Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2012/13
Übungsblatt 6
19. November 2012

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 27. November 2012, 14 Uhr in die **DS Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (4 Punkte)

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion die folgende Aussage:

Für alle $n \geq 2$ und positiven reellen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gilt

$$1 + (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n) \; < \; (1 + a_1) \cdot (1 + a_2) \cdot \ldots \cdot (1 + a_n)\,. \tag{1}$$

Sie dürfen die Produktschreibweise $\prod_{i=1}^{n} a_i$ bzw. $\prod_{i=1}^{n}(1 + a_i)$ für $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ bzw. $(1 + a_1) \cdot (1 + a_2) \cdot \ldots \cdot (1 + a_n)$ benutzen.

Hausaufgabe 2 (4 Punkte)

Seien $f, g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $g(n) \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Das Wachstumsverhalten $f(n) \in \Omega(g(n))$ ist definiert durch den pränexen prädikatenlogischen Ausdruck

$$(\exists c{>}0 \;\exists n_0{\in}\mathbb{N}_0 \;\forall n{\geq}n_0)\;[\,|f(n)| \geq c{\cdot}g(n) \geq 0\,]\,. \tag{1}$$

1. Geben Sie für das Wachstumsverhalten $f(n) \notin \Omega(g(n))$ einen pränexen prädikatenlogischen Ausdruck an.

2. Es gelte $f(n) \in \Omega(g(n))$ und $f(n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Man zeige:

$$(\exists c{>}0 \;\forall n{\in}\mathbb{N}_0)\;[\,|f(n)| \geq c{\cdot}g(n)\,]\,. \tag{2}$$

Hausaufgabe 3 (4 Punkte)

Beweisen Sie Ihre Antworten:

1. Gilt $2 \in \omega(1)$?

2. Gilt die Mengengleichheit $\Omega(3n^2) = \Omega(2n^3)$?

3. Wahr oder falsch: $2 \cdot 3^n \in \omega(3 \cdot 2^n)$?

4. Sei $2^{\mathcal{O}(n)} = \{2^{f(n)};\; f(n) \in \mathcal{O}(n)\}$. Gilt $\mathcal{O}(2^n) = 2^{\mathcal{O}(n)}$?

Hausaufgabe 4 (4 Punkte)

1. Berechnen Sie $(10^{96} + 5^{27} - 30^{10^6}) \bmod 3$.

2. Bestimmen Sie $2^{333333332} \bmod 12$.

Hausaufgabe 5 (4 Punkte)

Seien $x \in \mathbb{Z}$ und $y \in \mathbb{N}$. Man zeige:

$$\left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor = \frac{x - (x \mod y)}{y}\,.$$

Zusatzaufgabe 2 (Rechenübung ohne Abgabe)

Machen Sie sich mit dem elementaren Rechnen mit Matrizen und Determinanten vertraut und informieren Sie sich ggf. anhand geeigneter Quellen der Linearen Algebra bzw. Höheren Mathematik.

1. Werten Sie die folgenden Matrixprodukte aus (Ergebnis als Matrix):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Werten Sie den folgenden Ausdruck aus (Ergebnis als Matrix):

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3. Lösen Sie das folgende Gleichungssystem für $x_i \in \mathbb{Q}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

4. Berechnen Sie für $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ die Vandermondesche Determinante Δ als Produkt von Differenzen der x_i:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}.$$

Hinweis: *Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

Sei M eine endliche Menge und $z = (a_0, a_1, \dots, a_{|M|-1})$ ein $|M|$-Tupel mit paarweise verschiedenen $a_i \in M$. Dann ist die Abbildung $\pi_z : M \to M$ mit $\pi_z(a_i) = a_{(i+1) \bmod |M|}$ ein *Zyklus* der *Länge* $|M|$ mit *Basis* M und *Darstellung* z. Für jeden Zyklus π bezeichne $M(\pi)$ die Basis von π. Man kann π_z als zyklische Nachfolgerbildung in M auffassen.

1. Wie viele Darstellungen besitzt ein Zyklus der Länge 3?
   Welchen Zyklus stellt $z = (4, 1, 3, 2)$ dar und welche Basis hat der Zyklus?
   Welche verschiedenen Darstellungen hat ${\pi_z}^3$? Ist ${\pi_z}^4$ ein Zyklus?

