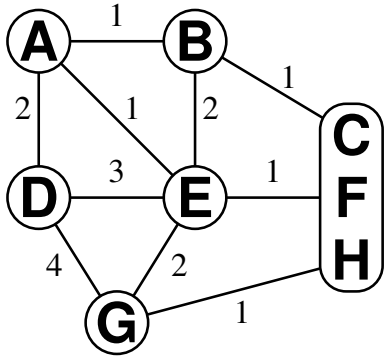
Phase 2

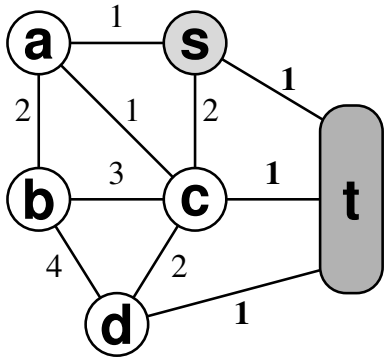




4

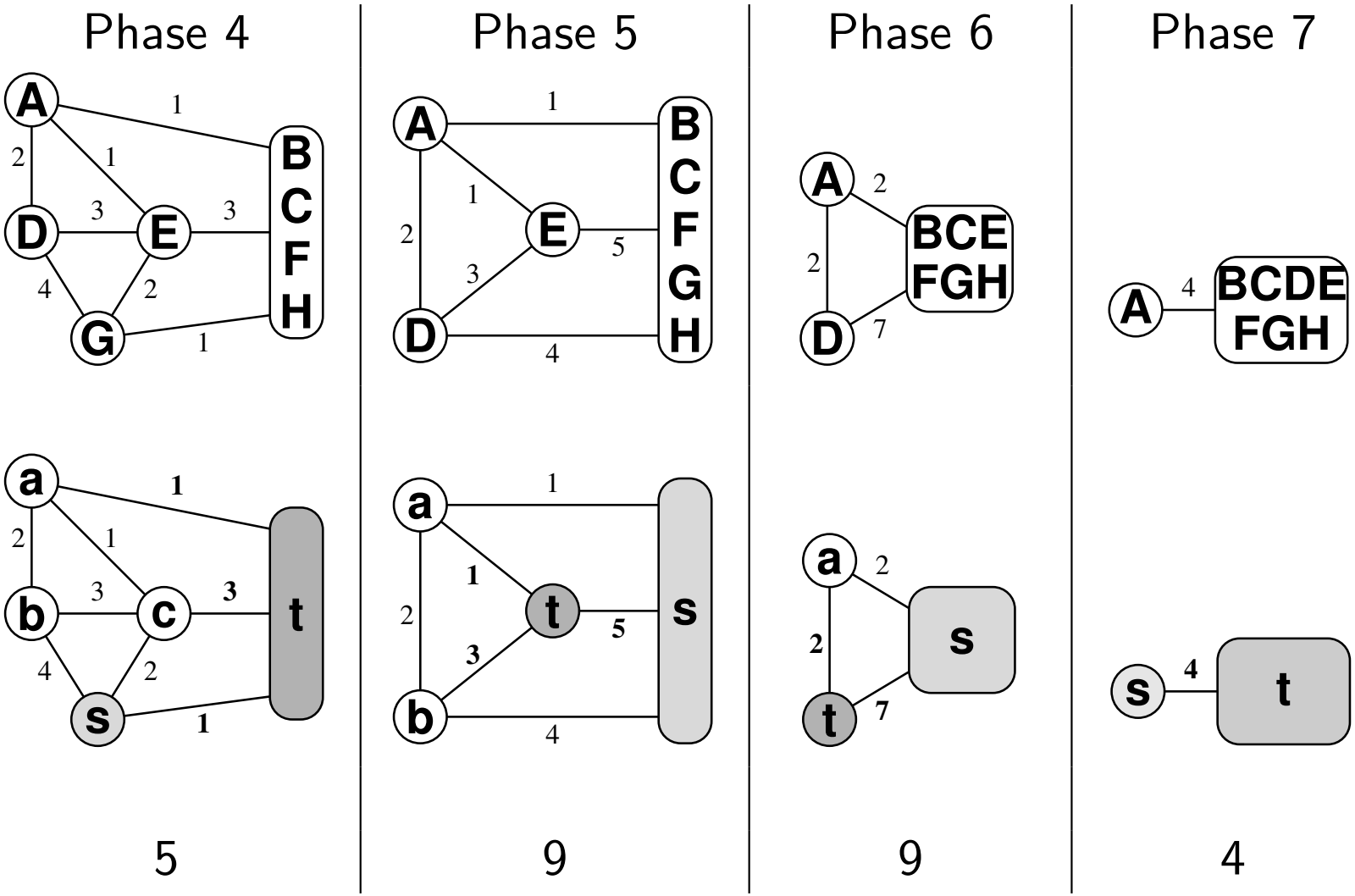
Phase 3





3

Beispiel für den Stoer/Wagner-Algorithmus



Komplexität des Stoer/Wagner-Algorithmus

- Adjazenzwerte für verbleibende Knoten ($V \setminus A$) eines MAOs können in einer Priority Queue (Maximum-Variante) gespeichert werden.
- Der nächste Knoten, der zu A hinzugefügt werden soll, wird per `deleteMax`-Operation bestimmt.
- Beim Hinzufügen eines Knotens zu A wird `increaseKey` für alle in $V \setminus A$ verbleibenden Nachbarn des Knotens aufgerufen.
- Bei Verwendung von Fibonacci-Heaps ergibt sich pro Phase (MAO) Komplexität $\mathcal{O}(m + n \log n)$
  (wie bei den Algorithmen von Prim bzw. Dijkstra)
- Gesamtkomplexität für $n - 1$ Phasen: $\mathcal{O}(mn + n^2 \log n)$

Randomisierter MinCut-Algorithmus von Karger

- Gesucht: globaler Minimum Cut in einem Multi-Graphen
- D. Karger (1992): Vorschlag eines sehr einfachen Algorithmus ohne augmentierende Pfade und Flussberechnungen
- Ansatz: randomisierter (Monte-Carlo-)Algorithmus, der
  - mit gewisser (Erfolgs-)Wahrscheinlichkeit den Minimum Cut liefert und
  - mit gewisser (Fehler-)Wahrscheinlichkeit einen beliebigen anderen Cut

Randomisierter MinCut-Algorithmus von Karger

- Algorithmus wählt beliebige Kante $e = \{u, v\}$ von G (gleichverteilt, d.h. jede Kante wird mit gleicher Wahrscheinlichkeit gezogen)
- gewählte Kante wird kontrahiert, d.h. Multi-Graph G' wird erzeugt, bei dem Knoten u und v zu einem neuen Knoten w verschmolzen sind
- Kanten zwischen u und v verschwinden.
- Andere Kanten bleiben erhalten. Wenn genau ein Endknoten entweder u oder v ist, dann endet dafür eine neue Kante am (Super-)Knoten w.
- Hinweis: auch wenn G keine Multikanten enthält, kann G' welche enthalten.
- Das Verfahren wird rekursiv auf G' angewendet.

Randomisierter MinCut-Algorithmus von Karger

- Der Algorithmus endet, wenn nur noch zwei (Super-)Knoten vorhanden sind.
- Jeder der beiden Knoten enthält eine gewisse Menge der Knoten des ursprünglichen Graphen.
- Diese Partition definiert einen Cut, der vom Algorithmus ausgegeben wird.

Randomisierter MinCut-Algorithmus von Karger

Satz

Der Monte-Carlo-Algorithmus von Karger gibt mit Wahrscheinlichkeit $\geq 1/\binom{n}{2}$ *den globalen Minimum Cut des Multigraphen zurück.*

- Nachdem es exponentiell viele Cuts in G gibt (und höchstens quadratisch viele MinCuts), würde man vermuten, dass die Wahrscheinlichkeit, den globalen MinCut zu finden, exponentiell klein ist.

$\Rightarrow$ Was also favorisiert die kleinen Cuts?

Randomisierter MinCut-Algorithmus: Analyse

Beweis.

- Betrachte globalen MinCut (A, B) in G.
- Sei die Schnitt-Kardinalität k, d.h. es gibt genau k Kanten ($F \subseteq E$), die einen Endpunkt in A und einen in B haben.
- gesucht: untere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass der Algorithmus (A, B) zurück gibt.
- Was kann dabei schiefgehen?
- Eine Kante aus F könnte kontrahiert werden.
- Dann würden zwei Knoten kontrahiert, die auf unterschiedlichen Seiten des Cuts (A, B) liegen.
- Der Algorithmus könnte nicht mehr (A, B) ausgeben.
- Wenn eine beliebige Kante aus $E \setminus F$ kontrahiert wird, besteht noch die Chance auf die Ausgabe (A, B).

Randomisierter MinCut-Algorithmus: Analyse

Beweis.

- also gesucht: obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kante aus F kontrahiert wird.
- Wir brauchen eine untere Schranke für die Kardinalität von E.
- Wenn der globale MinCut den Wert $\lambda(G) = k$ hat, gilt für den Minimalgrad des Graphen $\delta(G) \geq \lambda(G) = k$.
- Es gilt also $|E| = m \geq kn/2$.

$\Rightarrow$ Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kante aus F kontrahiert wird, ist

$$\frac{k}{m} \leq \frac{k}{kn/2} = \frac{2}{n}$$

- Betrachte jetzt die Situation nach j Iterationen.
- Es gibt $n - j$ (Super-)Knoten im aktuellen G'.

Randomisierter MinCut-Algorithmus: Analyse

Beweis.

- Annahme: es wurde noch keine Kante aus F kontrahiert.
- Da jeder Cut in G' auch ein Cut in G ist, sind zu jedem Superknoten in G' mindestens k Kanten inzident.
- D.h. G' hat mindestens $k(n-j)/2$ Kanten.

$\Rightarrow$ Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kante aus F in der nächsten Iteration $j+1$ kontrahiert wird, ist

$$\frac{k}{k(n-j)/2} = \frac{2}{n-j}$$

- Cut (A, B) wird ausgegeben, wenn in Iteration $1, \ldots, n-2$ keine Kante aus F kontrahiert wird.

Randomisierter MinCut-Algorithmus: Analyse

Beweis.

