

Lemma 213 (Newton-Darstellung von Polynomen)

Sei $f(x)$ ein Polynom vom Grad n . Dann gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\Delta^k f(0)}{k!} \cdot x^k = \sum_{k=0}^n \Delta^k f(0) \binom{x}{k}.$$

Bemerkung: Die Newton-Darstellung entspricht offensichtlich der Taylorreihenentwicklung im differenzierbaren Fall.

Beweis:

$f(x)$ kann als Polynom vom Grad n eindeutig in der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^n b_k \cdot x^k$$

geschrieben werden (x^k ist Basis!). Damit ist nach Lemma 203 (1)

$$\Delta^i f(x) = \sum_{k=0}^n b_k \cdot k^i \cdot x^{k-i}.$$

Also gilt, dass

$$\Delta^i f(0) = b_i \cdot i! \quad \text{bzw.} \quad b_k = \frac{\Delta^k f(0)}{k!}.$$

□

Beispiel 214

Wir haben in Beispiel 210 gesehen, dass

$$x^n = \sum_{i=0}^n S_{n,i} \cdot x^i .$$

Also gilt auch

$$\begin{aligned} k! \cdot S_{n,k} &= \Delta^k x^n \Big|_{x=0} = (E - I)^k x^n \Big|_{x=0} \\ &= \left(\sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} E^i \right) x^n \Big|_{x=0} = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \cdot \binom{k}{i} \cdot i^n , \end{aligned}$$

und damit auch

$$S_{n,k} = \frac{1}{k!} \cdot \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \cdot \binom{k}{i} \cdot i^n .$$

4.9 Inversion

4.9.1 Basisfolgen

Definition 215

Eine Folge $(p_0(x), p_1(x), \dots)$ von Polynomen $p_i(x)$ heißt **Basisfolge**, falls

$$\deg(p_i) = i \quad \text{für alle } i.$$

Bemerkung: $p_0 \neq 0$, da wir für $p(x) \equiv 0$ festlegen: $\deg(p) = -1$.

Beobachtung: $(p_i(x))_{i \geq 0}$ sei eine Basisfolge. Dann kann jedes Polynom $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ vom Grad n eindeutig dargestellt werden als

$$f(x) = \sum_{i=0}^n f_i \cdot p_i(x)$$

mit $f_i \in \mathbb{R}$.

Beweis:

Mit Koeffizientenvergleich und vollständiger Induktion. □

4.9.2 Zusammenhangskoeffizienten

Seien $(p_i(x))_{i \geq 0}$ und $(q_i(x))_{i \geq 0}$ Basisfolgen. Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $a_{n,k}$ und $b_{n,k} \in \mathbb{R}$ (die sogenannten **Zusammenhangskoeffizienten**), so dass für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

1

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{n,k} \cdot p_k(x)$$

2

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n b_{n,k} \cdot q_k(x)$$

Lemma 216

Seien die $a_{n,k}, b_{n,k}$ wie oben, $A = (a_{ij})_{0 \leq i, j \leq n}$ und $B = (b_{ij})_{0 \leq i, j \leq n}$, dann ist

$$AB = I$$

(I ist die $n + 1$ -dimensionale Einheitsmatrix.)

Beweis:

Klar. □

Satz 217

Seien $a_{n,k}$ und $b_{n,k}$, $n, k \in \mathbb{N}_0$, die zu zwei Basisfolgen gehörenden Zusammenhangskoeffizienten. Dann gilt:

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0) \left[v_n = \sum_{k=0}^n a_{n,k} \cdot u_k \right] \text{ und } (\forall n \in \mathbb{N}_0) \left[u_n = \sum_{k=0}^n b_{n,k} \cdot v_k \right]$$

Beweis:

In Matrixschreibweise gilt:

$$v = (v_0, \dots, v_n)^T = A \cdot u \text{ und } u = B \cdot v$$

Klar, da $A = B^{-1}$.



