Satz 184 (Vandermonde-Identität)

$$\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k} \cdot \binom{y}{n-k} \qquad n \in \mathbb{N}_0, x, y \in \mathbb{C}$$

Beweis:

Seien zunächst $x, y \in \mathbb{N}$.

Zur Verdeutlichung sei z. B. x die Anzahl der Wahlmänner der Demokraten und y die Anzahl der Wahlmänner der Republikaner. $\binom{x+y}{n}$ ist dann die Anzahl der Möglichkeiten, aus $(x+y)$ Wahlmännern n auszuwählen. Dementsprechend ist $\binom{x}{k}$ die Anzahl der Möglichkeiten, aus x Demokraten k auszuwählen, und $\binom{y}{n-k}$ die Anzahl der Möglichkeiten, aus y Republikanern $(n-k)$ auszuwählen.

Damit überlegt man sich leicht, dass die Formel für $x, y \in \mathbb{N}$ gilt.

Beweis (Forts.):

Erweiterung auf $x, y \in \mathbb{C}$: Setze $y =$ const. Damit stehen links und rechts ein Polynom n-ten Grades in x:

$$p_l(x) \stackrel{!}{=} p_r(x)$$

Für $x \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$p_l(x) - p_r(x) = 0$$

Dieses Polynom hat unendlich viele Nullstellen. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra ist dann

$$p_l(x) - p_r(x) \equiv 0$$

Das heißt, $p_l(x)$ und $p_r(x)$ sind identisch. $\square$

4.7.2 Stirling-Zahlen der ersten Art

Lemma 185

Mit den zusätzlichen Festlegungen

$$s_{0,0} = 1$$

und

$$s_{n,k} = 0 \quad k \leq 0, n > 0$$

gilt:

$$s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1) \cdot s_{n-1,k} \qquad \forall n, k > 0 \,.$$

Beweis:

Für Permutationen auf $\{1, \ldots, n\}$ mit k Zyklen gilt:

Entweder: n bildet einen Zyklus der Länge 1:

$$\pi = \underbrace{(* \cdots *)(* \cdots *) \ldots}_{\substack{\text{Permutation auf} \\ \{1,\ldots,n-1\} \\ \text{mit } (k-1) \text{ Zyklen}}}(n)$$

Dafür gibt es $s_{n-1,k-1}$ Möglichkeiten.

Beweis (Forts.):

Oder: n ist in einem Zyklus der Länge ≥ 2 enthalten.
Streiche n aus dieser Permutation:

$$\pi' = \underbrace{(*^{\downarrow} \cdots *^{\downarrow})(*^{\downarrow} \cdots *^{\downarrow}) \ldots (*^{\downarrow} \cdots *^{\downarrow})}_{\substack{\text{Permutation auf} \\ \{1,\ldots,n-1\} \\ \text{mit } k \text{ Zyklen}}}$$

Die $^{\downarrow}$ bezeichnen Stellen, an denen n gestrichen worden sein könnte $\big($immer hinter der jeweiligen Zahl, da $(^{\downarrow}* \cdots *)$ zyklisch mit $(* \cdots *^{\downarrow})$ identisch ist$\big)$. Dafür gibt es $n-1$ mögliche Stellen. Damit ergeben sich hier $(n-1)s_{n-1,k}$ Möglichkeiten.
Die beiden Fälle sind disjunkt, also können die Möglichkeiten addiert werden. $\square$

Stirling-Dreieck der ersten Art

$s_{n,k}$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	2	3	1			
4	0	6	11	6	1		
5	0	24	50	35	10	1	
6	0	120	274	225	85	15	1

$$s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1) \cdot s_{n-1,k} \qquad \forall n,k > 0$$

Es gilt:

$$(\forall n \in \mathbb{N})\left[x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \cdot s_{n,k} \cdot x^k\right].$$

Beweis:

(Vollständige Induktion)

Induktionsanfang: $n = 0$

$$x^{\underline{0}} = 1 \stackrel{!}{=} \sum_{k=0}^{0} (-1)^{0-k} s_{0,k} \cdot x^k = s_{0,0} = 1$$

Beweis (Forts.):