- Sei $\mathcal{E}_j$ das Ereignis, dass in Iteration j keine Kante aus F kontrahiert wird. Dann gilt also: $\Pr[\mathcal{E}_1] \geq 1 - 2/n$ und

$$\Pr[\mathcal{E}_{j+1} | \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{E}_j] \geq 1 - 2/(n-j)$$

- gesucht: untere Schranke für $\Pr[\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{E}_{n-2}]$ bzw. $\Pr[\mathcal{E}_1] \cdot \Pr[\mathcal{E}_2 | \mathcal{E}_1] \cdot \ldots \cdot \Pr[\mathcal{E}_{n-2} | \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{E}_{n-3}]$

$$\begin{aligned} &\geq \left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n-1}\right) \ldots \left(1 - \frac{2}{n-j}\right) \ldots \left(1 - \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{n-4}{n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{2 \cdot 1}{n(n-1)} = \binom{n}{2}^{-1} \end{aligned}$$

Randomisierter MinCut-Algorithmus: Analyse

- Wahrscheinlichkeit, dass der randomisierte MinCut-Algorithmus nicht den Cut (A, B) ausgibt, ist höchstens $1 - 1/\binom{n}{2}$
- Nach $\binom{n}{2}$ Läufen mit unabhängigen Zufallsentscheidungen ist die Wahrscheinlichkeit, dass nie der MinCut gefunden wurde, höchstens

$$\left(1 - 1/\binom{n}{2}\right)^{\binom{n}{2}} \leq \frac{1}{e}$$

- Wenn $c\binom{n}{2} \log n$ Läufe gestartet werden, sinkt die Fehlerwahrscheinlichkeit auf $\leq e^{-c \log n} = 1/n^c$.
- Laufzeit ist in dieser einfachen Form noch relativ hoch, verglichen mit dem besten deterministischen Algorithmus

Randomisierter MinCut-Algorithmus: Analyse

- Ansatz ist unbalanciert: Fehlerwahrscheinlichkeit erhöht sich zum Ende eines Laufs
- Wenn man den Algorithmus nur t Schritte laufen lässt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass keine Kante aus F kontrahiert wird $\Pr[\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{E}_t]$ bzw.
  $\Pr[\mathcal{E}_1] \cdot \Pr[\mathcal{E}_2|\mathcal{E}_1] \cdot \ldots \cdot \Pr[\mathcal{E}_t|\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{E}_{t-1}]$

$$
\begin{aligned}
&\geq \left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n-1}\right)\ldots\left(1-\frac{2}{n-(t-1)}\right)\\
&= \frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\frac{n-4}{n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{n-t}{n-t+2}\cdot\frac{n-t-1}{n-t+1}\\
&= \frac{(n-t)\cdot(n-t-1)}{n(n-1)} \in \Omega\left(\frac{(n-t)^2}{n^2}\right)
\end{aligned}
$$

Randomisierter MinCut-Algorithmus: Analyse

Verbesserte Variante:

- Lasse die einfache Variante mehrmals laufen
  z.B. 2-mal bis $\lceil n/\sqrt{2}+1 \rceil$ Knoten
  oder 4-mal bis $n/2$ Knoten
- Setze jeden der Läufe rekursiv mit der modifizierten Variante fort.
- Laufzeit: $\mathcal{O}(n^2 \log n)$ mit Erfolgswahrscheinlichkeit $\Omega(1/\log n)$
- $\mathcal{O}(\log n)$-malige Wiederholung des modifizierten Algorithmus sorgt für konstante Erfolgswahrscheinlichkeit.
- Um eine kleine Fehlerwahrscheinlichkeit ϵ zu erreichen, kann man $\mathcal{O}(\log n \log \epsilon^{-1})$ Wiederholungen durchführen, was zu einer Gesamtlaufzeit von $\mathcal{O}(n^2 \log^2 n \log \epsilon^{-1})$ führt.

All-Pairs MaxFlow / MinCut

- gegeben:
  Graph $G = (V, E)$ mit n Knoten,
  p ausgewählte Knoten
- gesucht:
  (lokale) MaxFlow/MinCut-Werte für alle Paare aus den p gegebenen Knoten

$\Rightarrow$ kann einfach durch Lösen von $\binom{p}{2} = \frac{1}{2}p(p-1)$ MaxFlow-Problemen berechnet werden.

- kann in ungerichteten Graphen aber auch mit nur $p-1$ MaxFlow-Berechnungen gelöst werden.

Equivalent Flow Trees

Sei G also ungerichtet und sei $v_{ij} = v_{ji}$ der Wert eines MaxFlows zwischen den Knoten i und j.

Lemma

1. *Für alle Knoten* $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$ *gilt:*

$$v_{ik} \geq \min\{v_{ij}, v_{jk}\}$$

2. *Es gibt einen Baum* T *auf den Knoten* 1 *bis* n*, so dass für alle Paare von Knoten* i, j *gilt:*

$$v_{ij} = \min\{v_{ij_1}, v_{j_1 j_2}, \ldots, v_{j_k j}\},$$

wobei $i - j_1 - \cdots - j_k - j$ *der (eindeutige) Pfad von Knoten* i *zu Knoten* j *in* T *ist.*

Equivalent Flow Trees

Beweis.

1. Sei $(X, \bar{X})$ ein i,k-MinCut, d.h. $v_{ik} = w(X, \bar{X})$.
   - Falls $j \in \bar{X}$, dann gilt $v_{ij} \leq w(X, \bar{X}) = v_{ik}$.
   - Falls $j \in X$, dann gilt $v_{jk} \leq w(X, \bar{X}) = v_{ik}$.
2. Betrachte K_n (vollständiger Graph mit n Knoten), wobei jede Kante (i,j) Gewicht v_{ij} hat.
   Sei T darin ein Spannbaum maximalen Gewichts.
   - Induktiv folgt aus dem vorangegangenen Punkt, dass für jedes Knotenpaar (i,j) gilt: $v_{ij} \geq \min\{v_{ij_1}, v_{j_1 j_2}, \ldots, v_{j_k j}\}$, wobei $i - j_1 - \cdots - j_k - j$ der (eindeutige) Pfad von Knoten i zu Knoten j in T ist.
   - Angenommen für ein Paar (i,j) gilt echte Ungleichheit.
     Dann gibt es eine Kante (i',j') auf dem Pfad zwischen i und j mit $v_{ij} > v_{i'j'}$.
     Das würde bedeuten, dass der Baum, der aus T durch Tausch von (i',j') gegen (i,j) entsteht, ein größeres Gewicht hätte. (Widerspruch)

Algorithmus von Gomory und Hu

- Die Existenz eines Equivalent Flow Trees hat natürlich gleichzeitig die Konsequenz, dass unter den $\binom{n}{2}$ MaxFlow- bzw. MinCut-Werten v_{ij} nur höchstens $n-1$ verschiedene Werte existieren können (nämlich die Kantengewichte von T).

- Außerdem kommt man so zu der Vermutung, dass $n-1$ MaxFlow-Berechnungen genügen, um einen solchen Equivalent Flow Tree T zu konstruieren und damit alle v_{ij}-Werte zu berechnen.
  Ein Algorithmus von Gomory und Hu erreicht dies tatsächlich.

Algorithmus von Gomory und Hu

- Gegeben zwei Knoten i, j und ein i, j-MinCut $(X, \bar{X})$.
- Definiere den kontrahierten Graph G^c als den Graph, den man aus G erhält, indem man die Knoten in $\bar{X}$ zu einem einzelnen (speziellen) Knoten $u_{\bar{X}}$ zusammenfasst und für jeden Knoten $v \in X$ alle über den Schnitt führenden Kanten durch eine einzelne Kante $\{v, u_{\bar{X}}\}$ mit der entsprechend summierten Gesamtkapazität ersetzt.

Lemma

Für jedes Paar von (normalen) Knoten i', j' in G^c (d.h. $i', j' \in X$) hat der MaxFlow bzw. MinCut zwischen i' und j' in G^c den gleichen Wert wie der MaxFlow/MinCut im Original-Graphen.
(Entsprechendes gilt natürlich für Knoten $i', j' \in \bar{X}$, wenn man X in G kontrahiert.)

Algorithmus von Gomory und Hu

Corollary

Für jedes Paar von Knoten $i', j' \in X$ (oder $\bar{X}$) gibt es einen Minimum i', j'-Cut, so dass sich alle Knoten von $\bar{X}$ (bzw. X) auf der gleichen Seite des Schnitts befinden.

- Für zwei Knoten i, j und einen i, j-MinCut $(X, \bar{X})$ repräsentiert man die aktuelle Situation durch einen Baum mit zwei Knoten (die für X und $\bar{X}$ stehen) und einer Kante mit dem Gewicht v_{ij}. Die Kante repräsentiert dabei den Schnitt $(X, \bar{X})$.
- Sei A die Menge der p zu betrachtenden Knoten, für die die MaxFlow/MinCut-Werte berechnet werden sollen.
- Die ersten beiden Knoten i und j werden aus A gewählt.

Algorithmus von Gomory und Hu

Definition

Ein Baum T wird als Semi-Cut Tree bezeichnet, falls er folgende Eigenschaften besitzt:

1. Jeder Knoten U von T entspricht einer Teilmenge der Knoten von G und enthält mindestens einen Knoten der Menge A.
2. Jede Kante (U, V) ist mit einem Label v versehen, so dass es Knoten $i, j \in A$ mit $i \in U$ und $j \in V$ gibt und der MaxFlow/MinCut zwischen i und j den Wert v hat.
3. Jede Kante (U, V) repräsentiert einen i, j-MinCut mit $i, j \in A$ und i ist in einem Knoten des Teilbaums auf der Seite von U enthalten und j ist in einem Knoten des Teilbaums auf der Seite von V enthalten (und die zwei Teile des Cut bestehen aus der jeweiligen Knotenmenge).

Wenn jeder Knoten eines Semi-Cut Trees T genau einen Knoten der Menge A enthält, dann bezeichnet man T als Cut Tree für A.

Algorithmus von Gomory und Hu

Satz

Sei T ein Cut Tree für A.
Dann gilt für jedes Paar $i, j \in A$: $v_{ij} = \min\{v_1, \ldots, v_{k+1}\}$, wobei v_1 bis v_{k+1} die Kantengewichte in T auf dem Pfad vom Knoten, der i enthält, zum Knoten, der j enthält, sind.

Beweis.

- Sei $i - j_1 - \ldots - j_k - j$ die Folge von A-Knoten, die dem Pfad in T vom Knoten mit i zum Knoten mit j entsprechen.
- Aufgrund der Eigenschaften des Cut Trees sind die Kantenlabels einfach $v_{ij_1}, \ldots, v_{j_kj}$.
- Aufgrund des Lemmas gilt: $v_{ij} \geq \min\{v_{ij_1}, \ldots, v_{j_kj}\}$.
- Andererseits entspricht jede Kante einem i, j-Schnitt, wobei die Kapazität dem Kantenlabel entspricht. Es gilt also: $v_{ij} \leq \min\{v_{ij_1}, \ldots, v_{j_kj}\}$ und damit $v_{ij} = \min\{v_{ij_1}, \ldots, v_{j_kj}\}$.

Algorithmus von Gomory und Hu

Satz

Ein Cut Tree für A existiert und kann mit Hilfe von nur $p-1$ MaxFlow-Berechnungen konstruiert werden.

Beweis.

- Angenommen, wir haben einen Semi-Cut Tree T für A und T hat noch einen Knoten U, der zwei Knoten $i, j \in A$ enthält.
- Aufgrund des Lemmas hat der MaxFlow zwischen i und j in G genau den gleichen Wert wie der MaxFlow zwischen i und j in dem (kontrahierten) Graph G^c, der entsteht, wenn man die Knotenmengen in jedem zu U verbundenen Teilbaum zu einem einzelnen (speziellen) Knoten kontrahiert und für jeden (Original-)Knoten $v \in U$ die Kanten, die in die jeweiligen Teilbäume führen, durch einzelne Kanten zu den entsprechenden neuen (speziellen) Knoten mit aufsummiertem Kantengewicht ersetzt.

Algorithmus von Gomory und Hu

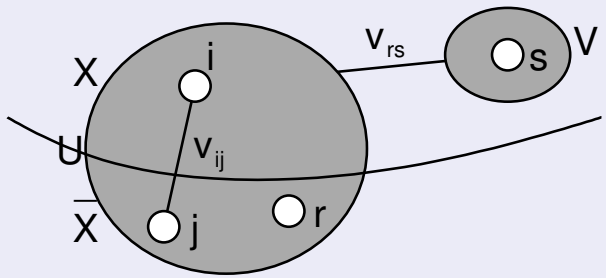
Beweis.

