

WS 2010/11

Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Strukturen

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

<http://www14.in.tum.de/lehre/2010WS/ds/uebung/>

26. Januar 2011

ZÜ XII

Übersicht:

1. Thema: Arbeitsblatt 3, Rekursionsgleichungen.
2. Vorbereitung: auf TA's Blatt 13

1. Thema: Arbeitsblatt, Rekursionsgleichungen

1.1 Beispiele von Rekursionen

Erinnerung:

[Lukaszahlen](#) auf Übungsblatt 6, HA 1:

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir

$$L_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n .$$

- ① Zeigen Sie mit direktem Beweis für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$L_{n+1} = L_n + L_{n-1} .$$

- ② Man zeige mit vollständiger Induktion, dass L_n für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ eine natürliche Zahl ist.

Schreibweise der **Rekursion** nach Vorlesung:

$$f_{n+2} - f_{n+1} - f_n = 0, \quad \forall n \geq 0.$$

Die Rekursion kann als **induktive Definition** einer Folge $(f_n)_{n \geq 0}$ dienen.

Die Rekursionsgleichung hat die folgenden Eigenschaften:

linear: multiplikative Koeffizienten

konstante Koeffizienten: 1,-1,-1

homogen: rechte Seite ist gleich 0

Ordnung 2: bis zum 2ten Indexvorgänger.

Anfangsbedingungen:

$$f_0 = 2, \quad f_1 = 1.$$

Lösung der vollständigen Rekursionsgleichung:

$$f_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n, \quad \forall n \geq 0.$$

Unter der *vollständigen Rekursionsgleichung* versteht man die **Rekursionsgleichung zusammen mit den Anfangsbedingungen** (siehe Arbeitsblatt 3).

Beispiel

Fibonaccizahlen:

Rekursionsgleichung wie bei Lukaszahlen.

Anfangsbedingungen: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$.

Lösung:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n, \quad \forall n \geq 0.$$

1.2 Arbeitsblatt 3: Lösung homogener linearer Rekursionen

Wir gehen aus von der homogenen linearen Rekursionsgleichung der Ordnung d mit konstanten Koeffizienten q_i für eine Folge $(f_n)_{n \geq 0}$

$$f_{n+d} + q_1 \cdot f_{n+d-1} + \dots + q_d \cdot f_n = 0, \quad \forall n \geq 0. \quad (1)$$

Allgemeine Lösung

Eine Gleichung „allgemein Lösen“ heißt, ein Verfahren anzugeben, mit dem man alle Lösungen darstellen kann.

Die **Darstellungen** enthalten dann in der Regel gewisse **Parameter**.

Zur allgemeinen Lösung der Gleichung (??)
stellen wir zunächst das **charakteristische Polynom** $q^R(z)$ auf
und bestimmen dessen **Nullstellen**.

$$q^R(z) = z^d + q_1 z^{d-1} + \dots + q_{d-1} z + q_d. \quad (2)$$

Die (i. A. komplexen) Nullstellen von $q^R(z)$ seien
 α_i mit Vielfachheit d_i für $i = 1, 2, \dots, k$ und $\sum_{i=1}^k d_i = d$.

Die Anzahl verschiedener Nullstellen sei also k .

Berücksichtigt man die Vielfachheit der Nullstellen,
so zählt man d **Nullstellen**.

Beispiel Lukaszahlen:

Charakteristisches Polynom: $q_R(z) = z^2 - z - 1$.

Koeffizienten $q_1 = -1$, $q_2 = -1$. Es gilt stets $q_0 = 1$.

$d = 2$.

Nullstellen:

$$\begin{aligned}\alpha_{1/2} &= \frac{-q_1 \pm \sqrt{q_1^2 - 4q_2}}{2} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.\end{aligned}$$

Die Nullstellen sind verschieden, d.h. die Vielfachheiten sind $d_i = 1$.
Es gilt also $k = d$.

(Forts. Allgemeine Lösung)

Die Folge $(f_n)_{n \geq 0}$ ist genau dann eine Lösung der Rekursion (??), wenn es Zahlen $c_{i,j}$ für $i = 1, 2, \dots, k$ und $j = 0, 1, \dots, d_i - 1$ gibt, so dass für alle $n \geq 0$ gilt:

$$f_n = \sum_{i=1}^k p_i(n) \cdot \alpha_i^n \quad \text{mit} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} p_i(n) &= \sum_{j=0}^{d_i-1} c_{i,j} \cdot n^j & (4) \\ &= c_{i,0} + c_{i,1} \cdot n + \dots + c_{i,d_i-1} \cdot n^{d_i-1}. \end{aligned}$$

Beispiel Lukaszahlen:

Allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned}f_n &= p_1(n) \cdot \alpha_1^n + p_2(n) \cdot \alpha_2^n \\&= (c_{1,0}) \cdot \alpha_1^n + (c_{2,0}) \cdot \alpha_2^n \\&= c_{1,0} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + c_{2,0} \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n .\end{aligned}$$

Spezielle Lösung

Für jeden Koeffizientenvektor $(c_{i,j})$ der Länge d erhält man mit Formel (??) eine *spezielle Lösung* der Rekursion (??).

