Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2012/13
Arbeitsblatt 4
14. Januar 2013

Diskrete Strukturen

Arbeitsblatt 4: Lösung linearer Rekursionsgleichungen

(zu Übungsblatt 12)

Hinweis: *Arbeitsblätter in diesem Semester dienen grundsätzlich der selbstständigen Vorbereitung von Haus- und Tutoraufgaben mit besonderen thematischen Schwerpunkten.*

Das Arbeitsblatt 4 fasst die für eine konkrete Lösung von linearen Rekursionsgleichungen mit konstanten Koeffizienten notwendigen Schritte zusammen und erläutert so den in der Vorlesung vorgestellten Hauptsatz zur Auflösung von homogenen Rekursionsgleichungen.

Wir betrachten auch die Lösung von inhomogenen Rekursionsgleichungen in Anlehnung an eine Methode von Cauchy bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen. Insgesamt ist die Lösungstheorie homogener linearer Rekursionsgleichungen weitgehend analog zur Lösungstheorie homogener linearer Differentialgleichungen. Beide Theorien tragen die Merkmale der Theorie linearer Operatoren, in der Eigenwerte und die zugeordneten Eigen- und Hauptvektoren eine zentrale Rolle spielen. Man kann nicht erwarten, diese Zusammenhänge bereits im ersten Semester zu verstehen. Konkrete Anwendungsbeispiele finden Sie in den Übungsblättern.

Das zentrale Hilfsmittel bei der Lösung einer Rekursionsgleichung sind die Nullstellen des sogenannten charakteristischen Polynoms der Rekursion. Die Lösungen lassen sich als eine Linearkombination von Elementen eines „Fundamentalsystems von Lösungen“ darstellen, die den genannten Nullstellen zugeordnet werden können. Zusätzliche Bedingungen in der Form sogenannter „Anfangsbedingungen“ werden durch geeignete Wahl von Linearkoeffizienten des Lösungsfundamentalsystems erfüllt. Dazu wird ein lineares Gleichungssystem für diese Koeffizienten angesetzt und gelöst.

Auch die erzeugende Funktion $F(z)$ der Lösungen $(f_n)_{n\geq 0}$ von homogenen linearen Rekursionen ist in dem o. g. Hauptsatz der Vorlesung vollständig als geschlossener Ausdruck angegeben, und zwar als rationaler Ausdruck bzw. Funktion $F(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$. Dabei ist $q^R(z)$ das charakteristische Polynom, oder anders gesagt, $q(z)$ ist gleich dem reflektierten Polynom des charakteristischen Polynoms, d. h. $q(z) = (q^R)^R(z)$. $p(z)$ wird mit dem Ansatz der „vollständigen Rekursion“ berechnet.

Wir halten fest, dass die praktische Lösung homogener linearer Rekursionen mit konstanten Koeffizienten keine Verwendung von erzeugenden Funktionen erfordert. Die Angabe einer Lösung einerseits und die Angabe eines geschlossenen Ausdrucks ihrer erzeugenden Funktion andererseits sind vollkommen entkoppelte Schritte, denen allerdings die Aufstellung des charakteristischen Polynoms gemeinsam ist.

Dagegen werden zur Lösung inhomogener linearer Rekursionen regelmäßig erzeugende Funktionen verwendet. Der interessierte Hörer wird bemerken, dass sich auch der Beweis des Hauptsatzes wesentlich auf erzeugende Funktionen stützt.

1. Vorgehensweise bei der Lösung homogener linearer Rekursionen

Wir gehen aus von der homogenen linearen Rekursiongleichung der Ordnung d mit konstanten Koeffizienten q_i für eine Folge $(f_n)_{n\geq 0}$

$$f_{n+d} + q_1 \cdot f_{n+d-1} + q_2 \cdot f_{n+d-2} + \ \dots \ + q_d \cdot f_n \ = \ 0 \,, \quad \forall n \geq 0 \,. \tag{1}$$

Allgemeine Lösung

Eine Gleichung „allgemein Lösen" heißt, ein Verfahren anzugeben, mit dem man alle Lösungen darstellen kann. Die Darstellungen enthalten dann in der Regel gewisse Parameter.

