Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2010/11
Übungsblatt 12
17. Jnuar 2011

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 25. Januar 2011, 10 Uhr in die **DS Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Begründen Sie jeweils Ihre Antworten auf die folgenden Fragen und geben Sie das Ergebnis in Dezimalzahldarstellung an. Wie viele

1. surjektive Abbildungen von M auf N gibt es, wenn $|M| = 6$ und $|N| = 5$ gilt?
2. Möglichkeiten gibt es, 4 gleiche (nicht unterscheidbare) Fußbälle auf 8 unterscheidbare Vereine zu verteilen?
3. Möglichkeiten gibt es, 5 nicht unterscheidbare Gegenstände in 5 nicht unterscheidbare Schachteln zu legen?
4. Partitionen einer 10-elementigen Menge gibt es, wenn nur diejenigen Partitionen gezählt werden, die aus 5 Klassen mit je 2 Elementen bestehen?

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Wir betrachten 3 völlig gleiche Motorräder, 2 völlig gleiche Personenkraftwagen, und einen Lastkraftwagen.

1. Wie viele Verteilungsmöglichkeiten gibt es, 5 völlig gleiche Firmenschilder auf die Fahrzeuge zu verteilen, so dass jedes Fahrzeug höchstens ein Firmenschild erhält?
2. Wie viele Verteilungsmöglichkeiten gibt es, wenn jeder von 5 verschiedenen Personen genau ein Fahrzeug zuzuteilen ist?

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Wir zählen gewisse Möglichkeiten, Wörter über dem 3-elementigen Alphabet $A = \{a, b, x\}$ zu bilden. Geben Sie alle Ergebnisse in Dezimalzahldarstellung an und begründen Sie Ihre Ergebnisse!

1. Wie viele Wörter über $\{a, b\}$ gibt es, in denen der Buchstabe a höchstens einmal und der Buchstabe b höchstens zweimal vorkommt (z. B. ba, das leere Wort ϵ)?
2. Wie viele Wörter über $\{a, b\}$ der Länge 11 gibt es, in denen genau zweimal der Buchstabe a vorkommt und gleichzeitig mindestens zwei Buchstaben b zwischen den beiden a's auftreten?
3. Wie viele Wörter über A der Länge 6 gibt es, in denen der Buchstabe a einmal, der Buchstabe b zweimal und der Buchstabe x dreimal vorkommt?

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Wir betrachten ein Glücksspiel „4 aus 25“, bei dem 4 Zahlen aus [25] gezogen werden.

1. Wir lassen zu, dass Zahlen mehrfach gezogen werden, insgesamt aber nur 4 Mal eine Zahl gezogen wird. Es kommt nicht auf die Reihenfolge der gezogenen Zahlen an.

   Wie viele zulässige Ziehungen gibt es?

2. Nun ändern wir die Bedingungen für Ziehungen so, dass nur verschiedene Zahlen und nie zwei benachbarte Zahlen n und $n+1$ gezogen werden. (D. h., dass Ziehungen mit benachbarten Zahlen, z. B. $2, 5, 6, 17$, nicht zulässig sind.)

   Wie viele zulässige Ziehungen gibt es in diesem Fall?
   Geben Sie einen arithmetischen Ausdruck für das Ergebnis an.

Allgemeiner Hinweis: Binomialkoeffizienten brauchen nicht in Dezimalzahldarstellung ausgewertet zu werden.

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

Sei F die Menge aller Abbildungen einer Menge M in die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Wir definieren die Summe, i. Z. $f + g$, bzw. das Produkt, i. Z. $f \cdot g$, von $f \in F$ und $g \in F$ als diejenigen komplexwertigen Funktionen h bzw. k, für die für alle $x \in M$ gilt

$$\begin{aligned} h(x) = (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \quad \text{bzw.} \\ k(x) = (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x)\,. \end{aligned}$$

Entsprechend führen wir über der Menge der Operatoren über F Addition und Multiplikation wie folgt ein. Für alle $A, B : F \to F$ und $f \in F$ gilt

$$\begin{aligned} (A+B)(f) &= A(f) + B(f) \quad \text{bzw.} \\ (A \cdot B)(f) &= A(f) \cdot B(f)\,. \end{aligned}$$

1. F ist ein Ring bezüglich obiger Addition „+“ und Multiplikation „·“. Beweis!

   Geben Sie die entsprechenden neutralen Elemente bezüglich $+$ und $\cdot$ an.