- Sei $(X, \bar{X})$ ein i,j-MinCut in G^c (notwendigerweise mit Kapazität v_{ij}).
- Konstruiere einen Baum T' wie folgt:
  - Spalte U in zwei Knoten X und $\bar{X}$.
  - Verbinde die Knoten X und $\bar{X}$ durch eine Kante mit Label v_{ij} und verbinde jeden Nachbarn V von U entweder zu X oder zu $\bar{X}$, in Abhängigkeit von der Seite des Cuts, auf der sich der zu V's Teilbaum gehörende spezielle Knoten in G^c befunden hat (mit Original-Kantenlabel).
- Die Behauptung ist nun, dass T' auch wieder ein Semi-Cut Tree für A ist.

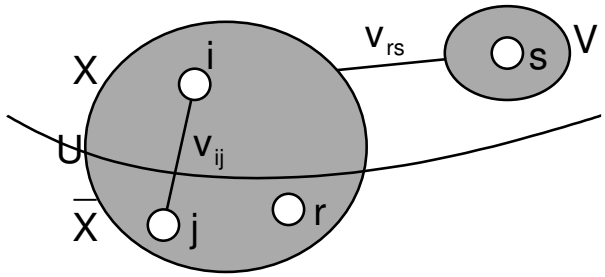
Algorithmus von Gomory und Hu

Beweis.

- Die einzige nicht-triviale zu überprüfende Eigenschaft ist der zweite Teil der Definition.
- Sei also V irgendein Nachbar von U in T und entspreche das Label der Kante (U, V) einem MaxFlow/MinCut-Wert zwischen $r \in U$ und $s \in V$ $(r, s \in A)$.
- Sei o.B.d.A. $j, r \in \bar{X}$, dann können folgende zwei Fälle auftreten:
  1. V wird mit $\bar{X}$ verbunden.
     Die Eigenschaften des Semi-Cut Trees bleiben erhalten.
  2. V wird mit X verbunden.



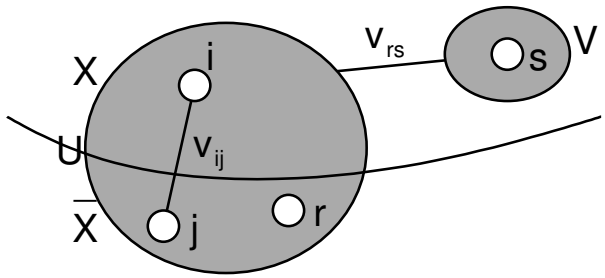
Algorithmus von Gomory und Hu



Beweis.

- Das Label v_{ij} für die Kante $\{X, \bar{X})$ entspricht der Definition.
- Betrachte nun das Label (v_{rs}) der Kante (X, V).
  Es wird gezeigt, dass $v_{is} = v_{rs}$:
  - $v_{is} \geq \min\{v_{ij}, v_{jr}, v_{rs}\}$ (Lemma).
  - Da i und s auf der gleichen Seite des Cuts sind, können die MaxFlow/MinCut-Werte zwischen Knoten in $\bar{X}$ nicht den Wert von v_{is} beeinflussen (v_{jr} ist also egal) und es gilt $v_{is} \geq \min\{v_{ij}, v_{rs}\}$.

Algorithmus von Gomory und Hu



Beweis.

- Andererseits muss v_{is} durch den zur Kante (U, V) in T gehörigen MinCut beschränkt sein, d.h. $v_{is} \leq v_{rs}$.
- $(X, \bar{X})$ hat den Wert v_{ij} und ist auch ein i-r-Cut, also $v_{ij} \geq v_{ir} \geq \min\{v_{is}, v_{rs}\}$
- $(X, \bar{X})$ ist auch ein r-s-Cut, also $v_{ij} \geq v_{rs}$
- Mit $v_{rs} \geq v_{is} \geq \min\{v_{ij}, v_{rs}\} = v_{rs}$ folgt daraus $v_{is} = v_{rs}$ und die Kante (X, V) entspricht dem MaxFlow zwischen i und s (mit Wert und Schnitt-Mengen wie im Original-Graph).

- Eine wiederholte Aufspaltung liefert den Cut Tree mit Hilfe von $p - 1$ MaxFlow-Berechnungen.

Unit Capacity Networks

Definition

- Ein Graph wird als Unit Capacity Network (oder 0-1 *Network*) bezeichnet, falls die Kapazität aller Kanten gleich 1 ist.
- Ein Unit Capacity Network ist vom Typ 1, falls es keine parallelen Kanten hat.
- Es ist vom Typ 2, falls für jeden Knoten v ($v \neq s$, $v \neq t$) entweder der Eingangsgrad $d^-(v)$ oder der Ausgangsgrad $d^+(v)$ gleich 1 ist.

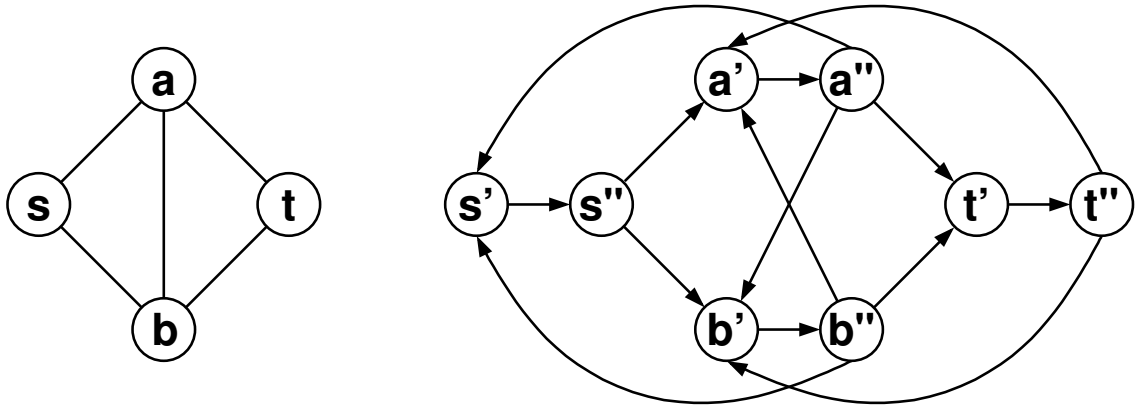
Unit Capacity Networks

Lemma

- *Ein MaxFlow/MinCut kann für ein Unit Capacity Network (mit Dinitz' Algorithmus) in Zeit $\mathcal{O}(m^{3/2})$ berechnet werden.*
- *Für Unit Capacity Networks vom Typ 1 ist die Zeitkomplexität von Dinitz' Algorithmus $\mathcal{O}(n^{2/3}m)$.*
- *Für Unit Capacity Networks vom Typ 2 ist die Zeitkomplexität von Dinitz' Algorithmus $\mathcal{O}(n^{1/2}m)$.*

(Beweis: siehe Shimon Even, Graph Algorithms, 1979)

Ungerichtete ungewichtete Graphen



- Gegeben: ungerichteter (ungewichteter) Graph $G = (V, E)$ mit n Knoten und m Kanten
- Konstruiere gerichteten Graph $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{E})$ mit $|\bar{V}| = 2n$ und $|\bar{E}| = 2m + n$ wie folgt:
  - Ersetze jeden Knoten $v \in V$ durch zwei Knoten $v', v'' \in \bar{V}$, verbunden durch eine (interne) Kante $e_v = (v', v'') \in \bar{E}$.
  - Ersetze jede Kante $e = (u, v) \in E$ durch zwei (externe) Kanten $e' = (u'', v')$ und $e'' = (v'', u') \in \bar{E}$.

Ungerichtete ungewichtete Graphen

- $\kappa(s,t)$ wird nun berechnet als MaxFlow in $\bar{G}$ von Quelle s'' zu Senke t' mit Unit Capacity-Kanten
- Hinweis: $c(e_v) = 1$, $c(e') = c(e'') = \infty$ führt übrigens zum gleichen Ergebnis.
- Für jedes Paar $v', v'' \in \bar{V}$, das einen internen Knoten $v \in V$ repräsentiert, ist die interne Kante (v', v'') die einzige von v' ausgehende Kante und die einzige eingehende Kante von v''. Der Graph $\bar{G}$ ist also ein UCN vom Typ 2.
- Nach dem Lemma kann die Berechnung des MaxFlow bzw. des lokalen Knotenzusammenhangs in Zeit $\mathcal{O}(\sqrt{n}m)$ erfolgen.

Ungerichtete ungewichtete Graphen

Trivialer Algorithmus zur Bestimmung von $\kappa(G)$:

- Bestimme Minimum aller lokalen Knotenzusammenhangszahlen.
- Für die Endknoten jeder Kante (s, t) in G gilt:

$$\kappa_G(s, t) = n - 1$$

- Anzahl notwendiger MaxFlow-Berechnungen:

$$\frac{n(n-1)}{2} - m$$

Ungerichtete ungewichtete Graphen

Besserer Algorithmus zur Bestimmung von $\kappa(G)$:

- Betrachte minimalen Knoten-Separator $S \subset V$, der eine 'linke' Knotenteilmenge $L \subset V$ von einer 'rechten' Teilmenge $R \subset V$ separiert.
- Man könnte $\kappa(G)$ berechnen, indem man einen Knoten s in einer Teilmenge (L oder R) fixiert und die lokalen Zusammenhangszahlen $\kappa_G(s,t)$ für alle Knoten $t \in V \setminus \{s\}$ berechnet, wobei einer dieser Knoten auf der anderen Seite des Schnitts liegen muss.
- Problem: wie wählt man einen Knoten s, so dass s nicht zu jedem Minimum Vertex Separator gehört?
- Da $\kappa(G) \leq \delta(G)$, könnte man $\delta(G)+1$ Knoten für s versuchen. Einer davon kann nicht Teil aller Minimum Knoten-Separatoren sein.
- Der Algorithmus hat Komplexität $\mathcal{O}((\delta+1)\cdot(n-1)\cdot\sqrt{nm})) = \mathcal{O}(\delta n^{3/2} m)$

Knotenzusammenhang (Even & Tarjan)

Algorithmus 14 : Knotenzusammenhang κ (Even & Tarjan)

Input : Ungerichteter Graph $G = (V, E)$
Output : $\kappa(G)$

$\kappa_{\min} \leftarrow n - 1$;
$i \leftarrow 1$;
while $i \leq \kappa_{\min}$ **do**
  for $j \leftarrow i + 1$ **to** n **do**
    if $i > \kappa_{\min}$ **then**
      break;
    else if $\{v_i, v_j\} \notin E$ **then**
      Berechne $\kappa_G(v_i, v_j)$ mit MaxFlow-Prozedur;
      $\kappa_{\min} \leftarrow \min\{\kappa_{\min}, \kappa_G(v_i, v_j)\}$;
  $i \leftarrow i + 1$;
return $\kappa_{\min}$;

Knotenzusammenhang (Even & Tarjan)

Even/Tarjan-Algorithmus zur Berechnung des (globalen) Knotenzusammenhangs κ

- stoppt die Berechnung der lokalen Knotenzusammenhangszahlen $\kappa_G(v_i, v_j)$, falls das Minimum unter die Anzahl der momentan betrachteten Knoten i fällt
- betrachtet höchstens $\kappa + 1$ Knoten in der Schleife für Variable i
- Jeder Knoten hat mindestens $\delta(G)$ Nachbarn, also höchstens $n - \delta - 1$ Nicht-Nachbarn.

