Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2011
Übungsblatt 5
12. September 2011

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 20. September 2011, 14 Uhr in die **DS Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (4 Punkte)

Wir betrachten den Ring $R = \mathbb{Z}_3[x]$ aller Polynome über einer Variablen x mit Koeffizienten aus dem Körper $\langle \mathbb{Z}_3, +_3, \cdot_3 \rangle$ der ganzen Zahlen modulo 3. Sei $\pi \in \mathbb{Z}_3[x]$ das Polynom $\pi(x) = x^3 + 2$. Zeigen Sie für Polynome aus $\mathbb{Z}_3[x]$:

1. $(x^3 + 2)^3 = x^9 + 2$.
2. Es gilt $x^8 \equiv x^2 \pmod{\pi}$, d. h. x^8 ist kongruent zu x^2 modulo $\pi(x)$.

   Hinweis: Bestimmen Sie den Rest bei Division von x^8 durch $\pi(x)$.
3. Der Restklassenring $\langle Z_3[x]/(\pi), +, \cdot \rangle$ ist kein Körper.

Hausaufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $R = \mathbb{Z}_3[x]$ der Ring aller Polynome über dem Körper $\langle \mathbb{Z}_3, +_3, \cdot_3 \rangle$.

Sei $b \in R$ gegeben durch $b(x) = x^3 + x^2 + 1$. Wir betrachten den Ring $R_b = \mathbb{Z}_3[x]_{\mathrm{grad}(b)}$ der Polynome aus R modulo $b(x)$.

1. Zeigen Sie $x^8 \equiv 1 \pmod{b}$.
2. Geben Sie in R_b das inverse Element von x^2 an.

Hausaufgabe 3 (4 Punkte)

Bestimmen Sie Polynome $a(x), b(x), c(x)$ über den komplexen Zahlen mit imaginärer Einheit i und $\mathrm{grad}(a) \leq 1, \mathrm{grad}(b) = 0, \mathrm{grad}(c) = 0$, so dass gilt:

$$\frac{2x^3 - 13x^2 + 18x - 4}{(x-3)^2(x+2i)(x-2i)} = \frac{a(x)}{(x-3)^2} + \frac{b(x)}{(x+2i)} + \frac{c(x)}{(x-2i)} \,.$$

Hausaufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ ein Polynom vom Grad $n-1$ mit den Koeffizienten $\vec{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$, d. h.

$$p(x) = P_{\vec{a}}(x) \,.$$

Wir betrachten speziell $n = 8$, $\vec{a} = (2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1)$ und $\omega = e^{\frac{2\pi i}{8}}$.
Berechnen Sie die Fouriertransformierte

$$\mathcal{F}_{n,\omega}(\vec{a}) = (P_{\vec{a}}(1), P_{\vec{a}}(\omega), \ldots, P_{\vec{a}}(\omega^{n-1}))$$

durch Ausführung des Divide-and-Conquer Algorithmus $\mathtt{DFT}(\vec{a}, \omega)$.

Hausaufgabe 5 (4 Punkte)

Wir betrachten die Symmetrische Gruppe S_n aller Permutationen einer Teilmenge $[n]$ der natürlichen Zahlen mit der Komposition von Abbildungen als Gruppenverknüpfung.

1. Falls S_n zyklisch ist, dann gilt $n \leq 2$. Beweis!

2. Bestimmen Sie die größte Zahl k mit der Eigenschaft, dass es ein Element $p \in S_7$ gibt mit der Ordnung k, d. h. $\mathrm{ord}(p) = k$.

   Begründen Sie Ihre Herleitung und geben Sie eine entsprechende Permutation p an.

Hausaufgabe 6 (4 Punkte)

1. Bestimmen Sie den Koeffizienten von tx^2y^4z in der ausmultiplizierten Summenentwicklung von $(x + y + z + t)^8$ Zahl in Dezimaldarstellung.

   Berechnen Sie das Ergebnis durch sukzessive Klammerung und Bestimmung von Binomialkoeffizienten.

2. Sei p eine Primzahl und $i \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq i \leq p - 1$.

   Man zeige, dass p Teiler von $\binom{p}{i}$ ist.

   Gilt diese Aussage auch dann, wenn $p \in \mathbb{N}$ keine Primzahl ist? Beispiel!

Hausaufgabe 7 (4 Punkte)

Die Binomische Formel gilt auch, wenn man statt Potenzen fallende oder steigende Faktorielle verwendet. Beweisen Sie die folgende Gleichung durch Induktion.

$$(x + y)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\overline{k}} y^{\overline{n-k}} .$$

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

Sei $M = \{0, 1, 2\}$.

1. Listen Sie alle Äquivalenzrelationen über M auf!
2. Wie viele Partitionen gibt es über M?
3. Gibt es eine Äquivalenzrelation über der leeren Menge?
4. Wie viele surjektive Abbildungen f von M auf $M' = \{1, 2\}$ gibt es?
5. Wie viele injektive Operationen $f : M \to M$ gibt es?
6. Geben Sie alle k-Permutationen von M an!

Begründen Sie Ihre Antworten.

