WS 2012/13

Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Strukturen (Prof. Mayr)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2012WS/ds/uebung/

9. Januar 2013

ZÜ IX

Übersicht:

1. Übungsbetrieb: Fragen zu Mid- und Endterm?
2. Thema: Geheimnis funktionaler Aufschreibung

   Zusatzaufgabe: Catalan-Zahlen
3. Vorbereitung: auf TA Blatt 11

1. Übungsbetrieb

Fragen zu Mid- und Endterm?

Klausurergebnisse
Klausureinsicht
Termin Endterm: Samstag, den 16.Februar 2013

Anmeldung Endterm!

Anmeldeschluss ist der 15.1.2013!!

Achtung!

Hausaufgaben zur Korrektur abgeben!!

2. Thema: Geheimnis funktionaler Aufschreibung

2.1 Klammerausdrücke

Klammerausdrücke dienen der eindeutigen Aufschreibung funktionaler Ausdrücke (z.B. der arithmetischen Ausdrücke).

Dabei werden die Plätze von Operanden eindeutig bezeichnet, indem jeweils eindeutig Klammerpaare rekonstruierbar sind bzw. den Operanden zugeordnet werden.

Erst die eindeutige Aufschreibung funktionaler Ausdrücke ermöglicht eine eindeutige mathematische Kommunikation!

Wir betrachten den folgenden Klammerausdruck:

$$(()()(()()))((())())$$

Zuordnung der schließenden Klammer zur ersten öffnenden Klammer:

$${\color{red}(}()()(()()){\color{red})}((())())$$

Zählt man sukzessive öffnende und gleichzeitig schließende Klammern von links nach rechts, dann ist die Zahl der öffnenden Klammern stets größer oder gleich der Zahl der schließenden Klammern.

Bei erstmaliger Gleichheit der Zählungen, hat man eine zugeordnete schließende Klammer gefunden.

2.2 Zusatzaufgabe 5

Um Klammerausdrücke zu zählen, beschränkt man sich auf Ausdrücke ohne Variable und einen einzigen Klammertyp von öffnenden und schließenden Klammern „(“ bzw. „)“. Man betrachtet also eine Menge $K \subseteq \{(,)\}^*$ von Wörtern über der Zeichenmenge $\{(,)\}$, die mit folgenden Regeln ähnlich der Bildung von arithmetischen Ausdrücken erzeugt werden kann. Dabei bezeichne ε das leere Wort. K heißt Menge der korrekten Klammerausdrücke über $\{(,)\}$.

- $\varepsilon \in K$,
- $w \in K \implies (w) \in K$,
- $w_1, w_2 \in K \implies w_1 w_2 \in K$.

Die Anzahl von korrekten Klammerausdrücken mit $n \in \mathbb{N}_0$ öffnenden Klammern heißt Catalan-Zahl C_n.

Wir messen die Länge der Wörter über $\{(,)\}^*$ auf mehrere Arten. Seien $|w|_($ bzw. $|w|_)$ die Anzahl der in w enthaltenen öffnenden bzw. schließenden Klammern.
Wir nennen u ein *Anfangsteilwort* (Praefix) von w, falls es ein Wort v gibt, so dass $w = uv$ gilt. Wir nennen ein Wort $w \in \{(,)\}^*$ *semipositiv*, falls $|u|_(\geq |u|_)$ für alle Anfangsteilworte u von w gilt.

Wir bezeichnen die Menge der korrekten Klammerausdrücke $w \in K$ der Gesamtlänge $|w| = |w|_(+ |w|_) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit K_n, d. h. $K_n = \{w \in K\,;\, |w| = n\}$.

Für alle $w \in K_n$ entsteht durch Vorausstellung einer öffnenden Klammer ein Wort $w' = (w$. Wir definieren die Menge $K'_n = (\,K_n = \{(w\,;\, w \in K_n\}$.

Es gilt $|K'_n| = |K_n|$.

Die Bestimmung von $|K'_n|$ ist Spezialfall des Ballot-Problems mit $a = |w|_($ und $b = |w|_)$ und $w \in K'_n$.

Danach gilt zunächst $a - b = 1$ und $a + b = n + 1$, und insbesondere

$$|K'_n| = \frac{a-b}{a+b} \cdot \binom{a+b}{a}.$$

(Siehe Foliennachtrag zum Ballot-Problem der Vorlesung Folie 326)

Bemerkung:
Mit der Behandlung des Ballot-Problems und der Klammerausdrücke haben wir eine bedeutende Brücke zu den Vorlesungen der Diskreten Wahrscheilichkeitstheorie (DWT) und der Theoretischen Informatik (THEO) geschlagen.