$\Rightarrow$ maximal $\mathcal{O}((n - \delta - 1)(\kappa + 1))$ Aufrufe für die Berechnung des lokalen Zusammenhangs (MaxFlow für zwei gegebene Knoten)

$\Rightarrow$ Da $\kappa \leq \delta \leq \bar{d} = 2m/n$ wird der richtige Wert spätestens in Aufruf $2m/n + 1$ gefunden.

$\Rightarrow$ Komplexität: $\mathcal{O}(\sqrt{n}m^2)$

Knotenzusammenhang (Esfahanian & Hakimi)

Verbesserung von Esfahanian & Hakimi:

Lemma

Wenn ein Knoten v zu allen Knoten-Separatoren minimaler Kardinalität gehört, dann gibt es für jeden Minimum Vertex-Cut S zwei Knoten $\ell \in L_S$ und $r \in R_S$, die zu v adjazent sind.

Knotenzusammenhang (Esfahanian & Hakimi)

Beweis.

- Annahme: v ist an allen Minimum Vertex-Cutsets beteiligt.
- Betrachte die beiden (getrennten) Teile L und R des Restgraphen, der nach dem Löschen verbleibt.
- Jede der beiden Seiten muss einen Nachbarn von v enthalten, sonst wäre v nicht nötig, um die Teile zu trennen
  (und die Knotenmenge wäre damit kein minimaler Separator)
- Jede Seite, die mehr als einen Knoten enthält, muss sogar zwei Nachbarn von v enthalten, da man sonst durch Ersetzen von v durch den einzigen Nachbarn einen MinCut ohne v konstruieren könnte (Widerspruch zur Annahme).

Knotenzusammenhang (Esfahanian & Hakimi)

Algorithmus 15 : Knotenzusammenhang κ (Esfahanian & Hakimi)

Input : Ungerichteter Graph $G = (V, E)$
Output : $\kappa(G)$

$\kappa_{\min} \leftarrow n - 1$;
Wähle $v \in V$ mit minimalem Grad, also $d(v) = \delta(G)$;
Seien die Nachbarn $N(v) = \{v_1, v_2, \ldots, v_\delta\}$;

foreach *Nicht-Nachbar* $w \in V \setminus (N(v) \cup \{v\})$ **do**
    Berechne $\kappa_G(v, w)$ mit MaxFlow-Prozedur;
    $\kappa_{\min} \leftarrow \min\{\kappa_{\min}, \kappa_G(v, w)\}$;

$i \leftarrow 1$;
while $i \leq \kappa_{\min}$ **do**
    for $j \leftarrow i + 1$ **to** $\delta - 1$ **do**
        if $i \geq \delta - 2$ *or* $i > \kappa_{\min}$ **then**
            return $\kappa_{\min}$;
        else if $\{v_i, v_j\} \notin E$ **then**
            Berechne $\kappa_G(v_i, v_j)$ mit MaxFlow-Prozedur;
            $\kappa_{\min} \leftarrow \min\{\kappa_{\min}, \kappa_G(v_i, v_j)\}$;

Knotenzusammenhang (Esfahanian & Hakimi)

- erste Schleife:
  - Anzahl der Nicht-Nachbarn kann wieder höchstens $n - \delta - 1$ sein

  $\Rightarrow$ höchstens $n - \delta - 1$ MaxFlow-Aufrufe
- zweite Schleife: $\kappa(2\delta - \kappa - 3)/2$
- Gesamtkomplexität: $n - \delta - 1 + \kappa(2\delta - \kappa - 3)/2$

Kantenzusammenhangsalgorithmen

- Kantenzusammenhang λ kann in ungerichteten ungewichteten Graphen ebenfalls mit der MaxFlow-Prozedur berechnet werden.
- Ersetze dafür jede ungerichtete Kante durch zwei antiparallele gerichtete Kanten mit Kapazität 1
- Berechne dann lokalen Zusammenhang zwischen der entsprechenden Quelle s und der Senke t.

$\Rightarrow$ Resultierendes Netzwerk ist Unit Capacity Network vom Typ 1

$\Rightarrow$ Komplexität zur Berechnung des lokalen Zusammenhangs für ein Knotenpaar: $\mathcal{O}(m \cdot \min\{m^{1/2}, n^{2/3}\})$

Einfache Kantenzusammenhangsalgorithmen

- Trivialer Algorithmus: mit $n(n-1)/2$ MaxFlow-Aufrufen den lokalen Kantenzusammenhang aller Knotenpaare berechnen

- Besser: einen Knoten s festzuhalten und dann für alle anderen Knoten t die lokalen Zusammenhangszahlen $\lambda(s,t)$ berechnen

  Mindestens einer dieser Knoten muss auf der anderen Seite eines MinCuts liegen.

  Deshalb ist das Minimum aller dieser $(n-1)$ lokalen Zusammenhangszahlen $\lambda(s,t)$ gleich dem (globalen) Kantenzusammenhang λ des Graphen.

  Gesamtkomplexität: $\mathcal{O}(nm \cdot \min\{n^{2/3}, m^{1/2}\})$

λ-Covering

- Der Algorithmus funktioniert auch, wenn man statt der ganzen Knotenmenge nur eine Teilmenge verwendet, die zwei Knoten s, t enthält, deren lokaler Zusammenhang $\lambda(s, t)$ gleich dem globalen Zusammenhang λ ist.

- Eine solche Teilmenge heißt λ-Covering.

$\Rightarrow$ Versuche, die Kardinalität dieser Knotenmenge zu reduzieren.

Komponentengröße

Lemma

Sei S ein Minimum Edge-Cut eines Graphen $G = (V, E)$ und sei $L, R \subset V$ eine Partition der Knotenmenge, so dass L and R durch S separiert werden.

Wenn $\lambda(G) < \delta(G)$, dann besteht jede Komponente von $G - S$ aus mehr als $\delta(G)$ Knoten, d.h. es gilt $|L| > \delta(G)$ und $|R| > \delta(G)$.

Komponentengröße

Beweis.

- Seien $l_1, \ldots, l_k$ die Elemente von L und sei $E[L] = E(G[L])$ die Menge der durch L induzierten Kanten in G.
- Es gilt:

$$\begin{aligned} \delta_G \cdot k &\leq \sum_{i=1}^{k} d_G(l_i) \\ &\leq 2 \cdot |E[L]| + |S| \\ &\leq 2 \cdot \frac{k(k-1)}{2} + |S| \\ &< k(k-1) + \delta_G \end{aligned}$$

- Aus $\delta_G \cdot (k-1) < k(k-1)$ folgt $|L| = k > 1$ und $|L| = k > \delta_G$ (sowie $|R| > \delta(G)$).

Komponentengröße

Folgerung

Wenn gilt $\lambda_G < \delta_G$, dann enthält jede Komponente von $G - S$ einen Knoten, der mit keiner Kante in S inzident ist.

Kantenzusammenhang λ

Lemma

Sei $\lambda_G < \delta_G$ und sei T ein Spannbaum von G.
Dann enthalten alle Komponenten von $G - S$ mindestens einen Knoten, der kein Blatt in T ist, d.h. die inneren Knoten von T bilden ein λ-Cover.

Beweis.

- Nehmen wir an, dass es nicht so wäre (d.h. alle Knoten in L sind Blätter von T).
- Also für keine Kante von T sind beide Endknoten in L, d.h. $|L| = |S|$.
- Aus dem vorhergehenden Lemma ($\lambda_G < \delta_G \Rightarrow |L| > \delta_G$ und $|R| > \delta_G$) folgt, dass $\lambda_G = |S| = |L| > \delta_G$ (Widerspruch zur Annahme).

Spannbaum-Berechnung (Esfahanian & Hakimi)

Algorithmus von Esfahanian & Hakimi:

- Berechne Spannbaum des gegebenen Graphen.
- Wähle beliebigen inneren Knoten v des Baums.
- Berechne für jeden anderen Knoten w, der kein Blatt ist, den lokalen Kantenzusammenhang $\lambda(v, w)$.
- Das Minimum dieser Wertemenge, zusammen mit δ_G, ergibt genau den Kantenzusammenhang λ_G.
- Ein Baum mit möglichst vielen Blättern wäre vorteilhaft, aber die Konstruktion eines optimalen Baums ist $\mathcal{NP}$-hart.

Spannbaum-Berechnung (Esfahanian & Hakimi)

Esfahanian & Hakimi:

- Algorithmus zur Berechnung eines Spannbaums T von G, so dass beide Mengen, L und R eines minimalen Kantenseparators mindestens ein Blatt von T enthalten, und nach dem letzten Lemma mindestens einen inneren Knoten.

Spannbaum-Berechnung (Esfahanian & Hakimi)

Algorithmus 16 : Spannbaum-Berechnung (Esfahanian & Hakimi)

Input : Ungerichteter Graph $G = (V, E)$
Output : Spannbaum T mit einem Blatt und einem inneren Knoten in L bzw. R

Wähle $v \in V$;
$T \leftarrow$ alle Kanten inzident mit v;
while $|E(T)| < n - 1$ **do**
  Wähle ein Blatt w in T, so dass für alle Blätter r in T gilt:
  $|N(w) \cap (V - V(T))| \geq |N(r) \cap (V - V(T))|$;
  $T \leftarrow T \cup \{(w, x) \in E : x \in (V - V(T))\}$
return T;

Kantenzusammenhang λ (Esfahanian & Hakimi)

Algorithmus 17 : Kantenzusammenhang λ (Esfahanian & Hakimi)

Input : Ungerichteter Graph $G = (V, E)$
Output : $\lambda(G)$

Konstruiere einen Spannbaum T (voriger Algorithmus);
Sei P die kleinere der beiden Mengen
(entweder die Blätter oder die inneren Knoten von T);
Wähle einen Knoten $u \in P$;
$c \leftarrow \min\{\lambda_G(u, v) : v \in P \setminus \{u\}\}$;
$\lambda \leftarrow \min(\delta(G), c)$;
return λ;

Kantenzusammenhang λ (Esfahanian & Hakimi)

- Da P als kleinere der beiden Mengen (Blätter / innere Knoten) gewählt wird, benötigt der Algorithmus höchstens $n/2$ Berechnungen für lokale Zusammenhangszahlen.

$\Rightarrow$ Gesamtzeitkomplexität: $\mathcal{O}(\lambda mn)$

Kantenzusammenhang λ (Matula)

Definition

Ein Dominating Set für einen Graphen $G = (V, E)$ ist eine Knotenteilmenge V' von V, so dass jeder Knoten, der nicht in V' ist, mit mindestens einem Knoten in V' über eine Kante verbunden ist.

Lemma

Im Fall $\lambda(G) < \delta(G)$ ist jedes Dominating Set von G auch ein λ-covering von G.

Kantenzusammenhang λ (Matula)

Verbesserter Algorithmus von Matula:

- Analog zur Spannbaum-Methode, wird λ hier berechnet, indem man
  - ein Dominating Set D von G berechnet,
  - einen beliebigen Knoten $u \in D$ auswählt und
  - den lokalen Kantenzusammenhang $\lambda(u, v)$ für alle anderen Knoten $v \in D \setminus \{u\}$ berechnet.
- Das Minimum der Wertemenge (wieder zusammen mit δ_G) ist der Kantenzusammenhang.
- Obwohl die Berechnung eines Dominating Sets minimaler Kardinalität $\mathcal{NP}$-hart ist, kann man zeigen, dass der Algorithmus in Zeit $\mathcal{O}(mn)$ läuft, wenn man das Dominating Set wie im folgenden Algorithmus konstruiert.

