SS 2011

Zentralübung
Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie
(zur Vorlesung Prof. Mayr)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2011SS/dwt/uebung/

17. Juni 2011

ZÜ IV

Übersicht:

1. Thema: Erzeugende Funktionen, Rekurrenz: VA 1+2 von Blatt 6
2. Vorbereitung auf Tutoraufgaben: VA von Blatt 7

1. Thema: Erzeugende Funktionen, Rekurrenz: VA 1+2 von Blatt 6

Zur Erinnerung:

Eine reelle erzeugende Funktion f ist eine Abbildung von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, die sich in einer Umgebung von $0 \in \mathbb{R}$ durch eine Potenzreihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ darstellen läßt.

Man sagt, dass die Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ von f erzeugt wird.

Falls für alle $i \in \mathbb{N}_0$ $a_i \geq 0$ und $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = 1$ gilt, dann nennt man f eine wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion.

Ist e^z, e^{z-1} erzeugend, wahrscheinlichkeitserzeugend?

1.1 VA 1 von Blatt 6

Bestimmen Sie die erzeugende Funktion einer negativ binomialverteilten Zufallsvariablen.

Lösung:

Die Dichte einer negativ binomialverteilten Zufallsvariablen X_n für n-maliges Auftreten des Wertes 1 bei Erfolgswahrscheinlichkeit p ist

$$f_{X_n}(i) = \binom{i-1}{n-1} \cdot p^n (1-p)^{i-n}\,.$$

Man beachte, dass mit $\binom{i-1}{n-1} = \frac{(i-1)^{\underline{n-1}}}{(n-1)!}$ für $i < n$ sofort $\binom{i-1}{n-1} = 0$ folgt.

Für die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion $G_{X_n}(s)$ gilt dann

$$\begin{aligned} G_{X_n}(s) &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i-1}{n-1} \cdot p^n (1-p)^{i-n} \cdot s^i \\ &= \sum_{i=n}^{\infty} \binom{i-1}{n-1} \cdot p^n (1-p)^{i-n} \cdot s^i \,. \end{aligned}$$

Dem Wortlaut nach ist die Aufgabe damit schon gelöst!

Nun aber suchen wir noch eine geschlossene Darstellung für $G_{X_n}(s)$.

Ein Schlüssel für eine geschlossene Darstellung der Funktion $G_{X_n}(s)$ kann u. a. die Rekursion für alle $n \geq 1$ sein mit

$$G_{X_{n+1}}(s) = \frac{p \cdot s^2}{n} \cdot G'_{X_n}(s)\,,$$

wobei laut Vorlesung für $n = 1$ gilt

$$G_{X_1}(s) = \frac{ps}{1-(1-p)s}\,.$$

Beweis der Rekursion:

$$\begin{aligned}
G'_{X_n}(s) &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i-1}{n-1} \cdot p^n (1-p)^{i-n} \cdot i \cdot s^{i-1} \\
&= \frac{n}{p \cdot s^2} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i}{n} \cdot p^{n+1} (1-p)^{i-n} \cdot s^{i+1} \\
&= \frac{n}{p \cdot s^2} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \binom{i-1}{n+1-1} \cdot p^{n+1} (1-p)^{i-(n+1)} \cdot s^{i} \\
&= \frac{n}{p \cdot s^2} \cdot G_{X_{n+1}}(s)\,.
\end{aligned}$$

Ein alternativer Ansatz $X_n = Z_1 + Z_2 + \ldots Z_n$ mit unabhängigen geometrisch verteilten Z_i ist nach Vorlesung

$$G_{X_n}(s) = G_{Z_1}(s) \cdot G_{Z_2}(s) \cdot \ldots \cdot G_{Z_n}(s) = \left(\frac{ps}{1-(1-p)s} \right)^n .$$

1.2 VA 2 von Blatt 6

1. Sei $(H_n)_{n\geq 1}$ eine rekurrente Ereignisfolge.

   Die Zufallsvariable Z mit $W_Z = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ messe für $k \in \mathbb{N}$ die Wartezeit $Z = k$ bis zum Eintreten des ersten Ereignisses H_k der Ereignisfolge.