Für beliebig vorgegebene Zahlen a_0, a_1, \dots, a_{d-1} kann man die Parameter $c_{i,j}$ so wählen, dass die folgenden Gleichungen als sogenannte *Anfangsbedingungen* der Rekursionsgleichung erfüllt sind.

$$f_0 = a_0, f_1 = a_1, \dots, f_{d-1} = a_{d-1}. \quad (5)$$

Beispiel Lukaszahlen:

Allgemeine Lösung

$$f_n = p_1(n) \cdot \alpha_1^n + p_2(n) \cdot \alpha_2^n.$$

Spezielle Lösung für Anfangsbedingungen: $f_0 = 2, f_1 = 1$.

Gleichungssystem für $n = 0$ und $n = 1$:

$$\begin{aligned} 2 &= c_{1,0} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^0 + c_{2,0} \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^0, \\ 1 &= c_{1,0} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^1 + c_{2,0} \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^1. \end{aligned}$$

Eindeutige Lösung: $c_{1,0} = 1, c_{2,0} = 1$.

Bemerkung:

Im Allgemeinen wird das Gleichungssystem mit Methoden der linearen Algebra gelöst.

Erzeugende Funktion einer speziellen Lösung

Die erzeugende Funktion $F(z)$ einer speziellen Lösung $(f_n)_{n \geq 0}$ der Rekursion (??) mit den Anfangsbedingungen (??) ist gleich der rationalen Funktion

$$F(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \quad (6)$$

mit dem zum charakteristischen Polynom (??) reflektierten Polynom

$$q(z) = 1 + q_1z + q_2z^2 + \dots + q_dz^d \quad (7)$$

und einem Polynom $p(z)$, das sich aus dem Ansatz der *vollständigen Rekursion* ergibt.

Vollständige Rekursion

Die vollständige Rekursionsgleichung beschreibt die Gleichung (??) zusammen mit den Anfangsbedingungen (??) und ist wie folgt definiert.

Seien $f_n = 0$ für alle $n < 0$. Beachten Sie die bekannte Definition der Deltafunktion $\delta_{i,j}$ mit $\delta_{i,i} = 1$ für alle i und $\delta_{i,j} = 0$ für alle $i \neq j$.

Dann lautet die **vollständige Rekursionsgleichung** für alle $n \geq 0$

$$\begin{aligned} f_n + q_1 \cdot f_{n-1} + \dots + q_d \cdot f_{n-d} \\ = e_0 \cdot \delta_{n,0} + e_1 \cdot \delta_{n,1} + \dots + e_{d-1} \cdot \delta_{n,d-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Dabei sind die Parameter e_i mit den Anfangsbedingungen (??) durch die folgenden Gleichungen verknüpft.

$$\begin{aligned} f_0 &= e_0 = a_0, \\ f_1 + q_1 \cdot f_0 &= e_1 = a_1 + q_1 a_0, \\ f_2 + q_1 \cdot f_1 + q_2 \cdot f_0 &= e_2 = a_2 + q_1 a_1 + q_2 a_0, \\ &\vdots \\ f_{d-1} + \dots + q_{d-1} \cdot f_0 &= e_{d-1} = a_{d-1} + \dots + q_{d-1} \cdot a_0. \end{aligned}$$

Das gesuchte Polynom $p(z)$ ist nun gegeben durch

$$p(z) = e_0 + e_1 z + e_2 z^2 + \dots + e_{d-1} z^{d-1}. \quad (9)$$

Damit gilt für die erzeugende Funktion

$$F(z) = \frac{e_0 + e_1 z + e_2 z^2 + \dots + e_{d-1} z^{d-1}}{1 + q_1 z + q_2 z^2 + \dots + q_d z^d}.$$

Beispiel Lukaszahlen:

Berechnung der erzeugenden Funktion $F(z)$.

$$q(z) = 1 - z - z^2.$$

$$e_0 = 2,$$

$$e_1 = a_1 + q_1 a_0 = 1 - 1 \cdot 2 = -1.$$

Es folgt

$$p(z) = 2 - z.$$

Ergebnis:

$$F(z) = \frac{2-z}{1-z-z^2}$$

mit Reihenentwicklung

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} f_n z^n .$$

2. Vorbereitung TA's Blatt 13

2.1 VA 1

Seien $(a_n)_{n \geq 0}$ und $(b_n)_{n \geq 0}$ zwei Folgen reeller Zahlen. Weiter seien $A(z)$ und $B(z)$ entsprechend ihre erzeugenden Funktionen, d.h.