Zyklen ρ, σ heißen *disjunkt*, falls $M(\rho) \cap M(\sigma) = \emptyset$ gilt, d. h., falls deren Basismengen disjunkt sind. Eine Menge Z von paarweise disjunkten Zyklen heißt *Zyklenpartition*. Dabei bildet die Menge der Basismengen $P_Z = \{M(\pi)\,;\, \pi \in Z\}$ eine Mengenpartition der Vereinigung der Basismengen $M(Z) = \bigcup_{\pi \in Z} M(\pi)$. Wir sagen, dass Z eine Zyklenpartition der Menge $M(Z)$ ist.

2. Welche Basis haben die Zyklen zu $z_1 = (2, 5)$, $z_2 = (1)$, $z_3 = (5, 4, 3, 2, 1)$?

   Geben Sie eine extensionale Darstellung der Abbildungen π_{z_i} an!

   Warum ist $Z = \{\pi_{z_1}, \pi_{z_2}, \pi_{z_3}\}$ keine Zyklenpartition von [5]?

Sei Z eine Zyklenpartition von $[n]$. Dann ist eine bijektive Abbildung $f_Z : [n] \to [n]$ gegeben für alle $i \in [n]$ durch

$$f_Z(i) = \pi(i), \quad \text{falls} \quad i \in M(\pi) \text{ und } \pi \in Z\,.$$

3. Zyklenpartitionen werden häufig durch eine Folge $z_1 z_2 \dots z_k$ von Zyklusdarstellungen z_i definiert, wobei die Reihenfolge der z_i in der Folge keine Rolle spielt.

   Sei $Z = (4, 5, 1)(3)(2)$ eine Zyklenpartition.
   Beschreiben Sie die Abbildung f_Z extensional!

4. Eine Funktion f sei gegeben durch die folgende Matrixdarstellung.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 1 & 6 & 2 & 7 & 9 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Berechnen Sie $\{f^i(2)\,;\, i \in \mathbb{N}\}$, $\{f^i(3)\,;\, i \in \mathbb{N}\}$, $\{f^i(5)\,;\, i \in \mathbb{N}\}$!

   Bestimmen Sie eine *Zyklendarstellung von* f, d. h. eine Zyklenpartition Z von [9], so dass $f(i) = f_Z(i)$ für alle $i \in [9]$ gilt!

Vorbereitung 2

1. Man zeige:

   In einem beliebigen Ring $\langle R, \oplus, \odot, 0, 1\rangle$ gelten die folgenden Gleichungen.

$$a \odot 0 \;=\; 0 \odot a \;=\; 0\,, \qquad\qquad a \odot b \;=\; (-a) \odot (-b)\,.$$

2. Geben Sie zwei nichtkommutative Ringe an.

Vorbereitung 3

Beweisen Sie:

1. Es gibt bis auf Isomorphie genau einen Ring $R = (S, \oplus, \odot, 0, 1)$ mit drei Elementen, d. h. $S = \{0, 1, a\}$. Insbesondere also muss R isomorph sein zum Ring $(\mathbb{Z}_3, +_3, \cdot_3, 0, 1)$.
2. Der Ring $R = (S, \oplus, \odot, 0, 1)$ mit drei Elementen ist ein Körper.
3. Es heiße $y \in S \setminus \{0\}$ *co*-Nullteiler von $x \in S \setminus \{0\}$, falls $x \odot y = 0$.

   Sei t_x die Anzahl der *co*-Nullteiler eines Ringelementes $x \in S \setminus \{0\}$ eines endlichen, kommutativen Ringes $(S, \oplus, \odot, 0, 1)$.

   Dann ist $t_x + 1$ ein Teiler der Anzahl $n = |S|$ aller Ringelemente.

Vorbereitung 4

Eine allgemeine Methode zur Konstruktion von Algebren B aus gegebenen Algebren A_1 und A_2 ist die Bildung von *direkten Produkten.*
Seien $A_1 = (S_1, \circ_1)$ und $A_2 = (S_2, \circ_2)$, dann ist das direkte Produkt von A_1 und A_2 definiert als $A_1 \times A_2 = (S_1 \times S_2, \circ_1 \times \circ_2)$ mit dem direkten Produkt $\circ_1 \times \circ_2$ der komponentenweisen Verknüpfungen, so dass also $(x_1, x_2)(\circ_1 \times \circ_2)(y_1, y_2) = (x_1 \circ_1 y_1, x_2 \circ_2 y_2)$ für alle $x_1, y_1 \in S_1, x_2, y_2 \in S_2$ gilt.

