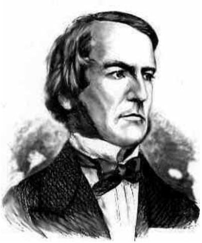

George Boole

lived from 1815 to 1864

Boole approached logic in a new way reducing it to a simple algebra, incorporating logic into mathematics. He also worked on differential equations, the calculus of finite differences and general methods in probability.

more on George Boole

Logik

- Logik ist die Wissenschaft des (begrifflichen) Schließens. Sie untersucht, welche Inferenzen korrekt sind.
- Unter Inferenz verstehen wir (informell) eine Aussage der Form:

  wenn A gilt/wahr ist, dann auch B.

- Alternative Sprechweisen:
  - „Wenn A, dann B"
  - „Aus A folgt B", „B ist eine Folge von A"
  - „A impliziert B", „$A \Rightarrow B$"
  - „Wenn B nicht gilt, dann kann auch A nicht gelten"
- Dabei heißt A jeweils die Annahme (Prämisse, Antezedens, Hypothese) und B die Konklusion (Folgerung, Conclusio, Konsequenz).

Bemerkung:

- Unter einer Implikation versteht man gewöhnlich einen Ausdruck/eine Behauptung der Form

$$\text{aus } A \text{ folgt } B \qquad \text{bzw.} \qquad A \Rightarrow B\,.$$

- Unter einer Inferenz versteht man den Vorgang, (im Rahmen einer Logik) für A und B (wie oben) von der Aussage/Behauptung A zu der Aussage/Behauptung B zu kommen.

Achtung!

Wenn (irgendwie) eine Implikation

$$\text{aus } A \text{ folgt } B$$

gilt/wahr ist, so heißt das von sich aus noch nicht, dass

- A gilt/wahr ist, oder
- B gilt/wahr ist.

Es sagt nur, dass, wenn A gilt, dann auch B.

Aussagenlogik (Propositional Logic)

- Aussagen werden aus einer vorgegebenen Menge von atomaren Aussagen (Platzhaltern für Aussagen) mit Hilfe der Operatoren (Konnektoren, Junktoren) „und“, „oder“, „nicht“ und „wenn, ... dann“(u.a.) gebildet.
- Atomare (aussagenlogische) Aussagen sind entweder wahr oder falsch.
- Die Grundlagen der Aussagenlogik wurden von George Boole („The Laws of Thought“, 1854) entwickelt (s.o.). Man spricht deshalb auch von der Booleschen Logik.

Formalismen der Aussagenlogik

- Die Aussagenlogik (wie jede Logik) bildet eine formale Sprache.
- Eine formale Sprache wird durch ihre Syntax und ihre Semantik definiert.
- Die Syntax der Sprache legt durch Regeln fest, welche Zeichenketten wohlgeformte Ausdrücke sind.
  Die wohlgeformten Ausdrücke einer Logik heißen Formeln.
- Die Semantik legt die Bedeutung der Ausdrücke fest.
  Eine formale Semantik ordnet jedem (wohlgeformten) Ausdruck ein mathematisches Objekt zu, welches die Bedeutung des Ausdrucks darstellt.

Syntax

- Eine formale Syntax besteht aus einem Vokabular und einer Menge von Formationsregeln/Bildungsgesetzen.
- Das Vokabular legt fest, welche Zeichen in Ausdrücken vorkommen dürfen
- Die Bildungsgesetze legen fest, welche Zeichenketten über dem Vokabular zulässig oder wohlgeformt sind (und welche nicht).

Syntax für die Aussagenlogik (ohne Quantoren)

1. true und false sind Formeln (alternativ: 1/0, wahr/falsch, ...);
2. eine Aussagenvariable (wie x oder p) ist eine Formel;
3. sind F und G Formeln, dann ist auch
   - $\neg F$ (alternative Darstellung: $\overline{F}$)
   - $(F \wedge G)$
   - $(F \vee G)$
   - $(F \Rightarrow G)$
   - (F)

   eine Formel;
4. Ein Ausdruck ist nur dann eine Formel, wenn er durch endlichmalige Anwendung der obenstehenden Regeln konstruiert werden kann.

