Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2010/11
Übungsblatt 10
20. Dezember 2010

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 11. Januar 2011, 10 Uhr in die **DS Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (4 Punkte)

Sei K ein endlicher Körper, wobei $q = |K|$ ungerade sei. $K[x]$ sei die Menge der Polynome über K in der Variablen x.
Zeigen Sie

1. $x^{q-1} - 1 = \prod_{a \in K^*}(x - a)$.
2. $\sum_{a \in K} a = 0$.
3. $\prod_{a \in K^*} a = -1$.

Hausaufgabe 2 (4 Punkte)

Wir betrachten den Ring $R = \mathbb{Z}_3[x]$ aller Polynome über einer Variablen x mit Koeffizienten aus dem Körper $\langle \mathbb{Z}_3, +_3, \cdot_3 \rangle$ der ganzen Zahlen modulo 3. Sei $\pi \in \mathbb{Z}_3[x]$ das Polynom $\pi(x) = x^3 + 2$. Zeigen Sie für Polynome aus $\mathbb{Z}_3[x]$:

1. $(x^3 + 2)^3 = x^9 + 2$.
2. Es gilt $x^8 \equiv x^2 \pmod{\pi}$, d. h. x^8 ist kongruent zu x^2 modulo $\pi(x)$.

   Hinweis: Bestimmen Sie den Rest bei Division von x^8 durch $\pi(x)$.
3. Der Restklassenring $\langle Z_3[x]/(\pi), +, \cdot \rangle$ ist kein Körper.

Hausaufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $R = \mathbb{Z}_3[x]$ der Ring aller Polynome über dem Körper $\langle \mathbb{Z}_3, +_3, \cdot_3 \rangle$.

Sei $b \in R$ gegeben durch $b(x) = x^3 + x^2 + 1$. Wir betrachten den Ring $R_b = \mathbb{Z}_3[x]_{\mathrm{grad}(b)}$ der Polynome aus R modulo $b(x)$.

1. Zeigen Sie $x^8 \equiv 1 \pmod{b}$.
2. Geben Sie in R_b das inverse Element von x^2 an.

Hausaufgabe 4 (4 Punkte)

Bestimmen Sie Polynome $a(x), b(x), c(x)$ über den komplexen Zahlen mit imaginärer Einheit i und $\mathrm{grad}(a) \leq 1, \mathrm{grad}(b) = 0, \mathrm{grad}(c) = 0$, so dass gilt:

$$\frac{2x^3 - 13x^2 + 18x - 4}{(x-3)^2(x+2i)(x-2i)} = \frac{a(x)}{(x-3)^2} + \frac{b(x)}{(x+2i)} + \frac{c(x)}{(x-2i)}\,.$$

Hausaufgabe 5 (4 Punkte)

Sei $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ ein Polynom vom Grad $n-1$ mit den Koeffizienten $\vec{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$, d. h.

$$p(x) = P_{\vec{a}}(x)\,.$$

Wir betrachten speziell $n = 8$, $\vec{a} = (2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1)$ und $\omega = e^{\frac{2\pi i}{8}}$.
Berechnen Sie die Fouriertransformierte

$$\mathcal{F}_{n,\omega}(\vec{a}) = (P_{\vec{a}}(1), P_{\vec{a}}(\omega), \ldots, P_{\vec{a}}(\omega^{n-1}))$$

durch Ausführung des Divide-and-Conquer Algorithmus `DFT`$(\vec{a}, \omega)$.

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

Sei $M = \{1, 2, \ldots, m\}$. Wir betrachten die Menge aller Relationen $R \subseteq M \times M$.

1. Wie viele Relationen über M gibt es?
2. Wie viele Relationen über M mit $k \in \mathbb{N}_0$ Elementen gibt es?
3. Wie viele reflexive Relationen über M gibt es?
4. Sei A eine n-elementige Menge und es sei B eine m-elementige Teilmenge von A. Wie viele Teilmengen C von A gibt es, die B enthalten, für den Fall $n = 5$ und $m = 2$? Geben Sie eine Formel für den allgemeinen Fall $n, m \in \mathbb{N}_0$ an und begründen Sie diese Formel.

Begründen Sie Ihre Antworten.

Vorbereitung 2

Sei $M = \{0, 1, 2\}$.

1. Listen Sie alle Äquivalenzrelationen über M auf!
2. Wie viele Partitionen gibt es über M?
3. Gibt es eine Äquivalenzrelation über der leeren Menge?
4. Wie viele surjektive Abbildungen f von M auf $M' = \{1, 2\}$ gibt es?
5. Wie viele injektive Operationen $f : M \to M$ gibt es?
6. Geben Sie alle Variationen von M an!

Begründen Sie Ihre Antworten.

Vorbereitung 3

1. Ein Dominostein besteht aus zwei Quadraten. In jedem Quadrat sei eine Zahl zwischen 1 und 7 durch Punkte dargestellt.
   Wie viele verschiedene Dominosteine dieser Art gibt es?

2. Bestimmen Sie die Anzahl aller Wörter, die sich aus den Buchstaben des Wortes

   $$MINIMALISIERUNG$$

   bilden lassen. Dabei darf und muss jedes Vorkommen eines Buchstaben des o. g. Wortes genau einmal verwendet werden.

Vorbereitung 4

Bestimmen Sie die Binomialkoeffizienten von $x^3y^2z^2$ und x^2z^3 in $(x + xy + z)^5$.

Tutoraufgabe 1

Die Menge der injektiven Abbildungen einer Menge M in eine Menge N bezeichnen wir mit $Inj(M,N)$. Seien M und N endliche Mengen mit $|M| \leq |N|$.

1. Seien $x \in M$ und $y \in N$. Zeigen Sie die Gültigkeit der Gleichung

$$|Inj(M,N)| \;=\; |N| \cdot |Inj(M\backslash\{x\}, N\backslash\{y\})| \,.$$

2. Die Anzahl der Elemente in M bzw. N sei m bzw. n. Zeigen Sie mit geeigneter vollständiger Induktion, dass die Anzahl aller injektiven Abbildungen von M nach N gegeben ist durch

$$n^{\underline{m}} := \prod_{i=1}^{m}(n-i+1).$$

Hinweis: Für $m = 0$ besitzt das „leere“ Produkt definitionsgemäß den Wert 1.

Tutoraufgabe 2

1. Wie viele verschiedene Ergebnisse („Wurfkonstellationen“) kann es geben, wenn man mit 4 Würfeln gleichzeitig würfelt? Unterscheiden Sie dabei zwischen folgenden Szenarien:

   (a) Die Würfel sind alle verschiedenfarbig und damit unterscheidbar.

   (b) Die Würfel sind alle gleichfarbig.

   (c) Zwei Würfel sind blau und zwei Würfel sind grün.

2. Wie viele verschiedene Buchstabenfolgen kann man aus den Buchstaben des Wortes *ABRAKADABRA* bilden, wenn jeder Buchstabe genauso oft wie im Ursprungswort vorkommen soll? (Z. B. muss das A genau fünfmal vorkommen.)

Tutoraufgabe 3

1. Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$. Man zeige

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

2. Sei M eine Menge mit n Elementen und $k \in \mathbb{N}_0$. Wie viele Multiteilmengen von M mit höchstens k Elementen gibt es, wenn man $n = 6$ und $k = 3$ annimmt. Leiten Sie zunächst eine Formel ab für beliebiges n und k.

3. Bestimmen Sie den Koeffizienten von t^4xy^3z in $(x+y+z+t)^9$.

   Berechnen Sie das Ergebnis durch sukzessive Klammerung und Bestimmung von Binomialkoeffizienten.