   Zeigen Sie die Ungleichung

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \Pr[Z = k] \leq 1\,.$$

Lösung:

Bemerkung:
Bei oberflächlicher Betrachtung erscheint die Gültigkeit der Ungleichung als eine triviale Folge der Eigenschaft von Z, eine ,,Zufallsvariable" zu sein,
denn die Summe aller Wahrscheinlichkeiten für die Werte aus W_Z muss ja 1 sein.

Die Tatsache, dass $\Pr[Z = k]$ für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ definiert wurde, heißt aber noch nicht, dass Z bezüglich dieser Definition eine Zufallsvariable ist. Das ist noch nicht bewiesen.

Insbesondere haben wir bisher nur numerische Zufallsvariable mit $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ betrachtet.

Diese Aufgabe liefert erstmals den Nachweis, dass wir über Z von einer Zufallsvariable (im erweiterten Sinn) sprechen dürfen.

Zum Beweis genügt es im Prinzip die paarweise Disjunktheit aller Ereignisse $Z = k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ zu beweisen und die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten anzugeben.

Wir gehen aus von der Gleichung

$$\Pr[H_1] + \Pr[\bar{H}_1] = 1\,.$$

Wegen $\Pr[Z = 1] = \Pr[H_1]$ folgt

$$\sum_{i=1}^{1} \Pr[Z = i] + \Pr[\bar{H}_1] = 1\,.$$

Dies ist der Induktionsanfang zum induktiven Beweis der folgenden Gleichung für alle $n \geq 1$.

Für alle $n \geq 1$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \Pr[Z = i] + \Pr\left[\bar{H}_1 \cap \bar{H}_2 \cap \ldots \cap \bar{H}_n\right] \;=\; 1\,.$$

Den Induktionsschritt von n auf $n+1$ beweist man wie folgt.

$$
\begin{aligned}
1 &= \sum_{i=1}^{n} \Pr[Z=i] + \Pr\left[\bar{H}_1 \cap \bar{H}_2 \cap \ldots \cap \bar{H}_n\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Pr[Z=i] + \Pr\left[\bar{H}_1 \cap \bar{H}_2 \cap \ldots \cap \bar{H}_n \cap H_{n+1}\right] \\
&\qquad\qquad + \Pr\left[\bar{H}_1 \cap \bar{H}_2 \cap \ldots \cap \bar{H}_n \cap \bar{H}_{n+1}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Pr[Z=i] + \Pr[Z=n+1] + \Pr\left[\bar{H}_1 \cap \bar{H}_2 \cap \ldots \cap \bar{H}_{n+1}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \Pr[Z=i] + \Pr\left[\bar{H}_1 \cap \bar{H}_2 \cap \ldots \cap \bar{H}_{n+1}\right] .
\end{aligned}
$$

Daraus folgt unmittelbar die Behauptung.

2. Sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge unabhängiger Indikatorvariablen mit gleicher Bernoulli-Verteilung.

   Zeigen Sie, dass die Folge $(H_n)_{n\geq 1}$ der Ereignisse $H_n = (X_n = 1)$ rekurrent ist.

Lösung:

Wir zeigen für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i > j$

$$\Pr\left[H_i \,|\bar{H}_1 \cap \ldots \cap \bar{H}_{j-1} \cap H_j\right] = \Pr[H_{i-j}]\,.$$

Sei p die Erfolgswahrscheinlichkeit für die Variablen X_n.

Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $\Pr[H_i] = p$.

Da die X_i unabhängig sind, folgt

$$\begin{aligned}
\Pr\left[H_i \,|\bar{H}_1 \cap \ldots \cap \bar{H}_{j-1} \cap H_j\right] &= \frac{\Pr\left[H_i \,\cap \bar{H}_1 \cap \ldots \cap \bar{H}_{j-1} \cap H_j\right]}{\Pr\left[\bar{H}_1 \cap \ldots \cap \bar{H}_{j-1} \cap H_j\right]} \\
&= \Pr[H_i] \\
&= p \\
&= \Pr[H_{i-j}]\,.
\end{aligned}$$

2. Vorbereitung auf Tutoraufgaben: VA von Blatt 7

2.1 VA 1 von Blatt 7

Auf einem Blatt Papier sind im Abstand von 4 cm horizontale Linien aufgemalt. Wir werfen eine Münze mit einem Radius von 1 cm auf dieses Blatt Papier. Dabei treffen wir immer das Papier und werfen nicht daneben, so dass der Mittelpunkt der Münze gleichverteilt wird auf dem Papier.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit berührt die Münze eine Linie?

