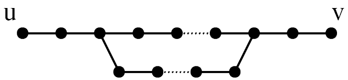
## Beweis:

$1. \Rightarrow 2.$

Seien $u, v \in V$, $u \neq v$. Da $G$ zusammenhängend ist, muss mindestens ein Pfad zwischen $u$ und $v$ existieren.

Widerspruchsannahme: Es gibt zwei verschiedene Pfade zwischen $u$ und $v$.




Dann gibt es einen Kreis in $G$, was einen Widerspruch zur Annahme darstellt.

## Beweis (Forts.):

$2. \Rightarrow 3.$ Beweis durch Induktion:

Dass $G$ zusammenhängend und $V$ nichtleer sein muss, ist klar. Für $|E| = 0$ gilt $|V| = 1$ (Induktionsanfang).

$G$ muss einen Knoten mit Grad 1 enthalten: Wähle $u \in V$ beliebig. Wähle einen Nachbarn $u_1$ von $u$. Falls $deg(u_1) > 1$, wähle einen Nachbarn $u_2 \neq u$ von $u_1$ usw. Da $V$ endlich und $G$ zusammenhängend und kreisfrei ist (sonst gäbe es ein Knotenpaar mit zwei verschiedenen einfachen Pfaden dazwischen), kommt man so schließlich zu einem Blatt (Knoten mit Grad 1).

Entfernt man dieses Blatt (sowie die inzidente Kante) und wendet auf den entstehenden Graphen die IV an, erhält man:

$$\big(|V| - 1\big) - 1 = |E| - 1$$

Damit ist bewiesen, dass $|V| = |E| + 1$.

## Beweis (Forts.):

$3. \Rightarrow 1.$

Sei nun $G$ zusammenhängend mit $|V| = |E| + 1$.
Zu zeigen: $G$ ist kreisfrei.
Widerspruchsannahme: $G$ enthält einen einfachen Kreis $C = (V_C, E_C)$.
Da wir $G$ aufbauen können, indem wir die Knoten in $V \setminus V_C$ mit jeweils einer neuen Kante hinzufügen und zum Schluss noch eventuell übrig gebliebene Kanten hinzufügen, gilt:

$$|V| = |V_C| + |V \setminus V_C| \leq |E_C| + |E \setminus E_C| = |E|$$

Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $|V| = |E| + 1$.

$\square$

## Korollar 273

*Seien* $T = (V, E)$ *ein Baum mit* $|V| = n$ *und* $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ *die Gradfolge von* $T$*, dann gilt:*

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2 \cdot |E| = 2n - 2$$

## 2.12 Spannbäume

**Definition 274**

Ein Teilgraph $T = (V', E')$ von $G = (V, E)$ heißt Spannbaum von $G$, falls $T$ ein Baum und $V' = V$ ist.

## Satz 275 (Arthur Cayley, 1889)

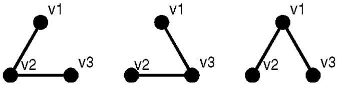
*Sei $t(n)$ die Anzahl der verschiedenen markierten Bäume mit Knotenmenge $\{1,\ldots,n\}$. Dann gilt:*

$$t(n) = n^{n-2}$$

## Beispiel 276

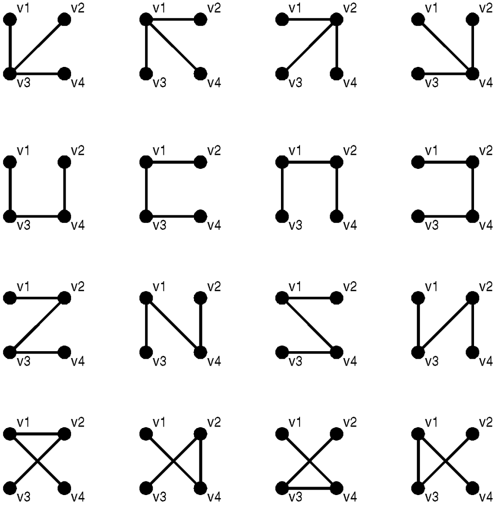
- $n = 2$:

- $n = 3$:



# Beispiel (Forts.)

- $n = 4$:



Beweis:

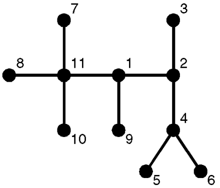
Wir geben eine Bijektion zwischen der Menge $\mathcal{T}(n)$ der markierten Spannbäume mit $n$ Knoten und der Menge $\{1, \ldots, n\}^{n-2}$ an.
(Diese Bijektion geht auf H. Prüfer zurück; man bezeichnet sie deshalb auch als Prüfer-Code.)

## Beweis (Forts.):

Sei $T \in \mathcal{T}(n)$. Konstruiere $(a_1, \ldots, a_{n-2})$, $a_i \in \{1, \ldots, n\}$, wie folgt:

> **for** $i = 1$ **to** $n-2$ **do**
>     $v_i :=$ `Blatt mit minimalem Index`
>     $a_i :=$ `Index des Nachbarn von` $v_i$ `in` $T$
>     $T := T \setminus \{v_i\}$
> **od**

## Beispiel 277




Prüfer-Code: $(2, 4, 4, 2, 1, 11, 11, 1, 11)$

## Beweis (Forts.):

Sei $(a_1, \ldots, a_{n-2}) \in \{1, \ldots, n\}^{n-2}$; $f_i$ sei die Anzahl des Auftretens von $i$ in $(a_1, \ldots, a_{n-2})$. Wenn ein Blatt, das Nachbar von $a_i$ ist, im Algorithmus gestrichen wird, ist $a_i$ nicht das kleinste Blatt, sondern innerer Knoten:

$$d(a_i) \geq f_i + 1$$

Da

$$n - 2 = \sum_{i=1}^{n} f_i \leq \sum_{i=1}^{n} \bigl(d(v_i) - 1\bigr) = 2n - 2 - n = n - 2$$

gilt

$$(\forall i)\Bigl[f_i = d(a_i) - 1\Bigr]$$

Also ergeben sich aus den $f_i$ die Knotengrade. Insbesondere sind die Knoten mit $f_i = 0$ (also die, die nicht im Code auftauchen), genau die Blätter des Baumes.

## Beweis (Forts.):

**Umkehrabbildung:** Gegeben $(a_1, \ldots, a_{n-2}) \in \{1, \ldots, n\}^{n-2}$

**for** $i = 1$ **to** $n$ **do**
  $d(v_i) := f_i + 1$
**od**
$B := \emptyset$; $T := \emptyset$
**for** $i = 1$ **to** $n - 2$ **do**
  $b := \min\limits_{1 \le j \le n} \{j;\ j \notin \{a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{n-2}\} \cup B\}$
  `füge Kante` $(b, a_i)$ `zu` $T$ `hinzu`
  $B := B \cup \{b\}$
**od**
`füge letzte Kante zu` $T$ `gemäß Gradbedingung hinzu`

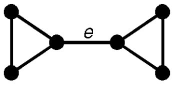
$\square$

## 2.13 Brücken

### Definition 278

Eine Kante $e$ eines Graphen $G = (V, E)$ heißt Brücke, falls $G' = \big(V, E \setminus \{e\}\big)$ mehr Zusammenhangskomponenten hat als $G$.

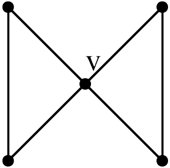
### Beispiel 279




**Beobachtung:**

Eine Kante $e$ ist genau dann eine Brücke, wenn es keinen (einfachen) Kreis gibt, der $e$ enthält.

**Anmerkung:** (ohne Definition)
Der Knoten $v$ in der folgenden Abbildung ist ein Artikulationsknoten:



## 2.14 Abstand

### Definition 280

Seien $u, v$ zwei Knoten und $P$ ein Pfad in $G$ von $u$ nach $v$ mit einer minimalen Anzahl $k$ von Kanten. Dann heißt

$$\mathrm{d}(u, v) := k$$

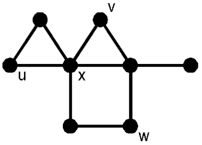
der Abstand von $u$ und $v$ in $G$.