Kantenzusammenhang λ (Matula)

Algorithmus 18 : Berechnung eines Dominating Sets (Matula)

Input : Ungerichteter Graph $G = (V, E)$
Output : Dominating Set D

Wähle $v \in V$;
$D \leftarrow \{v\}$;
while $V \setminus (D \cup N(D)) \neq \emptyset$ **do**
  Wähle einen Knoten $w \in V \setminus (D \cup N(D))$;
  $D \leftarrow D \cup \{w\}$;
return D;

k-Kantenzusammenhangskomponenten

David W. Matula: k-Components, Clusters, and Slicings in Graphs

- gegeben: ungewichteter, ungerichteter Graph $G = (V, E)$
- Wdh.: Eine k-Kanten-(Zusammenhangs-)Komponente von G ist ein maximaler k-kanten-zusammenhängender Teilgraph von G.
- Da wir in diesem Abschnitt nur über *Kanten*zusammenhangskomponenten sprechen, werden diese hier oft einfach als k-Komponenten bezeichnet
  (auch wenn sich das Wort sonst auf *Knoten*zusammenhang bezieht)
- Teilgraphen bestehend aus einem einzelnen isolierten Knoten ($k = 0$) nennen wir triviale Komponenten, aber diese werden hier nicht als k-Komponenten angesehen.

Vereinigung von Teilgraphen

Lemma

Seien $G_1, G_2, \ldots, G_\ell$ Teilgraphen von G, so dass ihre Vereinigung $\bigcup_{i=1}^{\ell} G_i$ (einfach) zusammenhängend ist.

Dann gilt:

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\ell} G_i\right) \geq \min_{1 \leq i \leq \ell} \{\lambda(G_i)\}$$

Vereinigung von Teilgraphen

Beweis.

- Wenn $\bigcup_{i=1}^{\ell} G_i$ aus einem einzigen Knoten besteht, gilt die Behauptung (denn beide Seiten sind Null).
- Sei anderenfalls $C = (A, \bar{A})$ ein MinCut von $\bigcup_{i=1}^{\ell} G_i$.
- MinCut C muss mindestens eine Kante enthalten, da $\bigcup_{i=1}^{\ell} G_i$ zusammenhängend ist und mindestens 2 Knoten hat.
- Falls C eine Kante eines Teilgraphen G_j enthält, enthält sowohl A als auch $\bar{A}$ jeweils mindestens einen Knoten aus $V(G_j)$, d.h. C muss einen Cut für G_j enthalten.

$\Rightarrow$ Für mindestens ein $j \in \{1, \ldots, \ell\}$ gilt: $\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\ell} G_i\right) \geq \lambda(G_j)$

Vereinigung von Teilgraphen

Für die Teilgraphen $G_1, G_2, \ldots, G_\ell$ von G muss jeder Cut des induzierten Teilgraphen $G\left[\bigcup_{i=1}^{\ell} V(G_i)\right]$ einen Cut der einfachen Vereinigung der Teilgraphen $\bigcup_{i=1}^{\ell} G_i$ enthalten. Also gilt:

$$\lambda\left(G\left[\bigcup_{i=1}^{\ell} V(G_i)\right]\right) \geq \lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\ell} G_i\right)$$

Folgerung

Wenn $G_1, G_2, \ldots, G_\ell$ Teilgraphen von G sind, so dass $\bigcup_{i=1}^{\ell} G_i$ zusammenhängend ist, dann gilt:

$$\lambda\left(G\left[\bigcup_{i=1}^{\ell} V(G_i)\right]\right) \geq \min_{1\leq i\leq \ell}\{\lambda(G_i)\}$$

Vereinigung von Teilgraphen

- Achtung:
  In der Folgerung kann die Bedingung, dass die einfache Vereinigung $\bigcup_{i=1}^{\ell} G_i$ zusammenhängend ist, nicht durch die abgeschwächte Forderung, dass der induzierte Teilgraph der vereinigten Knotenmengen $G\left[\bigcup_{i=1}^{\ell} V(G_i)\right]$ zusammenhängend ist, ersetzt werden!

  Bsp.: wenn G_1 und G_2 zwei disjunkte Kreise sind, die in G durch eine einzelne Kante verbunden sind, ist die Ungleichung in der Folgerung nicht erfüllt.

- Eine weitere Konsequenz des Lemmas ist die Tatsache, dass die k-Kanten-Komponenten jedes Graphen disjunkt sind.

Die Kohäsion / Zusammenhangsfunktion

Definition

Für jedes Element (Knoten oder Kante) $x \in V(G) \cup E(G)$ eines Graphen G ist die Kohäsion (cohesiveness) bzw. die Zusammenhangsfunktion $h(x)$ definiert als maximaler Wert des Kantenzusammenhangs von allen Teilgraphen von G, die x enthalten.

Das Maximum $\sigma(G)$ aller Kohäsionswerte des Graphen G wird als Stärke (strength) des Graphen bezeichnet, also

$$\sigma(G) = \max\{\lambda(G') : G' \text{ ist Teilgraph von } G\}.$$

Die Kohäsionsmatrix

- Die Zusammenhangsfunktion kann durch die (symmetrische) Kohäsionsmatrix dargestellt werden.
- Zeilen und Spalten werden durch die Knoten des Graphen indiziert
- Eintrag für Position v_i, v_j ist jeweils die Kohäsion der Kante $\{v_i, v_j\}$, falls sie existiert, und sonst Null
- Die Kohäsion eines Knotens ist dann das Maximum der entsprechenden Zeile oder Spalte.
- Die Stärke σ von G ist das Maximum aller Matrixeinträge.

Die Kohäsionsmatrix

- Für Knoten $v \in V(G)$ gilt: $0 \leq h(v) \leq \deg(v)$
- Falls $\{v_i, v_j\} \in E(G)$, gilt:

$$1 \leq h(\{v_i, v_j\}) \leq \min\{\deg(v_i), \deg(v_j)\}$$

- $h(x) = 0$ gilt also nur, wenn x ein isolierter Knoten ist.
- $\sigma(G) = 0$ gilt nur, wenn G keine Kante enthält.
- $\sigma(G) = 1$ gilt genau dann, wenn G ein Wald mit mindestens einer Kante ist, denn jeder Kreis würde $\sigma(G) \geq 2$ implizieren.

Eindeutige Komponentenzuordnung

- Für $x \in V(G) \cup E(G)$ und $h(x) \geq 1$ muss es für jedes $k \in \{1, \ldots, h(x)\}$ einen k-kanten-zusammenhängenden Teilgraph geben, der x enthält.
- Insbesondere muss es auch einen maximalen solchen Teilgraph (also eine k-Kanten-Komponente) geben.
- Da die k-Kanten-Komponenten sich nicht überschneiden ist dieser maximale Teilgraph (die Komponente) eindeutig.

Folgerung

Für jeden Graphen G, jedes Element $x \in V(G) \cup E(G)$ und jede Zusammenhangszahl $k \in \{1, \ldots, h(x)\}$ existiert eine eindeutige k-Kanten-Zusammenhangskomponente in G, die x enthält.

Eindeutige Komponentenzuordnung

- Für jedes Element x mit $h(x) \geq 1$ gilt:
  Unter allen Teilgraphen, die x enthalten und die maximalen Kantenzusammenhang (also $h(x)$) haben, hat die eindeutige $h(x)$-Komponente, die x enthält, die meisten Knoten.
  Sie heißt $h(x)$-Komponente selektiert durch x (Symbol: H_x).
- Die Kohäsion eines Elements kann aus dem Wissen über einen beliebigen Teilgraph maximalen Kantenzusammenhangs, der das Element enthält, abgeleitet werden.
- Aus der Kenntnis der k-Kanten-Komponenten von G für alle k kann man $h(x)$ für jedes Element x bestimmen.
- Aber man kann umgekehrt auch mit Hilfe der Zusammenhangsfunktion die Komponente H_x bestimmen.

Komponentenbestimmung

Satz

Sei x ein Element des Graphen G mit $h(x) \geq 1$.
Sei M_x ein maximaler zusammenhängender Teilgraph von G, der x enthält und dessen Elemente alle Kohäsion mindestens $h(x)$ haben.
Dann gilt $M_x = H_x$.

Beweis.

- Für $x \in V(G) \cup E(G)$ mit $h(x) \geq 1$ sei M_x definiert wie in dem Satz.
- Dann haben für jedes $y \in V(M_x) \cup E(M_x)$ alle Elemente von H_y Kohäsion mindestens $h(y) \geq h(x)$, so dass also gilt $H_y \cup M_x = M_x$, also $H_y \subseteq M_x$

Komponentenbestimmung

Beweis.

- Da jedes Element von M_x in einem H_y ist, gilt:

$$M_x = \bigcup \{H_y : y \in V(M_x) \cup E(M_x)\}$$

- Nach dem Lemma gilt daher

$$\lambda(M_x) \geq h(x)$$

- Da M_x selbst ein Teilgraph von G ist, der x enthält, gilt

$$\lambda(M_x) = h(x)$$

- Damit ist M_x ein $h(x)$-kanten-zusammenhängender Teilgraph von G und muss in der $h(x)$-Komponente selektiert durch x enthalten sein, also in H_x.

Komponentenbestimmung

Beweis.

- Da wegen $M_x = \bigcup\{H_y : y \in V(M_x) \cup E(M_x)\}$ der Teilgraph H_x in M_x enthalten sein muss, gilt $M_x = H_x$.
- Der im Satz definierte Teilgraph M_x ist damit eindeutig und kann bestimmt werden, indem man ausgehend von x alle Elemente anhängt, die von x über einen Pfad erreichbar sind, dessen Elemente alle Kohäsion mindestens $h(x)$ aufweisen.

□

Folgerung

Für jeden Graph G und eine beliebige Zahl $k \in \{1, \ldots, \sigma(G)\}$ bilden die Knoten und Kanten von G mit Kohäsion mindestens k einen Graph, dessen Komponenten die k-Komponenten von G sind.

Komponentenbestimmung

- Für jeden Graph G sind die $h(x)$-Komponenten selektiert durch $x \in V(G) \cup E(G)$ von besonderem Interesse. Es wird nun gezeigt, dass in dieser Menge alle k-Kanten-Komponenten von G (für alle $k \in \{1, \ldots, \sigma(G)\}$) enthalten sind.

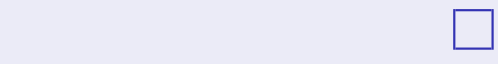
Folgerung

Wenn G' eine k-Komponente (für ein $k \geq 1$) des Graphen G ist, dann gibt es ein $x \in V(G) \cup E(G)$, so dass $G' = H_x$ ist.

Komponentenbestimmung

Beweis.

- Sei G' eine k-Komponente von G.
- Dann gilt $1 \leq k \leq \lambda(G')$ und G' ist damit auch eine $\lambda(G')$-Komponente von G.
- Wähle $x \in V(G') \cup E(G')$ so, dass $h(x)$ minimal ist und sei M_x definiert wie im Satz. (Man beachte, dass G' in M_x als Teilgraph enthalten sein muss.)
- $M_x = H_x$ ist eine $h(x)$-Komponente und deshalb k-kanten-zusammenhängend (da $k \leq \lambda(G') \leq h(x)$).
- Da G' ein maximaler k-kanten-zusammenhängender Teilgraph ist, gilt $G' = H_x$.