4.9.3 Die Binomialinversion

Der Binomialsatz ergibt:

$$x^n = ((x - 1) + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot (x - 1)^k$$

$$(x - 1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \cdot x^k$$

Betrachte die beiden Basisfolgen

$$(v_k)_{k \geq 0} := (x^k)_{k \geq 0} \text{ und } (u_k)_{k \geq 0} := ((x-1)^k)_{k \geq 0}.$$

Satz 217 liefert:

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0) \left[v_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot u_k \right] \text{ und } (\forall n \in \mathbb{N}_0) \left[u_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \cdot v_k \right]$$

Für „Puristen“: Ersetze u_n durch $(-1)^n \cdot u_n$. Dann gilt:

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0) \left[v_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \cdot u_k \right] \text{ und} \\ (\forall n \in \mathbb{N}_0) \left[u_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \cdot v_k \right]$$

Beispiel 218

Sei $d(n, k)$ die Anzahl der Permutationen $\in S_n$ mit genau k Fixpunkten.

$$D_n := d(n, 0) .$$

(Die Anzahl der sog. **derangements**).

$$n! = \sum_{k=0}^n d(n, k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_{n-k} \stackrel{k \mapsto n-k}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k$$

Beispiel (Forts.)

Mit der Binomialinversion gilt:

$$\begin{aligned}D_n &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \cdot \binom{n}{k} \cdot k! \\&= n! \cdot \sum_{k=0}^n \left((-1)^{n-k} \frac{n^k}{n!} \right) \\&= n! \cdot \sum_{k=0}^n \left((-1)^{n-k} \cdot \frac{1}{(n-k)!} \right) \\&= n! \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} .\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n}{|S_n|} = \frac{1}{e} .$$

4.9.4 Stirling-Inversion

Betrachte die Basisfolgen $(x^n)_{n \geq 0}$ und $(x^n)_{n \geq 0}$. Wie wir bereits gesehen haben, gilt:

$$x^n = \sum_{k=0}^n S_{n,k} \cdot x^k$$

$$x^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \cdot s_{n,k} \cdot x^k$$

Daraus lässt sich die **Stirling-Inversion** ableiten:

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0) \left[v_n = \sum_{k=0}^n S_{n,k} \cdot u_k \right] \text{ und } (\forall n \in \mathbb{N}_0) \left[u_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} s_{n,k} \cdot v_k \right]$$

4.10 Erzeugende Funktionen

Definition 219

Zu einer Folge $(a_i)_{i \geq 0}$ mit $a_i \in \mathbb{R}$ ist die zugehörige (gewöhnliche) erzeugende Funktion die formale Potenzreihe

$$A(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot z^i .$$

Beobachtungen: Die formalen Potenzreihen bilden einen Ring:

$$A(z) \pm B(z) = \sum_{i \geq 0} (a_i \pm b_i) z^i$$

$$c \cdot A(z) = \sum_{i \geq 0} (c \cdot a_i) z^i$$

Hier gilt folgende Produktformel:

$$A(z) \cdot B(z) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n a_k \cdot b_{n-k} \right) \cdot z^n$$

(Konvolution von $A(z)$ und $B(z)$)

Satz 220

Eine formale Potenzreihe

$$A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot z^n$$

besitzt ein **multiplikatives Inverses** genau dann, wenn $a_0 \neq 0$.

Beweis:

Annahme: Sei

$$B(z) = \sum_{n \geq 0} b_n \cdot z^n$$

ein solches Inverses. Dann muss $A(z) \cdot B(z) = 1$ sein, also auch $a_0 \cdot b_0 = 1$, damit $a_0 \neq 0$. Daher muss $b_0 = a_0^{-1}$ sein.

Beweis (Forts.):

Seien induktiv b_0, b_1, \dots, b_{n-1} bereits bestimmt. Dann folgt aus

$$[z^n](A(z) \cdot B(z)) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot b_{n-k} = 0, n \geq 1$$

(dabei bezeichnet $[z^n](\dots)$ den Koeffizienten von z^n in (\dots)) folgende Formel:

$$b_n = \frac{-1}{a_0} \sum_{k=1}^n a_k \cdot b_{n-k}$$

Also ist b_n und damit per Induktion $B(z)$ eindeutig bestimmt. □

Beispiel 221

Geometrische Reihe:

$$A(z) = \sum_{n \geq 0} z^n$$

Es gilt $A(z) \cdot (1 - z) = 1$, da

$$\begin{aligned} A(z) \cdot (1 - z) &= A(z) - z \cdot A(z) \\ &= (1 + z + z^2 \dots) - (z + z^2 + z^3 + \dots) = 1 \end{aligned}$$