Wir setzen $\mathrm{d}(u, v) := \infty$, falls $u$ und $v$ in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von $G$ liegen.

$$\mathsf{D}(G) := \max\{\mathrm{d}(u, v); u, v \in V\}$$

heißt der Durchmesser des Graphen $G$.

# Beispiel 281




$\mathrm{d}(u,v) = 2$, $\mathrm{d}(u,w) = 3$, $\mathrm{d}(u,x) = 1$, $\mathsf{D}(G) = 3$.

**Beobachtung:**

$\mathrm{d}$ erfüllt die Dreiecksungleichung, ist also eine Metrik:

$$\mathrm{d}(u,v) \leq \mathrm{d}(u,w) + \mathrm{d}(w,v)$$

## 2.15 Adjazenzmatrix

### Definition 282

Sei $G = (V, E)$, $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Dann heißt

$$A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \quad \text{mit } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Adjazenzmatrix von $G$.

**Beobachtungen:**

- Für ungerichtete Graphen ist die Adjazenzmatrix symmetrisch.
- Gibt es keine Schlingen, so sind alle Diagonalelemente null.

## Satz 283

*Sei $A$ die Adjazenzmatrix von $G = (V, E)$, $|V| = n$, und sei*

$$\begin{aligned} A^0 &:= I, \\ A^{i+1} &:= A^i \cdot A \qquad \text{für alle } i \geq 0. \end{aligned}$$

*Dann gilt für*

$$A^k = \left(a_{ij}{}^{(k)}\right)_{1 \leq i,j \leq n}:$$

*$a_{i,j}{}^{(k)}$ ist die Anzahl verschiedener Pfade der Länge $k$ in $G$ von $v_i$ nach $v_j$.*

Achtung: Die Länge eines Pfades wird hier durch die Länge seiner Kanten- und nicht der Knotenfolge angegeben!

Beweis:

Induktion nach $k$:

Induktionsanfang: $k = 0$ und $k = 1$ sind trivial.

Induktionsschluss: $k \mapsto k + 1$

${a_{il}}^{(k)}$ ist nach Induktionsvoraussetzung die Anzahl verschiedener Pfade der Länge $k$ von $v_i$ nach $v_l$.

Die Anzahl verschiedener Pfade von $v_i$ nach $v_j$ der Länge $k + 1$ lässt sich wie folgt berechnen:

$$\sum_{l=1}^{n} {a_{il}}^{(k)} \cdot a_{lj} = {a_{ij}}^{(k+1)}$$

$\square$

**Bemerkung:**

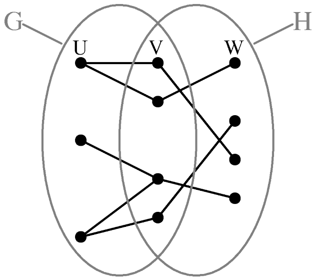
Adjazenzmatrix von bipartiten Graphen

Sei $G = (U, V, E)$ mit $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ und $V = \{v_1, \ldots, v_m\}$ ein bipartiter Graph. Dann heißt

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} \quad \text{mit } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{u_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Adjazenzmatrix von $G$.

Werden zwei bipartite Graphen zusammengesetzt, zum Beispiel:




berechnet sich die Adjazenzmatrix $A'$ des bipartiten Graphen $G' = (U, W, E')$, mit

$$\{u, w\} \in E' \iff (\exists v \in V)[\{u, v\} \text{ in } G \text{ und } \{v, w\} \text{ in } H]$$

als das boolesche Produkt $A_G \cdot A_H$:

Wir betrachten einfache ungerichtete Graphen.