Zusammenhangsvielfalt

Definition

Für einen Graphen G sei die Zusammenhangs(komponenten)vielfalt $\eta(G)$ definiert als

$$\eta(G) = |\{H : H \text{ ist eine } k\text{-Komponente von } G \text{ für ein } k \geq 1\}|$$

- Aus dem vorangegangenen Korollar folgt $\eta(G) \leq |V(G)| + |E(G)|$.
- Noch genauer (isolierte Knoten sind keine k-Komponenten):

Satz

Für jeden Graph G gilt:

$$\eta(G) \leq \left\lfloor \frac{|V|}{2} \right\rfloor$$

Zusammenhangsvielfalt

Beweis.

- Für den Beweis wird eine stärkere Ungleichung für zusammenhängende Graphen gezeigt:

$$\eta(G) \leq \left\lfloor \frac{|V(G)| + 1 - \lambda(G)}{2} \right\rfloor$$

- klar für zusammenhängende Graphen auf 1 oder 2 Knoten
- Induktion: angenommen G ist ein zusammenhängender Graph auf $n \geq 3$ Knoten und die Ungleichung gilt für zusammenhängende Graphen auf weniger als n Knoten.
- Falls $\lambda(G) = \sigma(G)$, dann gilt $\eta(G) = 1$ und somit auch die Ungleichung.

Zusammenhangsvielfalt

Beweis.

- Sonst sei G' der Teilgraph von G, den man aus G durch Löschen der Elemente mit Kohäsion $\lambda(G)$ erhält, d.h.
  G' ist ein Graph, dessen Komponenten die $(\lambda(G)+1)$-Komponenten von G sind.
- Die Kanten von G mit Kohäsion $\lambda(G)$ müssen einen Cut von G beinhalten.

$\Rightarrow$ G' ist nicht zusammenhängend oder hat weniger Knoten als G.

- In beiden Fällen hat jede der Komponenten $G'_1, G'_2, \ldots, G'_j$ von G' weniger Knoten als G.

$\Rightarrow$ Ungleichung lässt sich per Induktionsvoraussetzung auf alle G'_i mit $i \in \{1, \ldots, j\}$ anwenden.

Zusammenhangsvielfalt

Beweis.

- Ebenso gilt $\lambda(G_i') \geq \lambda(G) + 1$ für $i \in \{1, \ldots, j\}$.
- Eine k-Komponente von G' muss nun eine k-Komponente einer Komponente von G' sein und umgekehrt.
- Deshalb gilt

$$\begin{aligned} \eta(G') = \sum_{i=1}^{j} \eta(G_i') &\leq \sum_{i=1}^{j} \left\lfloor \frac{|V(G_i')| + 1 - \lambda(G_i')}{2} \right\rfloor \\ &\leq \left\lfloor \frac{|V(G')| - j\lambda(G)}{2} \right\rfloor \end{aligned}$$

- Es gilt $|V(G')| \leq |V(G)| - 1$ oder G' ist nicht zusammenhängend, so dass $j \geq 2$ und $j\lambda(G) \geq \lambda(G) + 1$.

Zusammenhangsvielfalt

Beweis.

- In jedem Fall gilt:

$$\eta(G') \leq \left\lfloor \frac{|V(G)| - 1 - \lambda(G)}{2} \right\rfloor$$

- G selbst ist eine k-Komponente von G für $k = \lambda(G)$, und $\eta(G) = \eta(G') + 1$.
- Damit gilt:

$$\eta(G) \leq \left\lfloor \frac{|V(G)| + 1 - \lambda(G)}{2} \right\rfloor$$

Zusammenhangsvielfalt

Beweis.

Ungleichung aus dem Satz:

- Die Ungleichung aus dem Satz ist für triviale Graphen klar.
- Für nichttriviale *zusammenhängende* Graphen folgt sie aus der verschärften Form.
- Für beliebige Graphen folgt sie aus der Summation über die *nichttrivialen* Komponenten.

Cluster

- Zusammenhangsfunktion jedes Graphen hat ein Plateau über jeder $\sigma(G)$-Komponente und evt. auch noch an anderen Stellen.
- Plateaus sind Gebiete von (lokal) optimalem Zusammenhang, d.h., k-Komponenten, die völlig disjunkt zu $(k+1)$-Komponenten sind.

Definition

Jeder isolierte Knoten und für $k \geq 1$ jede k-Komponente von G, die keine $(k+1)$-Komponente enthält, ist ein Cluster von G.

- Graph G ist ein Cluster, falls $\sigma(G) = \lambda(G)$.
- Verschiedene Cluster können keine gemeinsamen Knoten enthalten (folgt aus Disjunktheit von k-Komponenten).
- Manche Knoten sind in keinem Cluster.
- Cluster lassen sich aus der Zusammenhangsfunktion bestimmen

Subcluster

Definition

Ein induzierter Teilgraph $K[A]$ eines Clusters K des Graphen G mit $\lambda(K[A]) = \lambda(K)$ heißt Subcluster von G.

- Subcluster repräsentieren also induzierte Teilgraphen von lokal maximalem Kantenzusammenhang, die nicht unbedingt inklusions-maximal sind.
- Wenn $G[A]$ und $G[B]$ Subcluster von G sind, für die gilt $A \cap B \neq \emptyset$, dann ist $A \cup B$ ein Subcluster von G.

Cluster und Subcluster

- Die Subcluster eines Graphen bilden unter der Relation "ist echter Teilgraph von" eine partielle Ordnung mit Clustern als maximalen Elementen.
- Die partielle Ordnung der Subcluster in einem bestimmten Cluster ist ein beschränkter Verband.
- Da alle Cluster eines Graphen disjunkt sind, ist die vollständige partielle Ordnung eine Vereinigung von disjunkten beschränkten Verbänden.

Schnitt von Subclustern

Satz

Seien $G[A]$ und $G[B]$ Subcluster eines Clusters K in G, so dass $A \cap B \neq \emptyset$.

Wenn es einen MinCut von $G[A] \cup G[B]$ gibt, der

- *die Knoten in $A \setminus B$ von den Knoten in $B \setminus A$ separiert und*
- *der mindestens eine Kante aus $G[A \cap B]$ enthält,*

dann ist $G[A \cap B]$ ein Subcluster von K in G.

Schnitt von Subclustern

Beweis.

- Annahme: $C = (W, \bar{W})$ ist MinCut von $G[A] \cup G[B]$ mit $A \setminus B \subset W$ und $B \setminus A \subset \bar{W}$ und mindestens eine Kante von C ist in $G[A \cap B]$

$\Rightarrow$ C ist auch ein Cut für $G[A]$ und für $G[B]$

- $\lambda(G[A] \cup G[B]) \geq \min\{\lambda(G[A]), \lambda(G[B])\}$ (siehe Lemma über zusammenhängende Vereinigung von Teilgraphen)

$\Rightarrow$ $\lambda(G[A] \cup G[B]) = \lambda(G[A]) = \lambda(G[B]) = \sigma(K)$
(da $G[A]$ und $G[B]$ Subcluster sind)

$\Rightarrow$ $|C| = \sigma(K)$ und $C \subset E(G[A \cap B])$ (da jeder Cut von $G[A]$ und $G[B]$ mindestens $\sigma(K)$ Kanten enthält)

Schnitt von Subclustern

Beweis.

- Sei $D = A \cap B$, $X = W \cap D$, $\bar{X} = \overline{W} \cap D$.
- $C = (W, \overline{W})$ ist auch Cut von $G[D]$
- Beweisidee: zeigen, dass jeder Cut von $G[D]$ mindesten $\sigma(K)$ Kanten enthält
- Sei $C_y = (Y, \bar{Y})$ ein Cut von $G[D]$
- Falls $Y \subset X$, dann $C_y = (Y, \bar{Y}) = (Y, \bar{Y} \cup \overline{W})$ ist auch Cut von $G[B]$, also $|C_y| \geq \sigma(K)$
- Ebenso, wenn $Y \subset \bar{X}$, $\bar{Y} \subset X$ oder $\bar{Y} \subset \bar{X}$, dann ist C_y Cut von $G[A]$ oder $G[B]$ und damit $|C_y| \geq \sigma(K)$
- Ansonsten sind die folgenden vier Knotenmengen nicht leer: $D_1 = X \cap Y$, $D_2 = X \cap \bar{Y}$, $D_3 = \bar{X} \cap Y$, $D_4 = \bar{X} \cap \bar{Y}$
- $\bigcup_{i=1}^{4} D_i = D = A \cap B$

Schnitt von Subclustern

Beweis.

- Da $G[B]$ Subcluster von K ist, enthält der Cut zwischen D_1 und $B \setminus D_1$ in $G[B]$ mindestens $\sigma(K)$ Kanten die alle zwischen D_1 einerseits und D_2, D_3 und D_4 andererseits verlaufen:

$$|(D_1, B \setminus D_1)| = |(D_1, D_2)| + |(D_1, D_3)| + |(D_1, D_4)| \geq \sigma(K)$$

Ebenso für D_2 und $B \setminus D_2$ in $G[B]$:

$$|(D_2, B \setminus D_2)| = |(D_1, D_2)| + |(D_2, D_3)| + |(D_2, D_4)| \geq \sigma(K)$$

- Addition ergibt:

$$2|(D_1, D_2)| + |(D_1, D_3)| + |(D_1, D_4)| + |(D_2, D_3)| + |(D_2, D_4)| \geq 2\sigma(K)$$

$$\Rightarrow \quad 2|(D_1, D_2)| + |(D_1 \cup D_2, D_3 \cup D_4)| \geq 2\sigma(K)$$

Schnitt von Subclustern

Beweis.

- $(D_1 \cup D_2, D_3 \cup D_4) = (X, \bar{X}) = C$
- also $|(D_1, D_2)| \geq \sigma(K)/2$ und ebenso $|(D_3, D_4)| \geq \sigma(K)/2$

$\Rightarrow$ $|C_y| = |(Y, \bar{Y})| \geq |(D_1, D_2)| + |(D_3, D_4)| \geq \sigma(K)$

$\Rightarrow$ Jeder Cut von $G[A \cap B]$ hat mindestens $\sigma(K)$ Kanten

$\Rightarrow$ $G[A \cap B]$ ist Subcluster von Cluster K des Graphen G

Slicings

Definition

Die geordnete Partition der Kanten des Graphen G, $Z = (C_1, C_2, \ldots, C_m)$, ist ein Slicing von G falls für jedes Element C_i gilt:

$$C_i \text{ ist ein Cut } (A_i, \bar{A}_i) \text{ von } \begin{cases} G & \text{für } i = 1 \\ G - \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j & \text{für } i \in \{2, \ldots, m\} \end{cases}$$

Ein Element C_i des Slicings heißt auch Cut des Slicings.

Anmerkung: m ist hier nicht die Kantenanzahl.

Minimale und Narrow Slicings

Definition

Ein Slicing $Z = (C_1, C_2, \ldots, C_m)$ von G, für das es keine echte Unterpartition gibt, die ein Slicing von G ist, ist ein minimales Slicing von G.

- Jeder Cut C_i eines minimalen Slicings muss ein minimaler Cut einer Komponente von $G - \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j$ sein.

Definition

Z ist ein Narrow Slicing von G, falls jeder Cut C_i ein Minimum Cut einer Komponente von $G - \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j$ ist.

Minimale und Narrow Slicings

Dynamische Interpretation:

- Slicing ist Sequenz von nicht-leeren Cuts, die G in isolierte Knoten teilen
- Minimale / Narrow Slicings verwenden nur Minimale / Minimum Cuts in jedem Schritt.
- Jedes Narrow Slicing ist auch ein Minimales Slicing (was umgekehrt nicht gilt).

