

Die Gesamtzahl der Abbildungen $N \rightarrow R$ ist

$$\begin{aligned} &= r^n = \sum_{A \subseteq R} \# \text{ der surjektiven Abbildungen } N \rightarrow A \\ &= \sum_{k=0}^r \sum_{\substack{A \subseteq R \\ |A|=k}} \# \text{ der surjektiven Abbildungen } N \rightarrow A \\ &= \sum_{k=0}^r \left(\binom{r}{k} \cdot k! \cdot S_{n,k} \right) = \sum_{k=0}^r S_{n,k} \cdot r^{\underline{k}} \\ &= \sum_{k=0}^n S_{n,k} \cdot r^{\underline{k}}, \quad \text{da } r^{\underline{k}} = 0 \text{ f\u00fcr } k > r . \end{aligned}$$

4.5 Zusammenfassende Darstellung

N seien n Tennisbälle, R seien r Schachteln: „balls into bins“

	beliebig	injektiv	surjektiv	bijektiv ($n = r$)
N unterscheidbar R unterscheidbar	r^n	$r^{\underline{n}}$	$r! \cdot S_{n,r}$	$r! = n!$
N nicht unterscheidbar R unterscheidbar	$\frac{r^{\bar{n}}}{n!}$	$\binom{r}{n}$	$\binom{n-1}{r-1}$	1
N unterscheidbar R nicht unterscheidbar	$\sum_{k=1}^r S_{n,k}$	1 oder 0	$S_{n,r}$	1
N nicht unterscheidbar R nicht unterscheidbar	$\sum_{k=1}^r P_{n,k}$	1 oder 0	$P_{n,r}$	1

4.6 Abzählen von Permutationen

4.6.1 Stirling-Zahlen der ersten Art

Definition 172

Die **Stirling-Zahl der ersten Art**

$$s_{n,k}$$

gibt die Anzahl der Permutationen $\in S_n$ mit genau k Zyklen an.

Einfache Beobachtungen:

- 1 für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^n s_{n,k} = n!$$

2

$$s_{n,1} = (n-1)! = \frac{n!}{n}$$

3

$$s_{n,n-1} = \binom{n}{2}$$

4

$$s_{n,n} = 1$$

5

$$s_{n,k} = 0 \text{ für } k > n \geq 0$$

Man setzt weiterhin:

$$s_{0,0} := 1 \quad s_{n,0} := 0 \text{ für } n \in \mathbb{N} \quad s_{n,k} = 0 \text{ für } n \in \mathbb{N}_0, k < 0.$$

4.6.2 Typ einer Permutation

Definition 173

Sei π eine Permutation von n Objekten, $b_i(\pi)$ die Anzahl der Zyklen von π der Länge i ($i = 1, \dots, n$) und $b(\pi)$ die Anzahl der Zyklen von π , also

$$\sum_{i=1}^n i \cdot b_i(\pi) = n \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^n b_i(\pi) = b(\pi).$$

Dann heißt der formale Ausdruck

$$1^{b_1(\pi)} 2^{b_2(\pi)} 3^{b_3(\pi)} \dots n^{b_n(\pi)}$$

der **Typ von π** (Potenzen mit Exponent 0 werden gewöhnlich nicht geschrieben).

Beispiel 174

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 7 & 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= (4\ 5\ 6\ 2\ 7\ 1\ 8\ 3)$$

als Funktionswerte

$$= (1\ 4\ 2\ 5\ 7\ 8\ 3\ 6)$$

in Zykelschreibweise

Typ: 8^1

Beispiel 175

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 7 & 1 & 6 & 5 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= (2\ 4\ 7\ 1\ 6\ 5\ 3\ 8)$$

$$= (1\ 2\ 4)\ (3\ 7)\ (5\ 6)\ (8)$$

Typ: $1^1\ 2^2\ 3^1$