## Definition 284

Seien $A \in \mathbb{B}^{m,k}$, $B \in \mathbb{B}^{k,n}$ zwei boolesche Matrizen, interpretiert als $0, 1$-Matrizen. Dann ist das boolesche Produkt $C = AB$ der beiden Matrizen gegeben durch

$$c_{i,j} = \bigvee_{l=1}^{k} a_{i,l} \wedge b_{l,j} \qquad \text{für } i \in [m], j \in [n]$$

## 2.16 Inzidenzmatrix

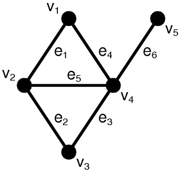
### Definition 285

Sei $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$.
Dann heißt

$$B = \left(b_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} \quad \text{mit} \quad b_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i \in e_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Inzidenzmatrix von $G$.

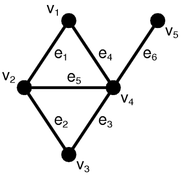
# Beispiel 286 (Adjazenz- und Inzidenzmatrix)




Adjazenzmatrix:

$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

# Beispiel (Adjazenz- und Inzidenzmatrix)




*Inzidenzmatrix:*

$$B = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

**Beobachtung:**

$$B \cdot B^T = \begin{pmatrix} \mathrm{d}(v_1) & & & \\ & \mathrm{d}(v_2) & & \text{0} \\ & & \ddots & \\ \text{0} & & & \mathrm{d}(v_n) \end{pmatrix} + A$$

# 3. Definitionen für gerichtete Graphen

## 3.1 Digraph

Definition 287

Ein Digraph (aka gerichteter Graph, engl. *directed graph*) $G = (V, A)$ besteht aus einer Knotenmenge $V$ und einer Menge $A \subseteq V \times V$ von geordneten Paaren, den gerichteten Kanten.

## 3.2 Grad

### Definition 288

- $\mathrm{d}^{-}(v)$ ist der Aus-Grad von $v$, d. h. die Anzahl der Kanten mit Anfangsknoten $v$.
- $\mathrm{d}^{+}(v)$ ist der In-Grad von $v$, d. h. die Anzahl der Kanten mit Endknoten $v$.
- $\mathrm{d}(v) = \mathrm{d}^{-}(v) + \mathrm{d}^{+}(v)$ ist der (Gesamt-)Grad von $v$.

**Beobachtung:**

$$\sum_{v \in V} \mathrm{d}^{-}(v) = \sum_{v \in V} \mathrm{d}^{+}(v) = |A|$$

## 3.3 Adjazenzmatrix

**Definition 289**

Sei $G = (V, A)$ ein Digraph mit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Dann heißt

$$C = \left(c_{ij}\right)_{1 \le i,j \le n} \quad \text{mit } c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (v_i, v_j) \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Adjazenzmatrix von $G$.

Falls $G$ schlingenfrei ist, sind alle Diagonalelemente von $C$ gleich $0$.

## 3.4 Inzidenzmatrix

**Definition 290**

Sei $G = (V, A)$ ein einfacher(!) Digraph mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $A = \{e_1, \ldots, e_m\}$. Dann heißt

$$B = \left(b_{ij}\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} \text{ mit } b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i \text{ Endknoten von } e_j \\ -1 & \text{falls } v_i \text{ Anfangsknoten von } e_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Inzidenzmatrix von $G$.

**Beobachtung:**

$$B \cdot B^T = \begin{pmatrix} \mathrm{d}(v_1) & & & 0 \\ & \mathrm{d}(v_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathrm{d}(v_n) \end{pmatrix} - A'$$

Diese Matrix heißt Laplacesche Matrix. Dabei ist, für alle $i, j$, der Eintrag $a'_{i,j}$ die Anzahl der im zu $G$ gehörigen ungerichteten Graphen zwischen $v_i$ und $v_j$ verlaufenden Kanten. Enthält $G$ keine antiparallelen Kanten, ist damit $A'$ gleich der Adjazenzmatrix dieses ungerichteten Graphen.

**Beobachtung:** Die Laplacesche Matrix ist symmetrisch.