Lösung:

Die Gleichverteilung von Punkten auf einer Fläche bedeutet, dass

gleich große Flächenstücke im Mittel gleich oft von erzeugten Punkten berührt werden,

hier z. B. durch den Mittelpunkt geworfener Münzen.

Die Fläche zwischen zwei aufeinanderfolgenden horizontalen Linien teilt sich in gleich große Bereiche B_1 und B_2 von Lagepositionen der Münze,

wenn B_1 die Menge von Punkten umfasst mit größerem Abstand als 1 zu einer der beiden Linien

und B_2 die übrigen Punkte zwischen den Linien enthält.

Die Münze berührt genau dann eine der Linien, wenn deren Mittelpunkt in B_2 fällt.

Da die Flächen von B_1 und B_2 gleich groß sind, berührt die Münze mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ eine der beiden Linien.

Da wir davon ausgehen, dass jeder der Zwischenräume zwischen benachbarten Linien mit gleicher Wahrscheinlichkeit getroffen werden,

berührt die Münze mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ irgendeine Linie.

2.2 VA 2 von Blatt 7

Seien A, B und C jeweils (unabhängig) gleichverteilt über $[0, 1]$.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Lösungen der Gleichung $Ax^2 + Bx + C = 0$ reellwertig sind?

Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Dichtefunktion von $A \cdot C$ und verwenden Sie für die sich anschließende Rechnung $\int x^2 \ln x \, \mathsf{d}x = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9}$.

Lösung:

A, B und C sind kontinuierliche Zufallsvariablen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Es gibt höchstens 2 Lösungen!

Alle Lösungen sind genau dann reell, wenn $B^2 \geq 4AC$ gilt.

Wir definieren den 3-dimensionalen Körper

$$V := \{(A, B, C)\,;\, B^2 \geq 4AC \wedge 0 \leq A, B, C \leq 1\}\,.$$

Aus Gründen der Unabhängigkeit und Gleichverteilung der A, B, C ist $\Pr[B^2 \geq 4AC]$ durch das Verhältnis des Volumens von V zum Volumen des Einheitswürfels $[0, 1]^3$ bestimmt.

Das Volumen des Einheitswürfels ist 1.

Wir definieren noch
$F(B) := \{(A,C)\,;\, B^2 \geq 4AC \wedge 0 \leq A, C \leq 1\}$

und erhalten

$$\begin{aligned}
\Pr[B^2 \geq 4AC] &= \int_V \mathsf{d}A\,\mathsf{d}B\,\mathsf{d}C \\
&= \int_0^1 \left(\int_{F(B)} \mathsf{d}A\,\mathsf{d}C \right) \mathsf{d}B \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{B^2/4} \mathsf{d}A + \int_{B^2/4}^1 \frac{B^2/4}{A}\,\mathsf{d}A \right) \mathsf{d}B \\
&= \int_0^1 \frac{B^2}{4} - \frac{B^2}{4} \ln \frac{B^2}{4}\,\mathsf{d}B \\
&= \frac{\ln 2}{6} + \frac{5}{36} \approx 25.4\%\,.
\end{aligned}$$

2.3 VA 3 von Blatt 7

Es sei Ω eine Ergebnismenge. Wir nehmen an, dass wir für eine Menge $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ von Ereignissen Wahrscheinlichkeiten definieren wollen. Wir suchen dazu eine kleinste σ-Algebra über Ω, die $\mathcal{E}$ enthält.
Sei

$$\sigma_\Omega(\mathcal{E}) := \bigcap \{\mathcal{A}\,;\, \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra über } \Omega \text{ mit } \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}\}\,.$$

1. Zeigen Sie, dass $\sigma_\Omega(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra über Ω mit $\mathcal{E} \subseteq \sigma_\Omega(\mathcal{E})$ ist und dass für jede σ-Algebra $\mathcal{A}$ über Ω mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ die Relation $\sigma_\Omega(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$ gilt.