2. Sei $\circ$ die Komposition von Operatoren. Man zeige für alle Operatoren A, B, C über F:
   $$(A + B) \circ C = A \circ C + B \circ C \qquad \text{(Rechtsdistributivität)}\,.$$

3. Sowohl der Translationsoperator E als auch der Differenzenoperator Δ sind Beispiele für Operatoren über F (wobei $M = \mathbb{Z}$). Begründung!

Vorbereitung 2

Man zeige:

1. Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt $\quad \Delta x^{\overline{n}} = n(x+1)^{\overline{n-1}}$. Beweis!

2. Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt $\quad \nabla x^{\underline{n}} = n(x-1)^{\underline{n-1}}$.
   Benutzen Sie die Gleichung $E \cdot \nabla = \Delta$ zusammen mit Lemma 203 für den Beweis!

3. Es gilt $\nabla\Delta = \Delta\nabla$. Beweis!

Vorbereitung 3

Berechnen Sie mit Hilfe der Partiellen Summation für $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k\,.$$

Vorbereitung 4

Beweisen Sie die folgende Identität für alle $n, i \geq 0$ mit Binomialinversion:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} = \delta_{n,i} \qquad .$$

Hierbei ist $\delta_{n,i} = 1$, falls $n = i$, und $\delta_{n,i} = 0$, falls $n \neq i$.

Tutoraufgabe 1

Der Translationsoperator E und der Differenzenoperator Δ sind Beispiele für Operatoren, mit denen man wie in Ringen rechnen kann.

Seien M eine Menge und F die Menge aller Abbildungen von M in die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen, wie in VA 1. Sei *op* die Menge aller Operatoren über M und $a \in op$. Dann definieren wir einen Operator A_a über F wie folgt für alle $f \in F$ und $x \in M$:

$$[A_a(f)](x) = f(a(x)) .$$

Sei $OP = \{A_a \,;\, a \in op\}$.

1. Sei $M = \mathbb{Z}$. Zeigen Sie $E^n \in OP$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.
2. Man zeige für alle $a \in op$ und Operatoren B, C über F die Linksdistributivität

$$A_a \circ (B + C) = A_a \circ B + A_a \circ C .$$

3. Seien $a_i, b_j \in op$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$. Man zeige

$$\left(\sum_{i=1}^{m} A_{a_i}\right) \circ \left(\sum_{j=1}^{n} B_{b_j}\right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (A_{a_i} \circ B_{b_j}) .$$

Tutoraufgabe 2

Welche der folgenden Gesetze für die Differenzenoperatoren Δ und ∇, den Translationsoperator E und die Identität I gelten allgemein für beliebige Funktionen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$? Begründen Sie Ihre Antwort!

(a) $(E\Delta\nabla)(f) = (E)(f)$ (b) $(E\nabla^2)(f) = (E - 2I + E^{-1})(f)$

Tutoraufgabe 3

Berechnen Sie mit Hilfe der Partiellen Summation für $m, n \in \mathbb{N}$ und $m \leq n$

$$\sum_{k=m}^{n} k \cdot \binom{k}{m} .$$

Tutoraufgabe 4

1. Bestimmen Sie mit Hilfe der Binomialinversion eine Folge $(a_i)_{i\geq 0}$, so dass für alle $n \geq 0$ gilt

$$n! = \sum_{i=0}^{n} a_i n^{\underline{i}}.$$

2. Beweisen Sie die folgende Identität für alle $n, i \geq 0$:

$$\sum_{k=0}^{n} s_{n,k} S_{k,i} (-1)^{n-k} = \delta_{n,i} \, .$$

$s_{n,k}$ (bzw. $S_{n,k}$) sind die Stirling-Zahlen erster (bzw. zweiter) Art.