Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik XIV
Prof. Dr. Susanne Albers
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2014
Übungsblatt 1
9. April 2014

# Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

*Abgabetermin: 16. April 2014, 10 Uhr in die* **DWT Briefkästen**

## Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Eine nicht leere Menge $\mathcal{A}$ von Teilmengen einer Menge $\Omega$ heißt *Mengenalgebra über* $\Omega$, falls $\mathcal{A}$ *abgeschlossen* ist gegenüber Vereinigungsbildung und Komplementbildung, d. h., falls gilt (1) $A, B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$ und (2) $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$.

Eine Mengenalgebra über $\Omega$ heißt *vollständig*, falls jede Teilmenge von $\Omega$ in $\mathcal{A}$ enthalten ist, d.h., falls $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ gilt.

1. Geben Sie 5 verschiedene Mengenalgebren über $\Omega = \{1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{N}$ an.
2. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $|\Omega| = n \geq 2$. Zeigen Sie, dass es eine 4-elementige Mengenalgebra über $\Omega$ gibt! Wie viele Elemente enthält die vollständige Mengenalgebra über $\Omega$?

## Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Seien $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 4, 5, 6\}$.

1. Bestimmen Sie die von $A$ und $B$ *erzeugte* Algebra über $\Omega$, d.h., die hinsichtlich der Anzahl von Elementen kleinste Mengenalgebra $\mathcal{A}$ über $\Omega$, für die $A, B \in \mathcal{A}$ gilt.
2. Zeigen Sie, dass die Menge der Atome der von $A$ und $B$ erzeugten Algebra $\mathcal{A}$ eine Partition von $\Omega$ bilden.

   Hinweis: Beachten Sie die Definition der Atome einer Booleschen Algebra aus der Vorlesung Diskrete Strukturen.

## Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

1. Listen Sie alle 3-elementigen Multiteilmengen von $\Omega = \{1, 2, 3\}$ auf.
2. Wie viele 5-elementigen Multiteilmengen von $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ gibt es?

## Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

1. Eine Box enthalte 1 weißen, 2 schwarze und 4 rote, gleichartige Bälle. Wenn Sie mit zwei Ziehungen (ohne Zurücklegen) genau einen weißen und einen schwarzen Ball ziehen, machen Sie den Hauptgewinn.

   Wie groß schätzen Sie Ihre Gewinnchance ein? Begründen Sie Ihre Antwort!
2. Wie viele Wörter der Länge 14 gibt es, in denen genau 4 Mal der Buchstabe $a$, 2 Mal der Buchstabe $b$ und 5 Mal der Buchstabe $c$ vorkommen.

***Hinweis:*** *Die Vorbereitungsaufgaben bereiten die Tutoraufgaben vor und werden in der Zentralübung unterstützt. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Hausaufgaben sollen selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden.*

## Vorbereitung 1

1. Machen Sie sich die begrifflichen Unterschiede klar, wenn wir von „Ereignis", „Elementarereignis" oder „Ergebnismenge" sprechen.

2. Begründen Sie den begrifflichen Zusammenhang zwischen endlichen Multimengen und endlichen diskreten Wahrscheinlichkeitsräumen.

## Vorbereitung 2

1. „Wenn bei 1000 Münzwürfen stets Kopf und niemals Zahl erscheint, dann ist die Wahrscheinlichkeit, beim nächsten Wurf Zahl zu werfen, gleich Null."

   Warum ist diese Aussage nicht sinnvoll!

2. Eine Box enthalte schwarze Bälle und doppelt so viele weiße Bälle. Unter der Voraussetzung, dass man 2 weiße Bälle entnommen hat (ohne Zurücklegen), werde mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{5}$ bei einer dritten Ziehung ein schwarzer Ball gezogen.

   Wie viele Bälle enthielt die Box zu Beginn?

   (Wir setzen entsprechende Laplacesche Gleichwahrscheinlichkeit voraus).

## Vorbereitung 3

1. Geben Sie ein Beispiel eines diskreten Wahrscheinlichkeitsraumes an, in dem Elementarereignisse mit Wahrscheinlichkeit 0 existieren.

2. Sei $(\Omega, \Pr)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Für Ereignisse $A$ und $B$ gelte $\Pr[A] = 1$ und $\Pr[B] = \frac{1}{3}$.