2. Die Borelschen Mengen $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ über $\mathbb{R}^2$ sind definiert durch

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) := \sigma_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{E}) \quad \text{mit} \quad \mathcal{E} = \{[a,b] \times [c,d]\,;\, a,b,c,d \in \mathbb{R}\}\,.$$

   Zeigen Sie, dass die Menge $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ in $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ enthalten ist.

Lösung 1. Teilaufgabe:

Wir lernen ein wichtiges Beweisprinizip kennen:
Konstruktion mittels Bildung des Durchschnitts (z. B. von Algebren).

Wir zeigen zunächst, dass $\sigma_\Omega(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra ist.

Dazu sind die folgenden Abgeschlossenheitseigenschaften des Systems $\sigma_\Omega(\mathcal{E})$ nachzuweisen:

(E1) $\quad \Omega \in \sigma_\Omega(\mathcal{E})$.

(E2) $\quad A \in \sigma_\Omega(\mathcal{E}) \;\Rightarrow\; \overline{A} \in \sigma_\Omega(\mathcal{E})$.

(E3) $\quad A_n \in \sigma_\Omega(\mathcal{E})$ für alle $n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \sigma_\Omega(\mathcal{E})$.

Beweis: Tafelanschrift.

Nun zeigen wir:

Für jede σ-Algebra $\mathcal{A}$ über Ω mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ gilt $\sigma_\Omega(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$

Beweis:

$\sigma_\Omega(\mathcal{E})$ ist Durchschnitt aller σ-Algebren mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$.

Daraus folgt $\sigma_\Omega(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$.

Lösung 2. Teilaufgabe:

Wir schöpfen das Komplement von K durch abzählbar viele Intervalle aus und bilden dann das Komplement.

(siehe Tafelanschrift)

2.4 VA 4 von Blatt 7

Sei $\langle\Omega, \Pr\rangle$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Wir betrachten die Menge $\Omega^{\mathbb{N}}$ aller Folgen $x_1, x_2, \ldots$ von Elementen der Menge Ω und definieren für alle $i \in \mathbb{N}$ und $e \in \Omega$ die Mengen
$A_{i,e} = \{\omega \in \Omega^{\mathbb{N}}\,;\, \omega_i = e\} \subseteq \Omega^{\mathbb{N}}$.
Dabei bedeutet ω_i das i-te Folgenelement der Folge ω.

Sei $\mathcal{E} = \{A_{i,e}\,;\, i \in \mathbb{N}, e \in \Omega\}$.

Man zeige:

Es gibt einen Kolmogorov'schen Wahrscheinlichkeitsraum $\langle\Omega^{\mathbb{N}}, \sigma_{\Omega^{\mathbb{N}}}(\mathcal{E}), \Pr_{\mathbb{N}}\rangle$, so dass für alle $i \in \mathbb{N}$ und $e \in \Omega$ gilt

$$\Pr_{\mathbb{N}}[A_{i,e}] = \Pr[e]\,.$$

Lösung:

Wir definieren $\Pr_{\mathbb{N}}$ wie folgt. Wir konstruieren

1. die Wahrscheinlichkeit des Komplements

$$\Pr_{\mathbb{N}}[\overline{A_{i,e}}] = 1 - \Pr_{\mathbb{N}}[A_{i,e}].$$

2. die $A_{i,e}$ als unabhängige Ereignisse:

$$\Pr_{\mathbb{N}}[A_{i_1,e_1} \cap \ldots \cap A_{i_k,e_k}] = \Pr_{\mathbb{N}}[A_{i_1,e_1}] \cdot \ldots \cdot \Pr_{\mathbb{N}}[A_{i_k,e_k}].$$

3. die Wahrscheinlichkeit für beliebige endliche Vereinigungen mit der Siebformel:

$$\Pr_{\mathbb{N}}[A_{i_1,e_1} \cup \ldots \cup A_{i_k,e_k}] = \Pr_{\mathbb{N}}[A_{i_1,e_1}] + \ldots + \Pr_{\mathbb{N}}[A_{i_k,e_k}] - \ldots$$

4. die Wahrscheinlichkeit für beliebige abzählbare Vereinigungen als Limes:

$$\Pr_{\mathbb{N}}[\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n] = \lim_{n \to \infty} \Pr_{\mathbb{N}}[A_1 \cup \ldots \cup A_n].$$

Die Ausarbeitung der Beweise ist Gegenstand der Maßtheorie.