Vorbereitung 2

1. Ein Dominostein besteht aus zwei Quadraten. In jedem Quadrat sei eine Zahl zwischen 1 und 7 durch Punkte dargestellt.
   Wie viele verschiedene Dominosteine dieser Art gibt es?

2. Bestimmen Sie die Anzahl aller Wörter, die sich aus den Buchstaben des Wortes

   MINIMALISIERUNG

   bilden lassen. Dabei darf und muss jedes Vorkommen eines Buchstaben des o. g. Wortes genau einmal verwendet werden.

Vorbereitung 3

Am Montagabend wählen sich n Studenten auf m Rechnern rayhalle1, rayhalle2 bis rayhalle m ein, um die neuen Übungsaufgaben zu lesen. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür, wenn darauf geachtet wird,

1. welcher Student auf welchem Rechner eingeloggt ist,
2. wie viele Studenten auf welchem Rechner eingeloggt sind,
3. welche Studenten gemeinsam auf dem gleichen Rechner eingeloggt sind,
4. wie viele Studenten gemeinsam auf dem gleichen Rechner eingeloggt sind,

und wie hängen die Antworten jeweils davon ab, ob auf jedem Rechner

- höchstens
- mindestens
- genau

ein Student eingeloggt ist.

Vorbereitung 4

Bestimmen Sie die Binomialkoeffizienten von $x^3y^2z^2$ und x^2z^3 in $(x + xy + z)^5$.

Vorbereitung 5

In einem Rangierbahnhof gibt es 30 parallel laufende Gleise, auf denen Schwertransporte zusammengestellt werden. Wegen der übermäßigen Breite der Ladung können keine zwei Züge auf benachbarten Gleisen plaziert werden.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, 9 (nicht unterscheidbare) Züge auf die Gleise so zu verteilen, dass sich die Züge nicht behindern?

Vorbereitung 6

Man zeige:

1. Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt $\qquad \Delta x^{\overline{n}} = n(x+1)^{\overline{n-1}}$. Beweis!
2. Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt $\qquad \nabla x^{\underline{n}} = n(x-1)^{\underline{n-1}}$.
   Benutzen Sie die Gleichung $E \cdot \nabla = \Delta$ zusammen mit Lemma 203 für den Beweis!
3. Es gilt $\nabla\Delta = \Delta\nabla$. Beweis!

Vorbereitung 7

Berechnen Sie mit Hilfe der Partiellen Summation für $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k \, .$$

Vorbereitung 8

Beweisen Sie die folgende Identität für alle $n, i \geq 0$ mit Binomialinversion:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} = \delta_{n,i} \qquad .$$

Hierbei ist $\delta_{n,i} = 1$, falls $n = i$, und $\delta_{n,i} = 0$, falls $n \neq i$.

Tutoraufgabe 1

1. Wie viele verschiedene Ergebnisse („Wurfkonstellationen“) kann es geben, wenn man mit 4 Würfeln gleichzeitig würfelt? Unterscheiden Sie dabei zwischen folgenden Szenarien:

   (a) Die Würfel sind alle verschiedenfarbig und damit unterscheidbar.

   (b) Die Würfel sind alle gleichfarbig.

   (c) Zwei Würfel sind blau und zwei Würfel sind grün.

2. Wie viele verschiedene Buchstabenfolgen kann man aus den Buchstaben des Wortes *ABRAKADABRA* bilden, wenn jeder Buchstabe genauso oft wie im Ursprungswort vorkommen soll? (Z. B. muss das A genau fünfmal vorkommen.)

Tutoraufgabe 2

4 Studenten erhalten 12 Tafeln Schokolade. Wie viele Möglichkeiten gibt es jeweils, stets ganze Tafeln auf die 4 Studenten aufzuteilen?
Beantworten Sie diese Frage für die folgenden zwei Fälle und führen Sie dabei Ihre Antwort auf die Lösungen in der Tabelle der Vorlesung zurück.

1. Die 12 Tafeln sind nicht unterscheidbar und die Studenten sind unterscheidbar (es ist also nicht egal, wer wie viele bekommt).

2. Die 12 Tafeln sind unterscheidbar und die Studenten sind nicht unterscheidbar. Aber es soll jeder Student genau 3 Tafeln bekommen.

Tutoraufgabe 3

Berechnen Sie mit Hilfe der Partiellen Summation für $m, n \in \mathbb{N}$ und $m \leq n$

$$\sum_{k=m}^{n} k \cdot \binom{k}{m} .$$

Tutoraufgabe 4

1. Bestimmen Sie mit Hilfe der Binomialinversion eine Folge $(a_i)_{i\geq 0}$, so dass für alle $n \geq 0$ gilt

$$n! = \sum_{i=0}^{n} a_i n^{\underline{i}}.$$

2. Beweisen Sie die folgende Identität für alle $n, i \geq 0$:

$$\sum_{k=0}^{n} s_{n,k} S_{k,i} (-1)^{n-k} = \delta_{n,i} .$$

   $s_{n,k}$ (bzw. $S_{n,k}$) sind die Stirling-Zahlen erster (bzw. zweiter) Art.