Slicings

- nützlich: Slicing als sukzessive Zerlegung der Knotenmenge
- i-ter Cut $C_i = (A_i, \bar{A}_i)_i$ ist Cut von $G - \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j$
- Da $A_i \cup \bar{A}_i = V(G - \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j) = V(G)$, betrifft $(A_i, \bar{A}_i)_i$ die gleiche Partition der Knoten von G wie der Cut $(A_i, \bar{A}_i)$ von G.
- Es gilt

$$(A_i, \bar{A}_i)_i = (A_i, \bar{A}_i) - \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j$$

- Also enthält $(A_i, \bar{A}_i)_i$ nicht unbedingt alle Kanten des Cuts $(A_i, \bar{A}_i)$ von G für $i > 1$.
- Beachte: Kantenmenge $(A_i, \bar{A}_i)$ hängt implizit von G ab, Kantenmenge $(A_i, \bar{A}_i)_i$ hängt implizit von G und Z ab. Die Knotenpartition ist jedoch explizit und bei beiden gleich!

Knotenpartitionen

- Repräsentation der Cuts des Slicings als Knotenpartition von $V(G)$ bietet eine nützliche Charakterisierung von jedem Graphen $G - \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j$ als Vereinigung von induzierten Teilgraphen von G
- Da C_1 die Knotenmenge A_1 von $\bar{A}_1$ separiert, und damit $G - C_1 = G[A_1] \cup G[\bar{A}_1]$, gilt somit:

$$G - (C_1 \cup C_2) = G[A_1 \cap A_2] \cup G[A_1 \cap \bar{A}_2] \cup G[\bar{A}_1 \cap A_2] \cup G[\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2]$$

Satz

Induktiv folgt: Sei $Z = (C_1, C_2, \ldots, C_m)$ ein Slicing von G mit $C_i = (A_i, \bar{A}_i)_i$ für $i \in \{1, \ldots, m\}$. Dann gilt für $j \in \{1, \ldots, m\}$:

$$G - \bigcup_{k=1}^{j} C_k = \bigcup \left\{ G \left[\bigcap_{i \in s} A_i \cap \bigcap_{i \notin s} \bar{A}_i \right] : s \subset \{1, 2, \ldots, j\} \right\}$$

Knotenpartitionen

- Jeder Graph G kann geschrieben werden als $G = G[P_1] \cup G[P_2] \cup \ldots \cup G[P_n]$, wobei jedes $G[P_i]$ eine Komponente von G ist.
- Sei dann $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ die Komponenten-Knoten-Partition von G.
- Falls G nicht zusammenhängend ist, können die induzierten Teilgraphen auf der rechten Seite im letzten Satz unzusammenhängend sein.
- Sei $Z = (C_1, C_2, \ldots, C_m)$ ein Slicing von G, wobei G die Komponenten-Knoten-Partition $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ hat.
  Dann ist die Komponenten-Knoten-Partition von $G - \bigcup_{k=1}^{j} C_k =$

$$\bigcup \left\{ G\left[P_\ell \cap \bigcap_{i \in s} A_i \cap \bigcap_{i \notin s} \bar{A}_i \right] : 1 \leq \ell \leq n, s \subset \{1, 2, \ldots, j\} \right\}$$

Knotenpartitionen

- Beachte: die Komponenten-Knoten-Partition von $G - \bigcup_{k=1}^{j} C_k$ ist eine Subpartition der Komponenten-Knoten-Partition von $G - \bigcup_{k=1}^{j-1} C_k$ für $j \in \{1, \ldots, m\}$.

$\Rightarrow$ Slicing $Z = (C_1, C_2, \ldots, C_m)$ bewirkt eine geschachtelte Sequenz von $m + 1$ Knotensubpartitionen von der Komponenten-Knoten-Partition $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ bis hinunter zur minimalen Partition bestehend aus lauter einzelnen Knoten.

- Cut C_i des Slicings $Z = (C_1, C_2, \ldots, C_m)$ kann einige Komponenten von $G - \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j$ intakt lassen.

$\Rightarrow$ sinnvoll: spezifizieren, welche Komponenten durch C_i wirklich zertrennt werden

Zertrennte Teilgraphen des Slicings

- Die Subgraphen $G_1, G_2, \ldots, G_m$ von G sind die durch das Slicing $Z = (C_1, C_2, \ldots, C_m)$ zertrennten Teilgraphen, wenn jedes G_i genau die Komponenten von $G - \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j$ enthält, deren Knoten durch C_i separiert werden.
- Jeder vom Slicing Z zertrennte Teilgraph G_i ist dann eine Vereinigung von induzierten Teilgraphen von G.

- Da ein minimales Slicing nur sukzessive Cuts von individuellen Komponenten beinhaltet, gilt folgendes Korollar:

Knotenpartitionen

Folgerung

Die durch ein minimales Slicing $Z = (C_1, C_2, \ldots, C_m)$ zertrennten Teilgraphen sind alle zusammenhängende induzierte Teilgraphen von G.

$\Rightarrow$ Die geschachtelte Sequenz von Komponenten-Knoten-Partitionen für ein minimales Slicing ist derart, dass jede Subpartition aus der vorhergehenden durch Aufspaltung von genau einem Teil hervorgeht.

$\Rightarrow$ entspricht demzufolge einer maximalen Kette im Verband der Komponenten-Knoten-Partitionen

Länge von Slicings

Definition

Sei die Länge $\ell(Z)$ eines Slicings Z des Graphen G die Anzahl der Cuts des Slicings (also die Kardinalität der Kantenpartition Z).

- Jeder Cut des Slicings erhöht die Anzahl der Zusammenhangskomponenten im Graphen.
- Diese Erhöhung ist genau dann immer gleich Eins, wenn die Cuts minimal sind (bzw. das Slicing ein minimales Slicing ist).

Satz

Für jeden Graphen G mit $|E(G)| \geq 1$ gilt:

$$\max\{\ell(Z) : Z \text{ ist Slicing von } G\} = |V(G)| - \#Komponenten(G)$$

und dieses Maximum wird genau von den minimalen Slicings erreicht.

Länge von Slicings

- Länge eines Slicings Z von Graph G kann 1 sein, falls G bipartit ist.
- Allgemein:
  Minimaler Wert für die Länge eines Slicings eines Graphen hängt von der minimalen Zahl k ab, so dass G ein k-partiter Graph ist, also von der sogenannten chromatischen Zahl $\chi(G)$ des Graphen G.

Definition

Ein Graph ist k-partit, wenn die Knotenmenge $V(G)$ in k Mengen $V_1, \ldots, V_k$ partitioniert werden kann, so dass jeder induzierte Graph $G[V_i]$ $(i \in \{1, \ldots, k\})$ keine Kante enthält.

Länge von Slicings

Satz

Für jeden Graph G mit $|E(G)| \geq 1$ gilt:

$$\min\{\ell(Z) : Z \text{ ist Slicing von } G\} = \lceil \log_2 \chi(G) \rceil\}$$

Beweis.

- Sei $Z = (C_1, C_2, \ldots, C_m)$ ein Slicing von G mit $C_i = (A_i, \bar{A}_i)_i$ und $A_i \cup \bar{A}_i = V$.
- Für $v \in V$ und $i \in \{1, \ldots, m\}$ sei $b_i(v) = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \in A_i \\ 0 & \text{falls } v \notin A_i \end{cases}$
- Partitioniere Knotenmenge V in die 2^m Teilmengen $V_0, \ldots, V_{2^m-1}$, indem $v \in V$ der Teilmenge V_k mit $k = \sum_{i=1}^{m} b_i(v) \cdot 2^{i-1}$ zugeteilt wird.

Länge von Slicings

Beweis.

- Falls $\{u, w\} \in E$, dann ist $\{u, w\} \in C_i$ für ein i, so dass also Knoten u und w durch Cut C_i getrennt werden.

$\Rightarrow$ $b_i(u) \neq b_i(w)$

$\Rightarrow$ u und w sind in verschiedenen Teilmengen V_k

$\Rightarrow$ Die nichtleeren unter den Teilmengen $V_0, \ldots, V_{2^m-1}$ bilden eine Partition von V in unabhängige Mengen (independent sets), also $2^m \geq \chi(G)$ bzw. $\ell(Z) = m \geq \lceil \log_2 \chi(G) \rceil$.

- Damit wurde erstmal eine untere Schranke gezeigt.
- Als nächstes wird gezeigt, dass der Wert $\lceil \log_2 \chi(G) \rceil$ auch tatsächlich durch ein Slicing Z^* erreicht werden kann.

Länge von Slicings

Beweis.

- Sei $V_0, \ldots, V_{\chi(G)-1}$ eine Partition von V in $\chi(G)$ unabhängige Mengen (independent sets) und sei $m = \lceil \log_2 \chi(G) \rceil$.
- Sei A_i die Vereinigung derjenigen V_k, deren Binärdarstellung den Term 2^{i-1} enthält, also

$$A_i = \bigcup \{ V_k : \lfloor k/2^{i-1} \rfloor \equiv 1 \bmod 2 \} \quad \text{für } i = \{1, \ldots, m\}$$

  und $\bar{A}_i = V \setminus A_i$
- Sei wie zuvor $C_1 = (A_1, \bar{A}_1)$ und $C_i = (A_i, \bar{A}_i)_i = (A_i, \bar{A}_i) - \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j$ für $i = 2, \ldots, m$.
- Für jedes $i = 1, 2, \ldots, m$ muss es eine Kante $\{u, w\} \in E$ mit $u \in V_0$, $w \in V_{2^{i-1}}$ geben, da sonst $V_0 \cup V_{2^{i-1}}$ eine unabhängige Menge ist (Widerspruch zur chromatischen Zahl $\chi(G)$)

Länge von Slicings

Beweis.

- Also gilt: $u \in \bar{A}_j$ für $j = 1, \ldots, m$,
  sowie $w \in \bar{A}_j$ für $j = 1, \ldots, i-1$ und $w \in A_i$

$\Rightarrow \{u, w\} \in (A_i, \bar{A}_i)_i = C_i$

$\Rightarrow$ kein C_i ist leer

- Für $\{u, w\} \in E$ gilt außerdem $u \in V_k$ und $w \in V_j$ für ein Paar $k \neq j$.
- Sei i ein Index, so dass die Binärdarstellungen von k und j sich im Term 2^{i-1} unterscheiden.

$\Rightarrow u \in A_i$ und $w \in \bar{A}_i$ oder $u \in \bar{A}_i$ und $w \in A_i$

$\Rightarrow \{u, w\} \in (A_i, \bar{A}_i) = \bigcup_{n=1}^{i} C_n$

$\Rightarrow E \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} C_i$ und $Z^* = (C_1, C_2, \ldots, C_m)$ ist Slicing von G mit $\ell(Z^*) = m = \lceil \log_2 \chi(G) \rceil$

Weite von Slicings

Definition

Die Weite eines Slicings Z des Graphen G sei

$$w(Z) = \max\{|C| : C \text{ ist ein Cut des Slicings } Z\}$$

Jeder Cut C von Z mit $|C| = w(Z)$ heißt Wide Cut des Slicings Z.

- Ein MinCut bezieht sich auf den Graphen, während ein Wide Cut sich auf ein bestimmtes Slicing bezieht.

Weite von Slicings

- Da jeder Cut $C_i = (A_i, \bar{A}_i)_i$ eines Slicings Z von G in einem Cut $(A_i, \bar{A}_i)$ von G enthalten ist, und da jedes Slicing mit einem beliebigem Cut von G beginnen kann, muss die maximale Weite eines Cuts gleich der maximalen Anzahl von Kanten in einem beliebigen Cut sein.