   Zeigen Sie $\Pr[A \setminus B] = \frac{2}{3}$.

## Vorbereitung 4

Wir nehmen nun an, dass für das Ergebnis eines Experiments $V$ das Gelten zweier Aussagen (das Eintreten zweier Ereignisse) $A$ und $B$ feststellbar sei. Wir beobachten bei einer bestimmten oftmalig wiederholten Durchführung von $V$ das Eintreten von Ereignissen $X$ und relativen Häufigkeiten $h(X)$ wie folgt.

$$\begin{aligned} h(A \wedge B) &= \frac{1}{6}, \\ h(A \wedge \neg B) &= \frac{1}{3}, \\ h(\neg A \wedge B) &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Modellieren Sie diese Beobachtung adäquat mit einem endlichen, diskreten Wahrscheinlichkeitsraum!

## Tutoraufgabe 1 (Siebformel)

Wir betrachten 3 Fehlerarten $A$, $B$ und $C$, die bei der Fertigung eines Bauteils auftreten. Wir nehmen an, dass die 3 Fehlerarten gleich häufig vorkommen. Die Ausgangskontrolle protokolliert bei 1000 fehlerhaften Bauteilen folgende Fehler.

5 Bauteile haben gleichzeitig die Fehler $A$, $B$ und $C$,
25 Bauteile haben genau die Fehler $A$ und $B$,
40 Bauteile haben genau die Fehler $A$ und $C$ und
50 Bauteile haben genau die Fehler $B$ und $C$.

1. Wie viele von den 1000 fehlerhaften Bauteilen haben den Fehler $B$?

   Beschreiben Sie die Situation zunächst mit einem Venn-Diagramm.

2. Wir nehmen an, dass im Protokoll der Ausgangskontrolle die Zählung wie oben steht und allerdings wegen eines einzigen Tippfehlers die letzte Zeile wie folgt lautet:

   500 Bauteile haben genau die Fehler $B$ und $C$.

   Wie kann man allein aus den genannten Zahlen heraus nachweisen, dass ein Tippfehler vorliegen muss?

## Tutoraufgabe 2 (Hierarchische Partitionierung)

Sei $X$ eine endliche Menge mit $n$ Elementen. Die Struktur der Menge sei gegeben durch geschachtelte Partitionierung wie folgt:

- $X = A_1 \uplus A_2$ mit $|A_1| : |A_2| = 3 : 2\,.$
- $A_1 = B_1 \uplus B_2 \uplus B_3$ mit $|B_1| : |B_2| : |B_3| = 1 : 1 : 2\,.$
- $A_2 = C_1 \uplus C_2 \uplus C_3$ mit $|C_1| : |C_2| : |C_3| = 1 : 1 : 2\,.$
- $C_3 = D_1 \uplus D_2$ mit $|D_1| : |D_2| = 1 : 1\,.$

1. Bestimmen Sie $n$ so, dass alle genannten Zahlverhältnisse ganzzahlig realisierbar sind. Stellen Sie die Hierarchie der Partitionen durch eine Baumstruktur dar.
2. Nehmen Sie nun an, dass jedes Element $x$ aus $X$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit ausgewählt wird und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $x \in D_1$.

## Tutoraufgabe 3 (Produkte von Wahrscheinlichkeiten)

Eine faire Münze ist eine Münze, die mit Wahrscheinlichkeit 1/2 „Kopf“ zeigt und mit Wahrscheinlichkeit 1/2 „Zahl“. Wir werfen eine solche Münze $n$ mal, dabei erhalten wir $k$ mal „Kopf“ und $n - k$ mal „Zahl“.

1. Bestimmen Sie den zu $n$ zugehörigen Ergebnisraum $\Omega_n$.
2. Sei $n$ gerade. Geben Sie eine möglichst gute asymptotische Abschätzung für $Pr[k = n/2]$ an. (Hinweis: Verwenden Sie die *Stirling-Formel*.)
3. Wie groß ist $Pr[\,k \text{ gerade}\,]$ in Abhängigkeit von $n$?
4. Wie groß ist $Pr[\forall i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil : \text{Ergebnis } i\text{-ter Wurf} = \text{Ergebnis } (n{-}i{+}1)\text{-ter Wurf}\,]$ ?