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{bzw.} \quad B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Zeigen Sie, dass die nachfolgend angegebenen Folgen $(c_n)_{n \geq 0}$ und ihre erzeugende Funktion $C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ jeweils die angegebene Beziehung erfüllen.

Bemerkungen zur Definition erzeugender Funktionen!!!

1 Mit $c_n := a_n + b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$C(z) = A(z) + B(z).$$

Lösung:

$$\begin{aligned} C(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = A(z) + B(z). \end{aligned}$$

Begründung: folgt aus der Definition der Addition im Ring der formalen Potenzreihen.

② Mit $c_n := a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$C(z) = \frac{1}{z}(A(z) - a_0).$$

Lösung:

$$\begin{aligned} C(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{k-1}. \\ &= \frac{1}{z} (\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - a_0) = \frac{1}{z} (A(z) - a_0). \end{aligned}$$

Begründung: Operationen im Ring der formalen Potenzreihen.

3 Mit $c_0 := 0$ und $c_n := a_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$C(z) = z \cdot A(z).$$

Lösung:

$$\begin{aligned} C(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} z^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k+1} = z \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) = z \cdot A(z). \end{aligned}$$

Begründung: Operationen im Ring der formalen Potenzreihen.

4 Mit $c_n := (n + 1) \cdot a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$C(z) = \frac{d}{dz}(z \cdot A(z)).$$

Lösung:

$$\begin{aligned} C(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1) a_n z^n \\ &= \frac{d}{dz} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1} \right) = \frac{d}{dz} \left(z \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right). \end{aligned}$$

Begründung: Definition Linearer Operator $\frac{d}{dz}$ im Ring der formalen Potenzreihen.

5 Mit Mit $c_n := n \cdot a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$C(z) = z \cdot \frac{d}{dz} A(z).$$

Lösung:

$$\begin{aligned} C(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^n \\ &= z \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = z \cdot \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \end{aligned}$$

6 Mit $c_n := \sum_{i=0}^n a_i$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$C(z) = \frac{A(z)}{1-z}.$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \frac{A(z)}{1-z} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k z^k \cdot 1 \cdot z^{n-k} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k \right) z^n = C(z). \end{aligned}$$

6 Mit $c_n := \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$C(z) = A(z) \cdot B(z).$$

Lösung:

Faltungsformel!

2.2 VA 2

Gegeben sei die Funktion

$$F(z) = \frac{z^2 + 3z - 5}{z^3 - 2z^2 - 5z + 6}.$$

Bestimmen Sie die Folge $(a_n)_{n \geq 0}$, zu der $F(z)$ die erzeugende Funktion darstellt.

Lösung:

Um $F(z)$ in eine Reihe entwickeln zu können, zerlegen wir F in Partialbrüche bezüglich der Nullstellen des Nenners

$$q(z) = z^3 - 2z^2 - 5z + 6.$$

Man findet sofort $\beta_1 = 1$ als eine Nullstelle.

Nun dividiert man r durch $z - 1$ und erhält

$$\begin{aligned}t(z) &= z^2 - z - 6 = (z - 3)(z + 2), \\q(z) &= (z - 1)(z - 3)(z + 2).\end{aligned}$$

Die Partialbruchentwicklung von F lautet

$$\begin{aligned} & \frac{z^2 + 3z - 5}{(z - 1)(z + 2)(z - 3)} \\ &= \frac{A}{z - 1} + \frac{B}{z + 2} + \frac{C}{z - 3} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{z - 1} + \frac{-7}{15} \cdot \frac{1}{z + 2} + \frac{13}{10} \cdot \frac{1}{z - 3}. \end{aligned}$$

Wir formen zunächst so um, dass die Entwicklung in geometrische Reihen abgelesen werden kann,

$$\begin{aligned} & \frac{z^2+3z-5}{(z-1)(z+2)(z-3)} \\ &= -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-z} - \frac{7}{30} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)} + \frac{13}{30} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}}. \\ &= -\frac{1}{6} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{7}{30} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{2}\right)^n + \frac{13}{30} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{5}{30} - \frac{7}{30} \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{13}{30} \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \cdot z^n \end{aligned}$$

und erhalten für alle $n \geq 0$

$$a_n = -\frac{1}{30} \left(5 + 7 \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 13 \left(\frac{1}{3}\right)^n \right).$$

Preisfrage: Wo liest man die Rekursionsgleichung ab?

2.3 VA 3

Lösung **inhomogener Rekursionsgleichungen**
siehe Arbeitsblatt 3, Tutorübungen und

Letzte ZÜ am 2. Februar!