Satz

Für jeden Graphen mit $|E(G)| \geq 1$ *gilt:*

$$\max\{w(Z) : \ Z \text{ ist Slicing von } G\} \ = \ \max\{|C| : \ C \text{ ist Cut von } G\}$$

Weite von Slicings

- Die minimale Weite eines Slicings ist ähnlich verwandt zu MinCuts, aber nicht vom ganzen Graphen G.

Satz

Für jeden Graphen mit $|E(G)| \geq 1$ gilt:

$$\min\{w(Z) : Z \text{ ist Slicing von } G\} = \sigma(G)$$

$\Rightarrow$ Dualität zwischen Slicings und Subgraphen:

$$\min_{Z} \max_{C}\{|C| : C \text{ ist Cut des Slicings } Z \text{ von } G\} =$$
$$\max_{G'} \min_{C}\{|C| : C \text{ ist Cut des Teilgraphen } G' \text{ von } G\}$$

Weite von Slicings

Beweis.

(Ungleichung in beiden Richtungen)

$\min\{w(Z) : Z \text{ ist Slicing von } G\} \quad \geq$
$\max\{\lambda(G') : G' \text{ ist Teilgraph von } G\} = \sigma(G)$:

- Sei K ein Cluster von G mit $\lambda(K) = \sigma(K)$.
- Dann gilt für jedes Slicing Z von G, dass es einen ersten Cut C_i gibt, der Knoten von K separiert.
- Dann muss C_i einen Cut für K enthalten, so dass $|C_i| \geq \lambda(K) = \sigma(G)$.
- Also gilt $w(Z) \geq \sigma(Z)$ für jedes Slicing Z.

Weite von Slicings

Beweis.

$\min\{w(Z) : Z \text{ ist Slicing von } G\} \quad \leq$
$\max\{\lambda(G') : G' \text{ ist Teilgraph von } G\} = \sigma(G)$:

- Sei $Z^* = (C_1, \ldots, C_m)$ ein Narrow Slicing von G mit Wide Cut C_i.
- Sei G_i der Teilgraph von G, der durch C_i zertrennt wird.
- Da ein Narrow Slicing nur Minimum Cuts benutzt, folgt $\lambda(G_i) = w(Z^*)$.

Weite von Slicings

- Die Weite eines Slicings muss größer oder gleich der durchschnittlichen Anzahl der Kanten in den Cuts des Slicings sein.
- Aus dem letzten Satz und dem Satz über die maximale Länge eines Slicings folgt damit die folgende untere Schranke für die Stärke $\sigma(G)$:

Folgerung

Für jeden Graphen mit $|E(G)| \geq 1$ *gilt:*

$$\sigma(G) \geq \frac{|E(G)|}{|V(G)|-1} > |E(G)|/|V(G)|$$

Narrow Slicings

- Im Beweis des letzten Satzes war jedes Narrow Slicing ausreichend, um die Ungleichung der zweiten Richtung zu beweisen. Deshalb gelten folgende Korollare:

Folgerung

Für jedes Narrow Slicing Z^* von G gilt: $w(Z^*) = \sigma(G)$.

Folgerung

Jeder Wide Cut eines Narrow Slicings von G ist ein Minimum Cut eines Subclusters von G.

Narrow Slicings und k-Komponenten

Die nächsten zwei Folgerungen zeigen, dass man ein Narrow Slicing benutzen kann, um die k-Komponenten ($k \geq 1$) und die Zusammenhangsfunktion zu berechnen.

Folgerung

Seien $G[A_1]$, $G[A_2]$,...,$G[A_m]$ die Teilgraphen, die durch das Narrow Slicing $Z = (C_1, C_2, \ldots, C_m)$ getrennt werden.
Dann ist jede k-Komponente von G gleich einem $G[A_i]$ für ein $i \in \{1, \ldots, m\}$.
Weiterhin ist ein $G[A_i]$ ($i \in \{1, \ldots, m\}$) genau dann eine k-Komponente von G, wenn

$$A_j \supset A_i \text{ für } j < i \Rightarrow |C_j| < |C_i|.$$

Und solch ein $G[A_i]$ ist genau dann ein Cluster von G, wenn auch gilt

$$A_j \subset A_i \text{ für } j > i \Rightarrow |C_j| \leq |C_i|.$$

Narrow Slicings und k-Komponenten

Beweis.

- Seien $G[A_1], \ldots, G[A_m]$ die Teilgraphen, die durch das Narrow Slicing $Z = (C_1, C_2, \ldots, C_m)$ getrennt werden, so dass $\lambda(G[A_i]) = |C_i|$ $(i \in \{1, \ldots, m\})$.
- Sei H eine k-Komponente von G für ein $k \in \{1, \ldots, \sigma(G)\}$.
- Dann muss der erste Cut C_n aus Z, der Knoten aus H separiert, einen Cut von H enthalten, also $|C_n| = \lambda(G[A_n]) \geq \lambda(H)$.
- Da H zusammenhängend ist, muss H ein Teilgraph von $G[A_n]$ sein, weil C_n der erste Cut ist, der Knoten aus H separiert.

$\Rightarrow$ $G[A_n]$ ist ein $\lambda(H)$-kanten-zusammenhängender Graph $(\lambda(H) \leq \lambda(G[A_n]))$.

- Da H ein maximaler $\lambda(H)$-kanten-zusammenhängender Graph (per Def.) sowie ein Teilgraph von $G[A_n]$ ist, gilt $H = G[A_n]$.

Narrow Slicings und k-Komponenten

Beweis.

- $G[A_i]$ $(i \in \{1, \ldots, m\})$ ist in einer $\lambda(G[A_i])$-Komponente H von G enthalten, und aufgrund des vorangegangenen Arguments gilt $H = G[A_j]$ für ein $j \leq i$.
- Also ist $G[A_i]$ selbst eine $\lambda(G[A_i])$-Komponente von G genau dann, wenn $A_j \supset A_i$ für $j < i$ impliziert, dass $|C_j| < |C_i|$.
- Falls weiterhin $G[A_i]$ eine $\lambda(G[A_i])$-Komponente ist, dann handelt es sich genau dann um ein Cluster, wenn $A_j \subset A_i$ für $j > i$ impliziert, dass $|C_j| \leq |C_i|$.

$\Rightarrow$ Die Teilgraphen, die durch ein beliebiges Narrow Slicing von G zertrennt werden, enthalten alle k-Komponenten von G, und damit alle Cluster von G, die keine isolierten Knoten sind.

Narrow Slicings und Kohäsionsfunktion

Folgerung

Seien $G[A_1]$, $G[A_2]$,..., $G[A_m]$ die Teilgraphen, die durch das Narrow Slicing $Z = (C_1, C_2, \ldots, C_m)$ getrennt werden.
Dann gilt für jedes Graphelement $x \in V(G) \cup E(G)$:

$$h(x) = \begin{cases} 0, \text{ falls } x \text{ ein isolierter Knoten in } G \text{ ist,} \\ \max_i\{|C_i| : x \in A_i \cup E(G[A_i])\}, \text{ sonst} \end{cases}$$

- Wenn $G[A_1], \ldots, G[A_m]$ die Subgraphen sind, die durch ein Narrow Slicing $Z = (C_1, \ldots, C_m)$ von G zertrennt werden, dann müssen nicht alle m Subgraphen $G[A_i]$ k-Komponenten sein.
- Insbesondere, wenn $G[A_i]$ ein Cluster mit $\lambda(G[A_i]) \geq 2$ ist, dann sind mindestens $\lambda(G[A_i]) - 1$ der Teilgraphen $G[A_j]$ mit $j > i$ echte Teilgraphen von $G[A_i]$ und können demzufolge keine k-Komponenten von G für ein $k \geq 1$ sein.

Berechnung der Zusammenhangsfunktion

- Der Algorithmus basiert auf der sequentiellen Bestimmung von globalen Minimum Cuts für höchstens $|V(G)| - 1$ induzierte Teilgraphen von G.

Narrow Slicing Algorithmus

Algorithmus 19 : Berechnung eines Narrow Slicings (Matula)

Input : Graph $G = (V, E)$ mit N Komponenten und mindestens einer Kante
Output : Ein Narrow Slicing Z

Repräsentiere G als Vereinigung seiner Komponenten $G = \bigcup_{j=1}^{N} G[P_{1,j}]$;
$i \leftarrow 1$;
while $i < |V(G)| - N$ **do**
  Wähle $G_i = G[P_{i,k}]$ für ein k, so dass $|P_{i,k}| \geq 2$;
  Finde einen MinCut $C_i = (A, \bar{A})$ von G_i. (Beachte $A \cup \bar{A} = V(G_i)$);
  Definiere neue Komponenten-Knoten-Partition $\{P_{i+1,j}\}$ $(j \in \{1, \ldots, N + i\})$:

$$P_{i+1,j} = \begin{cases} P_{i,j} & \text{für } 1 \leq j < k, \\ A & \text{für } j = k, \\ \bar{A} & \text{für } j = k+1, \\ P_{i,j-1} & \text{für } k+1 < j \leq N+i, \end{cases} \quad \text{mit } G - \bigcup_{n=1}^{i} C_n = \bigcup_{j=1}^{N+i} G[P_{i+1,j}];$$

  $i \leftarrow i + 1$;

$G - \bigcup_{n=1}^{|V(G)|-N} C_n$ besteht jetzt nur noch aus isolierten Knoten und
$Z = (C_1, \ldots, C_{|V(G)|-N})$ ist ein Narrow Slicing;
return Z;

Narrow Slicing Algorithmus

- Ursprünglich wurde von Matula vorgeschlagen, den MinCut mit Hilfe des Cut Trees von Gomory/Hu zu berechnen.

  Hier kann man aber auch andere Algorithmen einsetzen, z.B. den Stoer/Wagner-Algorithmus.

- Der Narrow Slicing Algorithmus bestimmt explizit ein Narrow Slicing $Z = (C_1, \ldots, C_{|V(G)|-N})$, eine Liste $G_1, \ldots, G_{|V(G)|-N}$ von induzierten Graphen, die durch das Slicing zertrennt werden, sowie die durch Z verursachte geschachtelte Sequenz von Komponenten-Knoten-Partitionen.

- Daraus können dann entsprechend den früheren Sätzen sehr einfach die Zusammenhangsfunktion, die k-Komponenten und die Cluster von G bestimmt werden.

Narrow Slicing Algorithmus

- $G_i = G[P_{i,k}]$ hat höchstens $|V(G)| + 2 - N - i$ Knoten.
- Also müssten bei Verwendung der Cut Tree Methode höchstens

$$\sum_{i=1}^{|V(G)|-N} (|V(G)| + 1 - N - i) = \frac{1}{2}(|V(G)| - N)(|V(G)| - N + 1)$$

  Flussprobleme einfacher Art gelöst werden.
- Für einen zusammenhängenden Graphen wären das höchstens $\binom{|V(G)|}{2}$ Flussprobleme.
- Matula gibt die Komplexität grob mit n^4 bis n^5 an.
- Das entspricht auch ungefähr der Größenordnung, die man bei Verwendung des Stoer/Wagner-Algorithmusses errechnen würde ($\mathcal{O}(m_i n_i + n_i^2 \log n_i)$ pro Teilproblem mit n_i Knoten und m_i Kanten, summiert für $n_i = n - 1, \ldots, 1$)