3. Vorbereitung auf TA Blatt 11

3.1 VA 1

In einem Rangierbahnhof gibt es 30 parallel laufende Gleise, auf denen Schwertransporte zusammengestellt werden. Wegen der übermäßigen Breite der Ladung können keine zwei Züge auf benachbarten Gleisen plaziert werden.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, 9 (nicht unterscheidbare) Züge auf die Gleise so zu verteilen, dass sich die Züge nicht behindern?

Lösung:

In dieser Aufgabe treten erstmalig Nebenbedingungen auf, deren Beachtung vorbereitende Überlegungen erfordern.

9 Züge benötigen minimal 17 Gleise, wenn man sie möglichst dicht aufeinanderfolgen läßt, denn zwischen den Zügen müssen sich mindestens 8 Gleise befinden.

An den 10 Stellen vor oder nach einem Zug können noch 13 freie Gleise eingefügt werden.

Die Verteilung entspricht einer Zuordnung von $n = 13$ nicht unterscheidbaren Gleisen auf $r = 10$ unterscheidbare Stellen.

Dies entspricht der Anzahl von $n = 13$-elementigen Multiteilmengen einer $r = 10$-elementigen Menge.

Für die gesuchte Anzahl x folgt

$$x = \frac{10^{\overline{13}}}{13!} = \binom{22}{13} = \binom{22}{9} = 22 \cdot 19 \cdot 17 \cdot 14 \cdot 5 = 497420\,.$$

3.2 VA 2

Vorbemerkung:

Wir kommen nun zum Thema der Rechnung mit Operatoren.

Die Einführung von Rechenregeln für Operatoren ermöglicht die formale Berechnung komplexer Ausdrücke und ermöglicht Zweierlei:

1. Die formale Herleitung von Ergebniswerten (Antworten).
2. Den formalen Beweis der entsprechenden Ergebnisaussagen.

Merke: Eine Berechnung ist die einfachste Form eines Beweises!

Sei F die Menge aller Abbildungen einer Menge M in die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Wir definieren für alle $f \in F$ und $g \in F$

die Summe, i. Z. $f + g$, bzw. das Produkt, i. Z. $f \cdot g$,

als diejenigen komplexwertigen Funktionen h bzw. k, für die für alle $x \in M$ gilt

$$\begin{aligned} h(x) = (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \quad \text{bzw.} \\ k(x) = (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x)\,. \end{aligned}$$

Entsprechend führen wir über der Menge $F \to F$ der Operatoren über F Addition und Multiplikation wie folgt ein.

Für alle $A, B : F \to F$ und $f \in F$ gilt

$$\begin{aligned} (A+B)(f) &= A(f)+B(f) \quad \text{bzw.} \\ (A\cdot B)(f) &= A(f)\cdot B(f)\,. \end{aligned}$$

Beispiele für Operatoren über F sind
sowohl der Translationsoperator E
als auch der Differenzenoperator Δ.

1. F ist ein Ring bezüglich
obiger Addition „$+$“ und Multiplikation „$\cdot$“.
Beweis!

Geben Sie die entsprechenden neutralen Elemente
bezüglich $+$ und $\cdot$ an.

Lösung:

Da Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$
beides assoziativ und kommutativ sind,
gilt dies auch für die entsprechend induzierten Verknüpfungen
von komplexwertigen Funktionen.

Entsprechend folgt die Distributivität.

Dazu die folgende Rechnung für alle $x \in M$:

$$
\begin{aligned}
[f+(g+h)](x) &= f(x)+g(x)+h(x) = [(f+g)+h](x)\,,\\
[f\cdot(g\cdot h)](x) &= f(x)\cdot g(x)\cdot h(x) = [(f\cdot g)\cdot h](x)\,,\\
[f\cdot(g+h)](x) &= f(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot h(x) = [(f\cdot g)+(f\cdot h)](x)\,.
\end{aligned}
$$

1. F ist eine Gruppe bezüglich „+“:

Es genügt, die Lösbarkeit der Gleichung $f + h = g$ für alle Funktionen $f, g \in F$ zu beweisen.

Seien $f, g \in F$.
Wir definieren $h \in F$ für alle $x \in M$ durch $h(x) = g(x) - f(x)$.