Induktionsschluss: $n \mapsto n+1$

$$
\begin{aligned}
x^{\underline{n+1}} &= (x-n) \cdot x^{\underline{n}} \\
&\overset{\text{IA}}{=} (x-n) \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \cdot s_{n,k} \cdot x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \cdot s_{n,k} \cdot x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k+1} \cdot n \cdot s_{n,k} \cdot x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n-k+1} \cdot \left(s_{n,k-1} + n \cdot s_{n,k} \right) \cdot x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \cdot s_{n+1,k} \cdot x^k
\end{aligned}
$$

$\square$

4.7.3 Stirling-Zahlen der zweiten Art

Lemma 186

Es gilt:

$$\forall n, k \in \mathbb{N}_0 \quad S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k}\ .$$

Beweis:

Sei $N = \{1, \ldots, n\}$.

In einer Partition von N in k Teilmengen gilt

entweder: $\{n\}$ tritt als solches in der Partition auf:

$$\underbrace{N_1 \uplus N_2 \uplus \cdots \uplus N_{k-1}}_{\substack{\text{Partition von}\\ \{1,\ldots,n-1\}\\ \text{in } (k-1) \text{ Teilmengen}}} \uplus \{n\}$$

$\Rightarrow S_{n-1,k-1}$ Möglichkeiten

Beweis (Forts.):

oder: n ist in einem N_i mit ≥ 2 Elementen enthalten:

$$N_1 \uplus N_2 \uplus \ldots \uplus N_k$$

Streiche n. Betrachte:

$$\underbrace{N_1 \setminus \{n\} \uplus N_2 \setminus \{n\} \uplus \ldots \uplus N_k \setminus \{n\}}_{\text{Partition von } \{1,\ldots,n-1\} \text{ in } k \text{ Klassen}}$$

$\Rightarrow S_{n-1,k}$ Möglichkeiten. n kann an einer von k Stellen entfernt worden sein:

$\Rightarrow$ insgesamt $k \cdot S_{n-1,k}$ Möglichkeiten in diesem Fall. $\square$

Stirling-Dreieck der zweiten Art

$S_{n,k}$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	1	3	1			
4	0	1	7	6	1		
5	0	1	15	25	10	1	
6	0	1	31	90	65	15	1

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k}$$

Einige Eigenschaften:

$$\begin{aligned} S_{n,1} &= 1 \\ S_{n,2} &= \frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1 \\ S_{n,n-1} &= \binom{n}{2} \\ S_{n,n} &= 1 \end{aligned}$$

Bemerkung:

Es gibt auch andere Notationen für die Stirling-Zahlen zweiter Art, z. B.:

$$S_{n,k} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$$

z. B. in Graham, Knuth, Pataschnik: Concrete Mathematics

4.7.4 Auflistung von Permutationen

Definition 187

Seien $\pi = (\pi_1 \ \pi_2 \ \cdots \ \pi_n)$ und $\sigma = (\sigma_1 \ \sigma_2 \ \cdots \ \sigma_n)$ zwei Permutationen aus S_n, $\pi \neq \sigma$, als Wertevektor geschrieben (d.h. $\pi_i = \pi(i)$ etc.). Dann heißt π lexikographisch kleiner als σ, geschrieben $\pi < \sigma$, genau dann, wenn

$$(\exists 1 \leq k \leq n)(\forall 1 \leq i < k)\Big[\big(\pi_i = \sigma_i\big) \wedge \big(\pi_k < \sigma_k\big)\Big] \,.$$

Beispiel 188

$n = 3, N = \{1, 2, 3\}$:

$$(1 \ 2 \ 3) < (1 \ 3 \ 2) < (2 \ 1 \ 3) < (2 \ 3 \ 1) < (3 \ 1 \ 2) < (3 \ 2 \ 1)$$

Algorithmus zur Auflistung von S_n in lexikographischer Ordnung:

Gegeben: $N = \{1, 2, \ldots, n\}$

```
appendlexlist(string praefix, set N)
  if N={a} then print(praefix ∘ a)
  else
    for k ∈ N in aufsteigender Reihenfolge do
      appendlexlist(praefix ∘ k, N\{k})
    od
  fi
end
```

Aufruf: appendlexlist(λ, N)

Beispiel 189

$n = 3, N = \{1, 2, 3\}$:

$$(1\ 2\ 3) < (1\ 3\ 2) < (2\ 1\ 3) < (2\ 3\ 1) < (3\ 1\ 2) < (3\ 2\ 1)$$

4.7.5 Auflistung von Teilmengen

Sei $N = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, $|N| = n$.