1. Seien $(\mathbb{Z}_2, +_2)$ und $(\mathbb{Z}_3, +_3)$ die additiven Gruppen der ganzen Zahlen modulo 2 bzw. modulo 3. Dann ist das direkte Produkt $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, +_2 \times +_3)$ eine kommutative Gruppe.

   Stellen Sie die Verknüpfungstafel des direkten Produkts $+_2 \times +_3$ auf.
2. Zeigen Sie dass $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, +_2 \times +_3)$ isomorph ist zu der additiven Gruppe $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ der Gruppe der ganzen Zahlen modulo 6.
3. Seien $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ und $(\mathbb{Z}_3, +_3, \cdot_3)$ die Ringe der ganzen Zahlen modulo 2 bzw. modulo 3. Dann ist das direkte Produkt $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, +_2 \times +_3, \cdot_2 \times \cdot_3)$ ein kommutativer Ring.

   Stellen Sie die Verknüpfungstafel des direkten Produkts $\cdot_2 \times \cdot_3$ auf.
4. Zeigen Sie, dass der Ring $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ isomorph ist zum Ring $\mathbb{Z}_6$.

Tutoraufgabe 1

Wir betrachten die folgenden Permutationen p_i der Menge $[6] \subseteq \mathbb{N}$ in Zyklendarstellung und beziehen uns dabei auf die Schreibweisen in Vorbereitungsaufgabe 1.

$$p_1 = (1,5,4,6)\,(2)\,(3)\,, \qquad p_2 = (2,5,1)\,(3)\,(4)\,(6)\,,$$
$$p_3 = (3,5,2)\,(1)\,(4)\,(6)\,, \qquad p_4 = (4,5,3)\,(1)\,(2)\,(6)\,.$$

1. Geben Sie eine Zyklendarstellung der Permutation p an, die durch Komposition der p_i wie folgt definiert ist:
$$p = p_1 \circ p_2 \circ p_3 \circ p_4\,.$$
2. Bestimmen Sie die kleinste Potenz $k > 0$, so dass $(p_1 \circ p_4)^k$ gleich der identischen Abbildung id ist $(\forall x(id(x) = x))$.

Tutoraufgabe 2

Die Menge der Permutationen der Teilmenge $\{1, 2, 3, 4\}$ der natürlichen Zahlen bildet zusammen mit der Komposition $\circ$ von Abbildungen die Gruppe $\mathcal{S}_4$. Das neutrale Element der Gruppe sei id. Wir betrachten die in Zyklusschreibweise gegebenen Permutationen

$$p = (1\ 2)(3)(4) \qquad \text{und} \qquad q = (1)(2)(3\ 4)\,.$$

Seien $r = p \circ q$ und $U = \{id, p, q, r\}$.

1. Geben Sie die $\circ$-Verknüpfungstafel für die Elemente aus U an.
2. Beweisen Sie, dass die Menge U mit jedem Element $x \in U$ auch sein Inverses x^{-1} enthält (mit $x \circ x^{-1} = id$).
3. Aus den obigen Aussagen folgt, dass U eine Untergruppe von $\mathcal{S}_4$ ist. Ist die Gruppe U zyklisch? Beweis!

Tutoraufgabe 3

Die Menge aller 2×2-Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ mit Elementen a, b aus dem Ring $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ bildet einen Unterring, bezeichnet als R_4, des Ringes aller 2×2-Matrizen über dem Ring $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$. Man zeige:

1. R_4 ist kein Körper.
2. R_4 ist nicht isomorph zu $(\mathbb{Z}_4, +_4, \cdot_4)$.
3. R_4 ist nicht isomorph zu $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +_2 \times +_2, \cdot_2 \times \cdot_2)$.

Tutoraufgabe 4

1. Die Charakteristik eines Körpers K, i. Z. $char(K)$, ist definiert als die Ordnung des Elements 1 in der additiven Gruppe von K. Man zeige:
$$p = char(K) \in \mathbb{N} \Rightarrow p \text{ ist eine Primzahl}\,.$$
2. Geben Sie die Verknüpfungstafeln eines Körpers mit 4 Elementen an. Welche Charakteristik hat dieser Körper?

   Begründen Sie Ihre Angaben!