Dann folgt für alle $x \in M$

$$\begin{aligned} (f+h)(x) = f(x) + h(x) &= f(x) + (g(x) - f(x)) \\ &= g(x), \qquad \text{d. h.} \\ f + h &= g\,. \end{aligned}$$

Das neutrale Element bezgl. $+$ ist die konstante Funktion $e(x) = 0$.

2. F ist ein Monoid bezüglich „$\cdot$“:

Das neutrale Element bezgl. $\cdot$ ist die konstante Funktion $e(x) = 1$.

Die Assoziativität von $\cdot$ wurde schon gezeigt.

Bemerkung:

Wir haben auch über der Menge $F \rightarrow F$ der Operatoren über F eine Addition und eine Multiplikation durch Induzierung eingeführt.

Analog den Verknüpfungen über F begründen diese Verknüpfungen eine Ringstruktur über der Operatorenmenge $F \rightarrow F$.

2. Sei $\circ$ die Komposition von Operatoren. Man zeige für alle Operatoren A, B, C über F:

$$(A + B) \circ C = A \circ C + B \circ C \qquad \text{(Rechtsdistributivität)}\,.$$

Beispiel:

$$\Delta \circ E^{-1} = (E - I) \circ E^{-1} = E \circ E^{-1} - I \circ E^{-1} = \nabla\,.$$

Lösung:

Für alle $f \in F$ gilt

$$
\begin{aligned}
[(A+B)\circ C](f) &= [A+B](C(f)) \\
&= A(C(f)) + B(C(f)) \\
&= [A\circ C](f) + [B\circ C](f) \\
&= [(A\circ C)+(B\circ C)](f)\,, \quad \text{q.e.d.}
\end{aligned}
$$

3. Sowohl der Translationsoperator E als auch der Differenzenoperator Δ sind Beispiele für Operatoren über F (wobei $M = \mathbb{Z}$).
   Begründung!

Lösung:

Sei $M = \mathbb{Z}$.

Durch E wird jeder Funktion $f \in F$
die Funktion $g \in F$ zugeordnet mit

$$g : M \ni x \to g(x) = f(x+1) \in \mathbb{C}.$$

Durch Δ wird jeder Funktion $f \in F$
die Funktion $g \in F$ zugeordnet mit

$$g : M \ni x \to g(x) = f(x+1) - f(x) \in \mathbb{C}.$$

3.3 VA 3

Der Translationsoperator E und der Differenzenoperator Δ sind Beispiele für Operatoren, mit denen man wie in Ringen rechnen kann.

Seien M eine Menge und F die Menge aller Abbildungen von M in die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen, wie in VA 2.

Sei op die Menge aller Operatoren über M und $a \in op$. Dann definieren wir einen Operator A_a über F wie folgt für alle $f \in F$ und $x \in M$:

$$[A_a(f)](x) = f(a(x))\,.$$

Sei $OP = \{A_a\,;\, a \in op\}$.

1. Sei $M = \mathbb{Z}$. Zeigen Sie $E^n \in OP$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.
2. Man zeige für alle $a \in op$ und Operatoren B, C über F die Linksdistributivität

$$A_a \circ (B + C) = A_a \circ B + A_a \circ C\,.$$

3. Seien $a_i, b_j \in op$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$. Man zeige

$$\left(\sum_{i=1}^{m} A_{a_i}\right) \circ \left(\sum_{j=1}^{n} B_{b_j}\right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (A_{a_i} \circ B_{b_j})\,.$$

1. Sei $M = \mathbb{Z}$. Zeigen Sie $E^n \in OP$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Lösung:

Wir definieren den Operator $a \in op$ durch

$$a : \mathbb{Z} \ni x \to x + 1 \in \mathbb{Z}\,.$$

Dann gilt $E = A_a \in OP$.

A_a ist invertierbar: $(A_a)^{-1} = A_{a^{-1}}$ mit $a^{-1} : \mathbb{Z} \ni x \to x - 1 \in \mathbb{Z}$.

Es folgt für alle $n \in \mathbb{Z}$ die Gleichung

$$(A_a)^n = A_{a^n}\,.$$

Mithin $E^n \in OP$.

Bemerkung:

Wegen $a^n : \mathbb{Z} \ni x \to x + n \in \mathbb{Z}$ folgt für alle $n \in \mathbb{Z}$

$$E^n(f)(x) = f(x+n)\,,$$

in Erweiterung von Beispiel 199 der Vorlesung für $n \in \mathbb{N}_0$.