Also:

$$A(z) = \frac{1}{1 - z}$$

Satz 222

Einige wichtige Erzeugendenfunktionen:

1

$$\sum_{n \geq 0} z^n = \frac{1}{1 - z}$$

2

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot z^n = \frac{1}{1 + z}$$

3

$$\sum_{n \geq 0} z^{2n} = \frac{1}{1 - z^2}$$

4

$$\sum_{n \geq 0} \binom{a}{n} z^n = (1+z)^a, \quad a \in \mathbb{C}$$

5

$$\sum_{n \geq 0} \binom{c+n-1}{n} z^n = \frac{1}{(1-z)^c} = (1-z)^{-c}$$

6

$$\sum_{n \geq 0} \binom{m+n}{n} z^n = \frac{1}{(1-z)^{m+1}}$$

7

$$\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

8

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n} = \ln(1 + z)$$

Beweis:

- 1 s. o.
- 2 Setze in (1) $z \mapsto -z$.
- 3 Setze in (1): $z \mapsto z^2$.
- 4 Der Fall $a \in \mathbb{N}_0$ wird durch den Binomialsatz gezeigt, für allgemeine a verweisen wir auf die *Analysis*.

5

$$\begin{aligned}\sum_{n \geq 0} \binom{c+n-1}{n} z^n &= \sum_{n \geq 0} \binom{-c}{n} (-1)^n z^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \binom{-c}{n} (-z)^n \\ &\stackrel{(4)}{=} (1-z)^{-c}\end{aligned}$$

- 6 Setze in (5) $c := m + 1$.



Beispiel 223

Sei

$$A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot z^n, m \in \mathbb{N}_0.$$

Dann ist

$$z^m \cdot A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot z^{n+m} = \sum_{n \geq m} a_{n-m} \cdot z^n.$$

Beispiel (Forts.)

Damit gilt

$$\begin{aligned} \frac{z^m}{(1-z)^{m+1}} &\stackrel{\text{Folie 6(6)}}{=} z^m \cdot \sum_{n \geq 0} \binom{m+n}{n} \cdot z^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \binom{m+n}{n} z^{m+n} = \sum_{n \geq m} \binom{n}{n-m} z^n \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{n \geq 0} \binom{n}{n-m} \cdot z^n . \end{aligned}$$

(*) Das Gleichheitszeichen gilt, da für $n < m$

$$\binom{n}{n-m} = 0$$

ist.

4.11 Auflösung von Rekursionsgleichungen

Beispiel 224

$$a_0 = 2$$

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 2^n \quad \text{für alle } n \geq 1$$

lineare inhomogene Rekursionsgleichung 1. Ordnung

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 2^n$$

$$a_{n-1} = 2 \cdot a_{n-2} + 2^{n-1} \quad | \cdot (-2)$$

$$a_n - 2 \cdot a_{n-1} = 2 \cdot a_{n-1} - 4 \cdot a_{n-2} + 2^n - 2 \cdot 2^{n-1}$$

$$\Rightarrow 0 = a_n - 4 \cdot a_{n-1} + 4 \cdot a_{n-2}$$

lineare homogene Rekursionsgleichung 2. Ordnung

Beispiel (Forts.)

Zu dieser linearen Rekursionsgleichung

$$a_n - 4 \cdot a_{n-1} + 4 \cdot a_{n-2} = 0$$

gehört das folgende *charakteristische Polynom*:

$$(x - 2)^2 = x^2 - 4 \cdot x + 4 = 0$$

Später wird gezeigt, dass die a_n hier von der Form

$$a_n = (c_1 \cdot n + c_2) \cdot 2^n \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

sind. Aus den Anfangsbedingungen ($a_0 = 2, a_1 = 6$) ergibt sich $c_1 = 1$ und $c_2 = 2$.

Damit gilt

$$a_n = (n + 2) \cdot 2^n \quad \forall n \geq 0$$

Beispiel (Forts.)

Man zeigt auch allgemein, dass

$a_n = (c_1 \cdot n + c_2) \cdot 2^n$ folgende Bedingung erfüllt:

$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0 \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{C}).$$