Zur allgemeinen Lösung der Gleichung (1) stellen wir zunächst das charakteristische Polynom $q^R(z)$ auf und bestimmen dessen Nullstellen.

$$q^R(z) \ = \ z^d + q_1 z^{d-1} + q_2 z^{d-2} + \ \dots \ + q_{d-1} z + q_d. \tag{2}$$

Die (i. A. komplexen) Nullstellen von $q^R(z)$ seien α_i mit Vielfachheit d_i für $i = 1, 2, \dots, k$ und $\sum_{i=1}^{i=k} d_i = d$. Die Anzahl verschiedener Nullstellen sei also k. Berücksichtigt man die Vielfachheit der Nullstellen, so zählt man d Nullstellen.

Nun ist die Folge $(f_n)_{n\geq 0}$ genau dann eine Lösung der Rekursion (1), wenn es Zahlen $c_{i,j}$ für $i = 1, 2, \dots, k$ und $j = 0, 1, \dots, d_i - 1$ gibt, so dass für alle $n \geq 0$ gilt:

$$f_n \ = \ \sum_{i=1}^{k} p_i(n) \cdot {\alpha_i}^n \qquad \text{mit} \tag{3}$$

$$p_i(n) \ = \ \sum_{j=0}^{d_i-1} c_{i,j} \cdot n^j \ = \ c_{i,0} + c_{i,1} \cdot n + \ \dots \ + c_{i,d_i-1} \cdot n^{d_i-1}. \tag{4}$$

Spezielle Lösung

Für jeden Koeffizientenvektor $(c_{i,j})$ der Länge d erhält man mit Formel (3) eine *spezielle Lösung* der Rekursion (1). Für beliebig vorgegebene Zahlen $a_0, a_1, \dots, a_{d-1}$ kann man die Parameter $c_{i,j}$ so wählen, dass die folgenden Gleichungen als sogenannte *Anfangsbedingungen* der Rekursionsgleichung erfüllt sind.

$$f_0 = a_0, \ f_1 = a_1, \ \dots \ , f_{d-1} = a_{d-1} \,. \tag{5}$$

Erzeugende Funktion einer speziellen Lösung

Die erzeugende Funktion $F(z)$ einer speziellen Lösung $(f_n)_{n\geq 0}$ der Rekursion (1) mit den Anfangsbedingungen (5) ist gleich der rationalen Funktion

$$F(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \tag{6}$$

mit dem zum charakteristischen Polynom (2) reflektierten Polynom

$$q(z) = 1 + q_1 z + q_2 z^2 + \ \dots \ + q_d z^d \tag{7}$$

und einem Polynom $p(z)$, das sich aus dem Ansatz der *vollständigen Rekursion* ergibt. Die vollständige Rekursionsgleichung beschreibt dabei die Gleichung (1) zusammen mit den Anfangsbedingungen (5) und ist wie folgt definiert.

Vollständige Rekursion

Seien $f_n = 0$ für alle $n < 0$. Beachten Sie die bekannte Definition der Deltafunktion $\delta_{i,j}$ mit $\delta_{i,i} = 1$ für alle i und $\delta_{i,j} = 0$ für alle $i \neq j$. Dann lautet die vollständige Rekursionsgleichung für alle $n \geq 0$

$$f_n + q_1 \cdot f_{n-1} + \ \dots \ + q_d \cdot f_{n-d} \quad = \quad e_0 \cdot \delta_{n,0} + e_1 \cdot \delta_{n,1} + \ \dots \ + e_{d-1} \cdot \delta_{n,d-1} \, . \tag{8}$$

Dabei sind die Parameter e_i mit den Anfangsbedingungen (5) durch die folgenden Gleichungen verknüpft.

$$f_n + q_1 \cdot f_{n-1} + \ \dots \ + q_d \cdot f_{n-d} \ = \ e_n \quad \text{für} \quad n = 0, 1, \dots, d-1 \, , \tag{9}$$

oder explizit

$$\begin{array}{rcccl} f_0 & = & e_0 & = & a_0 \, , \\ f_1 + q_1 \cdot f_0 & = & e_1 & = & a_1 + q_1 a_0 \, , \\ f_2 + q_1 \cdot f_1 + q_2 \cdot f_0 & = & e_2 & = & a_2 + q_1 a_1 + q_2 a_0 \, , \\ & \vdots & & \vdots & \\ f_{d-1} + q_1 \cdot f_{d-2} + \ \dots \ + q_{d-1} \cdot f_0 & = & e_{d-1} & = & a_{d-1} + q_1 \cdot a_{d-2} + \ \dots \ + q_{d-1} \cdot a_0 \, . \end{array}$$