2. Man zeige für alle $a \in op$ und Operatoren B, C über F die Linksdistributivität

$$A_a \circ (B + C) = A_a \circ B + A_a \circ C\,.$$

Lösung:

Die Linksdistributivität von Operatoren steht in direktem Zusammenhang mit der Additivität von Operatoren.

Die Additivität von Operatoren geht in die Linearitätseigenschaft von Operatoren ein.

Die Linearität des Translationsoperators und des Differenzenoperatos wurden insbesondere in Satz 200 der Vorlesung benutzt.

Ein Operator A über F heißt linear, wenn für alle $f, g \in F, \alpha \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} A(f+g) &= A(f) + A(g) && \text{(Additivität)}, \\ A(\alpha f) &= \alpha \cdot (A(f)) && \text{(Homogenität)}\,. \end{aligned}$$

Wir zeigen im Folgenden die Additivität aller $A_a \in OP$
und folgern daraus anschließend deren Linksdistributivität.

Additivität:

Um eine Gleichung $A(f+g) = A(f) + A(g)$ nachzuweisen, muss man für alle $x \in M$ die Gleichung

$$[A(f+g)](x) = [A(f) + A(g)](x)$$

beweisen.

Für alle $x \in M$ gilt nun

$$\begin{aligned} [A_a(f+g)](x) &= (f+g)(a(x)) \\ &= f(a(x)) + g(a(x)) \\ &= [A_a(f)](x) + [A_a(g)](x) \\ &= [A_a(f) + A_a(g)](x)\,. \end{aligned}$$

Linksdistributivität:

Um eine Gleichung $A_a \circ (B + C) = A_a \circ B + A_a \circ C$ nachzuweisen, muss man für alle $f \in F$ die Gleichung $[A_a \circ (B + C)](f) = [A_a \circ B + A_a \circ C](f)$ beweisen.

Für alle $f \in F$ gilt nun

$$\begin{aligned}
[A_a \circ (B + C)](f) &= A_a([B + C](f)) \\
&= A_a(B(f) + C(f)) \\
&= A_a(B(f)) + A_a(C(f)) \\
&= [A_a \circ B](f) + [A_a \circ C](f) \\
&= [A_a \circ B + A_a \circ C](f)\,.
\end{aligned}$$

3. Seien $a_i, b_j \in op$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$. Man zeige

$$\left(\sum_{i=1}^{m} A_{a_i}\right) \circ \left(\sum_{j=1}^{n} B_{b_j}\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(A_{a_i} \circ B_{b_j})\,.$$

Lösung:

Da nun die volle Distributivität (links und rechts) gilt, folgt die gewünschte Gleichung, indem
alle Summanden der linken Klammer mit allen Summanden der rechten Klammer „multipliziert“, d. h. hier ,

über die Komposition verknüpft und die Produkte aufsummiert.

3.4 VA 4

Man zeige:

1. Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt $\Delta x^{\overline{n}} = n(x+1)^{\overline{n-1}}$.

   Beweis!

Lösung:

Für die steigende Fakultät gelten für alle ganzen Zahlen $g \in \mathbb{Z}$ die beiden fundamentalen Gleichungen

$$x^{\overline{g}} \cdot (x+g) = x^{\overline{g+1}} \qquad \text{und} \qquad x \cdot (x+1)^{\overline{g}} = x^{\overline{g+1}}\,.$$

Für die fallende Fakultät gelten für alle ganzen Zahlen $g \in \mathbb{Z}$ entsprechend die beiden fundamentalen Gleichungen

$$x^{\underline{g}} \cdot (x-g) = x^{\underline{g+1}} \qquad \text{und} \qquad x \cdot (x-1)^{\underline{g}} = x^{\underline{g+1}}\,.$$

Die Ausdrücke auf den Gleichungsseiten sind i. A.

Quotienten von polynomiellen Ausdrücken,

und stellen Elemente dar (sog. Brüche von Polynomen) aus dem

Quotientenkörper $\mathbb{C}(x)$ über dem Polynomring $\mathbb{C}[x]$

Diese Ausdrücke definieren gleichzeitig

rationale Funktionen aus $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

die man durch Einsetzen in x und Auswertung der Ausdrücke erhält.