Beispiele für aussagenlogische Formeln

- Beispiele für aussagenlogische Formeln sind:
  1. $(p \wedge q) \Rightarrow r$
  2. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
  3. $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$
  4. $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$
- Keine Formeln sind dagegen:
  1. $\vee(p \Rightarrow q)$
  2. $p \wedge q \vee r$

Semantik der Aussagenlogik

- Eine Belegung („eine Welt“) ist eine Funktion von einer Menge von Aussagenvariablen in die Menge $\{0, 1\}$ der Wahrheitswerte.
- Die Belegung $p \mapsto 0$, $q \mapsto 1$ ist eine Belegung für die Formel $p \Rightarrow q$.
- Unter der Belegung $p \mapsto 1$, $q \mapsto 0$ ist der Wert der Formel $p \Rightarrow q$ gleich 0 (oder **false**).
- Unter der Belegung $p \mapsto 0$, $q \mapsto 1$ ist der Wert der Formel $p \Rightarrow q$ gleich 1 (oder **true**).
- Die Semantik einer booleschen Formel ist ihr Wert unter allen möglichen Belegungen (der darin vorkommenden Variablen).

Wahrheitstabellen

Damit ergibt sich

- Die Formel $\neg p$ ergibt genau dann **wahr** wenn p mit $0/$**false** belegt wird.
- Die Formel $p \Rightarrow q$ ist genau dann **false**, wenn p gleich $1/$**true** und q gleich $0/$**false** ist.
- Wir sagen, dass eine Belegung eine Formel erfüllt, falls unter der Belegung der resultierende Wahrheitswert der Formel gleich $1/$**true** ist.

Allgemeingültige Aussagen

Definition 19

- Eine (aussagenlogische) Formel p heißt allgemeingültig (oder auch eine Tautologie), falls p unter jeder Belegung **wahr** ist.
- Eine (aussagenlogische) Formel p heißt erfüllbar, falls es (mindestens) eine Belegung gibt, unter der p **wahr** ist.

Damit folgt:

- Die Formel $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$ ist allgemeingültig (eine Tautologie).
- Die Formel **false** $\Rightarrow p$ ist allgemeingültig.
- Die Formel $(p \vee \neg q) \wedge \neg p$ ist erfüllbar.
- Die Formel $p \wedge q \wedge (p \Rightarrow \neg q)$ ist nicht erfüllbar.

Definition 20

- Unter dem Erfüllbarkeitsproblem (SAT) verstehen wir die Aufgabe, festzustellen, ob eine gegebene (aussagenlogische) Formel erfüllbar ist.
- Unter dem Tautologieproblem (TAUT) verstehen wir die Aufgabe, festzustellen, ob eine gegebene (aussagenlogische) Formel eine Tautologie ist.

Boolesche Funktionen

Sei $\mathbb{B}$ die Menge $\{0, 1\}$ der booleschen Werte.
Jede n-stellige boolesche Funktion bildet jede Kombinationen der Werte der n Eingangsgrößen jeweils auf einen Funktionswert aus $\{0, 1\}$ ab.

$$f\ : \mathbb{B}^n \ni (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{B}$$

Beobachtung: Da $|\mathbb{B}| = 2$, gibt es genau 2^n verschiedene Tupel in $\mathbb{B}^n$.
Da wir für jedes dieser Tupel den Funktionswert beliebig $\in \mathbb{B}$ wählen können, gibt es genau 2^{2^n} verschiedene (totale) Boolesche Funktionen mit n Argumenten.

Boolesche Funktionen mit einem Argument

Nach der obigen Formel gibt es $2^{2^1} = 4$ boolesche Funktionen mit einem Argument:

x	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

f_1: „falsch"-Funktion
f_2: „wahr"-Funktion
f_3: Identität
f_4: Negation

Wir betrachten nun die Menge aller zweistelligen booleschen Funktionen.

(Unäre und) binäre Verknüpfungen boolescher Werte:

			$\vee$	$\Leftarrow$		$\Rightarrow$		$\equiv$ $=$	$\wedge$	nand	$\not\equiv$ $\neq$					nor	
t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	f	f	f	f	f	f	f	f
t	f	t	t	t	t	f	f	f	f	t	t	t	t	f	f	f	f
f	t	t	t	f	f	t	t	f	f	t	t	f	f	t	t	f	f
f	f	t	f	t	f	t	f	t	f	t	f	t	f	t	f	t	f