Definition 190

Seien $A, B \subseteq N$, $A \neq B$. Dann heißt A lexikographisch kleiner als B, geschrieben $A < B$, wenn

$$\max\{A \triangle B\} \in B$$

Beispiel 191

$N = \{0, 1, 2\}$;

$$2^N = \big\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{1,0\}, \{2\}, \{2,0\}, \{2,1\}, \{2,1,0\}\big\}$$

Algorithmus zur Auflistung aller Teilmengen in lexikographischer Ordnung:

1. $N = \{0, \ldots, n-1\}$. Zähle die natürlichen Zahlen von 0 bis $2^n - 1$ in Binärschreibweise auf, fülle jede Binärzahl dabei mit führenden Nullen auf n Stellen auf.
2. Sei $a = a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_0$ ein Element der obigen Folge. Dann entspricht a die Teilmenge

$$N_a = N_{a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_0} = \left\{k \in N \colon 0 \le k \le n-1 \land a_k = 1\right\}$$

Algorithmus zur Auflistung aller Teilmengen in lexikographischer Ordnung, zweite Variante:

Sei $n \in \mathbb{N}$.

```
appendlexlist(set praefix, nat n)
  for k = 0, 1 do
    if k = 1 then praefix:=praefix ∪ {n} fi
    if n = 0 then print(praefix)
    else
      appendlexlist(praefix, n − 1)
    fi
  od
end
```

Aufruf: appendlexlist($\emptyset$, $n-1$)

4.7.6 Gray-Codes

Definition 192

Ein Gray-Code $GC(n)$, $n \in \mathbb{N}$, ist eine Permutation $(g_0, \ldots, g_{2^n-1})$ der Wörter in $\{0,1\}^n$, so dass sich zwei aufeinanderfolgende Wörter g_i und g_{i+1}, für alle $i = 0, \ldots, 2^n - 1$, in genau einer Position unterscheiden.
$GC(n)$ heißt zyklischer Gray-Code, falls die Bedingung auch für g_{2^n-1} und g_0 gilt.

$$\begin{aligned} GC(1) &:= (g_{1,0}, g_{1,1}) = (0, 1) \\ GC(n+1) &:= \big(0 \cdot g_{n,0}, 0 \cdot g_{n,1}, \ldots, 0 \cdot g_{n,2^n-1}, \\ &\qquad 1 \cdot g_{n,2^n-1}, \ldots, 1 \cdot g_{n,0}\big) \end{aligned}$$

Beispiel 193

$$GC(3) = (000\ 001\ 011\ 010\ 110\ 111\ 101\ 100)$$

Lemma 194

1. *$GC(n)$ hat Länge 2^n.*
2. $\{g_{n,0}, \ldots, g_{n,2^n-1}\} = \{0,1\}^n$.
3. *für alle k unterscheidet sich $g_{n,k}$ von $g_{n,(k+1) \bmod 2^n}$ in genau einem Bit.*

Beweis:

Folgt direkt aus der Definition. $\square$

4.8 Summation und Differenzenoperator

4.8.1 Direkte Methoden

1. Indextransformation:

Sei $i \geq 0$, dann gilt:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{k=n} a_k = \sum_{k-i=m}^{k-i=n} a_{k-i} = \sum_{k=m+i}^{k=n+i} a_{k-i} = \sum_{k=m+i}^{n+i} a_{k-i}$$

Beispiel 195

$$S_n = 0 \cdot a + 1 \cdot a + 2 \cdot a + \cdots + n \cdot a = \sum_{k=0}^{n} k \cdot a$$

Indextransformation: $k \mapsto n - k$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (n - k) \cdot a$$

Beispiel (Forts.)

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (n-k) \cdot a$$

also:

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{n} k \cdot a + \sum_{k=0}^{n} (n-k) \cdot a \right) \\
&= \frac{n \cdot a}{2} \cdot \sum_{k=0}^{n} 1 \\
&= \frac{n \cdot (n+1)}{2} \cdot a = \binom{n+1}{2} \cdot a
\end{aligned}$$