Übersicht:

Steigende Fakultät:

$n > 0$: $\quad x^{\overline{n}} = x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot \;\ldots\; \cdot(x+n-1)\,,$

$n = 0$: $\quad x^{\overline{n}} = 1\,,$

$n < 0$: $\quad x^{\overline{n}} = \frac{1}{(x+n)\cdot(x+(n+1))\cdot\;\ldots\;\cdot(x-2)\cdot(x-1)}\,.$

Fallende Fakultät:

$n > 0$: $\quad x^{\underline{n}} = x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot \;\ldots\; \cdot(x-(n-1))\,,$

$n = 0$: $\quad x^{\underline{n}} = 1\,,$

$n < 0$: $\quad x^{\underline{n}} = \frac{1}{(x-n)\cdot(x-(n+1))\cdot\;\ldots\;\cdot(x+2)\cdot(x+1)}\,.$

Wegen

$$x^{\overline{g}} \cdot (x+g) = x^{\overline{g+1}} \qquad \text{und} \qquad x \cdot (x+1)^{\overline{g}} = x^{\overline{g+1}}$$

gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
\Delta x^{\overline{n}} \quad &= (x+1)^{\overline{n}} - x^{\overline{n}} \\
&= (x+1)^{\overline{n-1}} \cdot (x+1+n-1) \; - \; x \cdot (x+1)^{\overline{n-1}} \\
&= (x+n)(x+1)^{\overline{n-1}} - x \cdot (x+1)^{\overline{n-1}} \\
&= n(x+1)^{\overline{n-1}} .
\end{aligned}$$

Man zeige:

2. Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt $\qquad \nabla x^{\underline{n}} = n(x-1)^{\underline{n-1}}$.

   Benutzen Sie die Gleichung $E \cdot \nabla = \Delta$
   zusammen mit Lemma 203 für den Beweis!

Lösung:

In Lemma 203 wurde die Gleichung

$$\Delta x^{\underline{n}} = n x^{\underline{n-1}}$$

bewiesen.

Es folgt mit Operatorenrechnung

$$\begin{aligned}
\nabla x^{\underline{n}} &= (E^{-1}\Delta) x^{\underline{n}} \\
&= E^{-1}(\Delta x^{\underline{n}}) \\
&= E^{-1}(n x^{\underline{n-1}}) \\
&= n(x-1)^{\underline{n-1}}\,.
\end{aligned}$$

Man zeige:

3. Es gilt $\nabla\Delta = \Delta\nabla$.

   Beweis!

Lösung:

Es gilt

$$\begin{aligned}
[[\nabla\Delta](f)](x) &= [\nabla(\Delta(f))](x) \\
&= [\Delta(f)](x) - [\Delta(f)](x-1) \\
&= (f(x+1) - f(x)) - (f((x-1)+1) - f(x-1)) \\
&= (f(x+1) - f((x+1)-1)) - (f(x) - f(x-1)) \\
&= [\nabla(f)](x+1) - [\nabla(f)](x) \\
&= [\Delta(\nabla(f))](x) \\
&= [[\Delta\nabla](f)](x)\,.
\end{aligned}$$

3.5 VA 5

Berechnen Sie mit Hilfe der Partiellen Summation für $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k \,.$$

Lösung:

Wir spezialisieren die Formel der Partiellen Summation wie folgt.

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \cdot \Delta g(k) = [f(k) \cdot g(k)]_1^{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \Delta f(k) \cdot g(k+1)$$

Man setzt nun $f(k) = k$, $\Delta g(k) = 2^k$.
Damit gilt $\Delta f(k) = 1$, $g(k) = 2^k$ und es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k &= \left[k \cdot 2^k\right]_1^{n+1} - \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot 2^{k+1} \\
&= \left[(n+1) \cdot 2^{n+1} - 2\right] - 4 \cdot (2^n - 1) \\
&= (n+1) \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 2^{n+1} + 2 \\
&= (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2 \,.
\end{aligned}$$

3.6 VA 6

Beweisen Sie die folgende Identität für alle $n, i \geq 0$ mit Binomialinversion:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} = \delta_{n,i} \qquad .$$

Hierbei ist $\delta_{n,i} = 1$, falls $n = i$, und $\delta_{n,i} = 0$, falls $n \neq i$.

Lösung:

Wir machen den Ansatz

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{k,i} = \delta_{n,i}$$

mit noch zu bestimmenden $b_{k,i}$.

Binomialinversion (siehe Vorlesung) liefert

$$b_{n,i} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \delta_{k,i} = (-1)^{n-i} \binom{n}{i}.$$