SS 2011

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Ernst W. Mayr

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2011SS/dwt/

Sommersemester 2011

Kapitel 0 Organisatorisches

- Vorlesungen:
  - Di 14:00–15:30 (PH HS1), Do 14:15–15:45 (PH HS1)
    Abweichende Termine: 19.5, 9.6, 30.6, 14.7.: ZÜ statt VL (PH HS1)
    Pflichtvorlesung Grundstudium(Diplom, Bachelor IN, Bioinformatik)
    Modulnr.: IN0018
- Übung:
  - 2SWS Tutorübung: siehe Webseite zur Übung
  - 2SWS (freiwillige) Zentralübung: Fr 16:00–17:30 (MI HS1) (aber: siehe oben)
  - Übungsleitung: Dr. W. Meixner
- Umfang:
  - 3V+2TÜ+2ZÜ, 6 ECTS-Punkte
- Sprechstunde:
  - nach Vereinbarung

- Vorkenntnisse:
    - Einführung in die Informatik I/II
    - Diskrete Strukturen
- Weiterführende Vorlesungen:
    - Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen
    - Randomisierte Algorithmen
    - Komplexitätstheorie
    - Internetalgorithmik
    - ...
- Webseite:

http://wwwmayr.in.tum.de/lehre/2011SS/dwt/

- Übungsleitung:
  - Dr. Werner Meixner, MI 03.09.040 (meixner@in.tum.de)
    Sprechstunde: Dienstag, 11:30Uhr und nach Vereinbarung
- Sekretariat:
  - Frau Lissner, MI 03.09.052 (lissner@in.tum.de)

- Übungsaufgaben und Klausur:
  - Ausgabe jeweils am Dienstag auf der Webseite der Vorlesung, ab 12:00Uhr
  - Abgabe eine Woche später bis 12:00Uhr, Briefkasten im Keller
  - Vorbereitung in der Tutorübung
- Klausur:
  - Zwischenklausur (50% Gewicht) 24. Juni 2011, 16:15–17:45Uhr, MW 1801, MW 2001
    Anmeldung über TUMonline (erforderlich!): 16. Mai – 5. Juni 2011
  - Endklausur (50% Gewicht) am 6. August 2011, 11:30–13:30Uhr, MW 0001
  - Wiederholungsklausur am 10. Oktober 2011, 11:30–14:00Uhr
  - bei den Klausuren sind *keine* Hilfsmittel außer einem handbeschriebenen DIN-A4-Blatt zugelassen
  - Für das Bestehen des Moduls müssen 40% der erreichbaren Hausaufgabenpunkte erzielt werden; die Note ergibt sich aus den Leistungen in der zweigeteilten Klausur.
  - vorauss. 11 Übungsblätter, das letzte am 18. Juli 2011, jedes 20 Punkte

1. Vorlesungsinhalt

- Endliche Wahrscheinlichkeitsräume
  - Wahrscheinlichkeitsraum, Ereignis, Zufallsvariable
  - spezielle Verteilungen
  - Ungleichungen von Markov und Chebyshev
- Unendliche Wahrscheinlichkeitsräume
  - Normalverteilung, Exponentialverteilung
  - Zentraler Grenzwertsatz
- Stochastische Prozesse
  - Markovketten
  - Warteschlangen
- Statistik
  - Schätzvariablen
  - Konfidenzintervalle
  - Testen von Hypothesen

2. Literatur

T. Schickinger, A. Steger:
Diskrete Strukturen - Band 2,
Springer Verlag, 2001

M. Greiner, G. Tinhofer:
Stochastik für Informatiker,
Carl Hanser Verlag, 1996

H. Gordon:
Discrete Probability,
Springer-Verlag, 1997

R. Motwani, P. Raghavan:
Randomized Algorithms,
Cambridge University Press, 1995

M. Hofri:
Probabilistic Analysis of Algorithms,
Springer Verlag, 1987

L. Fahrmeir, R. Künstler, I. Pigeot, G. Tutz:
Statistik - Der Weg zur Datenanalyse,
Springer-Verlag, 1997

3. Einleitung

Was bedeutet Zufall?

- Große Menge von „gleichen“ Ereignissen, wobei sich bestimmte Eigenschaften/Messgrößen jeweils ändern können
- Unkenntnis über den Ausgang eines durchgeführten Experiments
- Ein komplexes Experiment wird theoretisch vielfach mit eventuell sich änderndem Ergebnis ausgeführt
- physikalischer Zufall (Rauschen, Kernzerfall)

Zufall in der *diskreten* Informatik

- Die Eingabe für einen bestimmten Algorithmus wird aus einer großen Menge möglicher Eingaben zufällig gewählt:

  average case

- Die Laufzeit einzelner Schritte eines Algorithmus hängt in „unbekannter“ Weise von der Eingabe ab:

  amortisierte Kostenanalyse

- Der Algorithmus verwendet Zufallsbits, um mit großer Wahrscheinlichkeit gewisse Problemsituationen zu vermeiden:

  Randomisierung

Kapitel I Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

1. Grundlagen

Definition 1

1. Ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum ist durch eine Ergebnismenge $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ von Elementarereignissen gegeben.
2. Jedem Elementarereignis ω_i ist eine (Elementar-)Wahrscheinlichkeit $\Pr[\omega_i]$ zugeordnet, wobei wir fordern, dass $0 \leq \Pr[\omega_i] \leq 1$ und

$$\sum_{\omega \in \Omega} \Pr[\omega] = 1.$$

3. Eine Menge $E \subseteq \Omega$ heißt Ereignis. Die Wahrscheinlichkeit $\Pr[E]$ eines Ereignisses ist durch

$$\Pr[E] := \sum_{\omega \in E} \Pr[\omega]$$

definiert.

Beispiel 2

Zwei faire Würfel (einer weiß, einer schwarz) werden geworfen. Wir sind an der Gesamtzahl der angezeigten Augen interessiert:

$$
\begin{aligned}
\Omega \quad = \{ \quad & (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\
& (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\
& (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\
& (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\
& (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\
& (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \quad \}
\end{aligned}
$$

1. Die Wahrscheinlichkeit $\Pr((i,j))$ eines jeden Elementarereignisses (i,j) ist $\frac{1}{36}$.

2. Die Wahrscheinlichkeit $\Pr(E)$ des Ereignisses

$$E = \{\text{Die Gesamtzahl der Augen ist } 10\}$$

ist $\frac{1}{12}$.

Wir hätten aber auch sagen können:

$$\Omega = \{2, 3, 4, \ldots, 10, 11, 12\}$$

Die Wahrscheinlichkeit der Elementarereignisse ist dann aber nicht mehr ganz elementar. Es ist z.B.

1. $\Pr(2) = \frac{1}{36}$;
2. $\Pr(4) = \frac{1}{12}$;
3. $\Pr(7) = \frac{1}{6}$.

Beispiel 3

Eine faire Münze wird so lange geworfen, bis die gleiche Seite zweimal hintereinander fällt. Dann ist

$$\Omega = \{\text{hh, tt, htt, thh, thtt, hthh, hthtt, ththh}, \ldots\}$$

Frage: Was sind die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Elementarereignisse?