Das gesuchte Polynom $p(z)$ ist nun gegeben durch

$$p(z) = e_0 + e_1 z + e_2 z^2 + \dots + e_{d-1} z^{d-1}. \tag{10}$$

2. Vorgehensweise bei der Lösung inhomogener Rekursionen

Wir gehen aus von einer inhomogenen linearen Rekursionsgleichung der Ordnung d mit konstanten Koeffizienten q_i und einem *inhomogenen Anteil* (Störglied) $(s_n)_{n \geq 0}$ für eine Folge $(f_n)_{n \geq 0}$

$$f_{n+d} + q_1 \cdot f_{n+d-1} + q_2 \cdot f_{n+d-2} + \ \dots \ + q_d \cdot f_n \quad = \quad s_n \, , \ \forall n \geq 0 \, . \tag{11}$$

Allgemeine Lösung

Die allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen Rekursionsgleichung erfolgt in 2 Schritten.

1. Bestimmung der allgemeinen Lösung $(h_n)_{n \geq 0}$ der zugeordneten homogenen Gleichung (d. h. der gegebenen Gleichung (11), allerdings mit $s_n = 0$ als rechte Seite).

2. Bestimmung einer partikulären Lösung $(p_n)_{n \geq 0}$ der inhomogenen Gleichung (11) mit den speziellen Anfangsbedingungen $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, ... , $a_{d-1} = 0$.

Die allgemeine Lösung $(f_n)_{n\geq 0}$ der inhomogenen Rekursionsgleichung (11) ergibt sich dann zu

$$f_n = h_n + p_n \quad \forall n \geq 0.$$

Zum ersten Schritt wurde bereits alles Wesentliche gesagt. Wir betrachten nun die Konstruktion einer partikulären Lösung.

Sei $q(z)$ das zum charakteristischen Polynom $q^R(z)$ reflektierte Polynom einer linearen Rekursion (1), d. h.

$$q(z) = 1 + q_1 z + q_2 z^2 + \ \ldots \ + q_d z^d.$$

Die partikuläre Lösung $(p_n)_{n\geq 0}$ von (11) mit *annullierenden Anfangsbedingungen* $p_0 = 0$, $p_1 = 0, \ldots, p_{d-1} = 0$ ist stets gegeben durch deren erzeugende Funktion $P(z)$ mit

$$P(z) = \frac{z^d \cdot \sum_{n\geq 0} s_n z^n}{q(z)}.$$

Falls nun $(s_n)_{n\geq 0}$ eine rationale erzeugende Funktion $S(z) = \sum_{n\geq 0} s_n z^n$ besitzt, kann man durch Partialbruchzerlegung von $P(z)$ eine geschlossene Formel für die partikuläre Lösung $(p_n)_{n\geq 0}$ berechnen. Man benötigt dazu u. a. die Zerlegung der Nennerfunktion $q(z)$ in Linearfaktoren. Diese Linearfaktoren ergeben sich aber unmittelbar aus den Nullstellen α_i des charakteristischen Polynoms $q^R(z)$. Es gilt

$$q(z) = (1 - \alpha_1 z)^{d_1} (1 - \alpha_2 z)^{d_2} \ \ldots \ (1 - \alpha_k z)^{d_k}. \tag{12}$$

Spezielle Lösung

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Rekursionsgleichung (11) enthält d Parameter $c_{i,j}$. Man kann diese Parameter wiederum so wählen, dass die Anfangsbedingungen (5) erfüllt sind.

Dazu bestimmt man aus der allgemeinen Lösung $(h_n)_{n\geq 0}$ der Gleichung (11) die d Parameter $c_{i,j}$ so, dass die Anfangsbedingungen (5) erfüllt sind, d. h.

$$h_0 = a_0,\ h_1 = a_1,\ \ldots\ ,\ h_{d-1} = a_{d-1} \tag{13}$$

für beliebig wählbare Werte $a_0, a_1, \ldots, a_{d-1}$.

Diejenige spezielle homogene Lösung, die die Gleichungen (13) erfüllt, bezeichnen wir mit $\bar{h}_n$. Die spezielle Lösung der Rekursion (11), die die Anfangsbedingungen (5) erfüllt, ergibt sich dann zu

$$f_n = \bar{h}_n + p_n\,, \quad \forall n \geq 0\,.$$